HZ BOOKS
华章教育

国外电子与电气工程技术丛书

PEARSON

通信系统原理

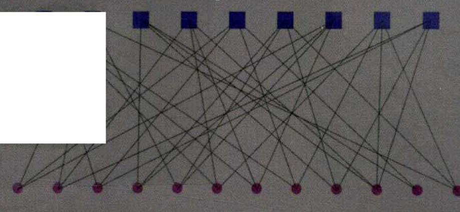
（原书第2版）

[美] 约翰 G. 普罗克斯（John G. Proakis）
马苏德·萨莱希（Masoud Salehi） 著

郭宇春 张立军 李磊 译

Fundamentals of Communication Systems
Second Edition

Fundamentals of
Communication
Systems SECOND EDITION



JOHN G. PROAKIS · MASOUD SALEHI



机械工业出版社
China Machine Press

本书是“通信原理”课程的经典教材，详细介绍现代通信系统的基本技术以及系统设计和分析的基础工具和方法，并借助大量实例重点讲解了数字通信系统分析与设计的基本原理，同时也对模拟通信系统和相关数学基础给出了系统的介绍。

新版更新内容

- 信号几何表示下的数字调制技术；
- 载波相位估计和符号同步的讨论；
- 多载波调制与OFDM；
- Turbo码的迭代译码及LDPC码；
- 射频信道的多天线（MIMO）系统；
- 扩频信号与系统。

作者简介

John G. Proakis 美国东北大学及加州大学圣地亚哥分校教授，从事数字通信、数字信号处理、通信系统建模和仿真等研究与教学，研究兴趣涉及适应性滤波、适应性通信系统、适应性均衡技术、衰落多径信道通信、雷达检测、信号参数估计、最优化技术和统计分析等。著有《通信系统原理》《数字通信》《数字信号处理》等多部经典教材。

Masoud Salehi 美国东北大学教授，主要从事编码、信息论、数字通信及数据压缩的研究与教学。研究兴趣涉及网络信息论、单用户和多用户系统中的信源-信道匹配问题、数据压缩、Turbo码、衰落信道编码以及数字水印。著有《通信系统原理》《通信系统工程》及《现代通信系统Matlab与Simulink仿真》等多部经典教材。





上架指导：通信原理

ISBN 978-7-111-50519-8



定价：129.00元

PEARSON
www.pearson.com

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·锡彬

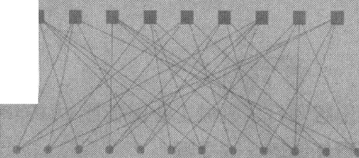
国外电子与电气工程技术丛书

通信系统原理

（原书第2版）

[美] 约翰 G. 普罗克斯（John G. Proakis）
马苏德·萨莱希（Masoud Salehi） 著
郭宇春 张立军 李磊 译

Fundamentals of Communication Systems
Second Edition




机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

通信系统原理（原书第2版）/（美）普罗克斯（Proakis，J. G.），（美）萨莱希（Salehi，M.）著；郭宇春，张立军，李磊译．—北京：机械工业出版社，2015.6
（国外电子与电气工程技术丛书）
书名原文：Fundamentals of Communication Systems，Second Edition

ISBN 978-7-111-50519-8

I. 通… II. ①普… ②萨… ③郭… ④张… ⑤李… III. 通信系统 IV. TN914

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第131627号

本书版权登记号：图字：01-2013-7576

本书以数字通信系统为重点讨论了通信系统分析与设计的基本原理，同时对模拟通信系统和相关数学基础给出了系统的介绍。主要内容包括：线性系统分析、概率论及随机过程、幅度调制与角度调制两类模拟通信系统及其噪声性能分析、模数转换、AWGN信道中的数字调制、多维数字调制、限带信道中的数字传输、多载波通信与OFDM系统、信息论、纠错编码、衰落多径信道中的数据传输及扩频通信系统。全书提供了许多例题以突出所述理论的工程应用，各章还配有大量难度不等的习题以及上机习题，帮助读者检验并巩固所学内容。

本书可作为通信工程、电子工程及相关专业的本科生或研究生教材，也可以为工程技术人员分析与设计通信系统提供参考。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码：100037）
责任编辑：刘立卿　　责任校对：董纪丽
印　　刷：北京瑞德印刷有限公司　　版　　次：2016年1月第1版第1次印刷
开　　本：185mm×260mm　1/16　　印　　张：33.5
书　　号：ISBN 978-7-111-50519-8　　定　　价：129.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的优势，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Mark I. Montrose、David A. Johns 、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Dikshitulu K. Kalluri 、Bhag Singh Guru、Stephane Mallat等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气工程技术丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站： www. hzbook. com

电子邮件： hzjsj@hzbook. com

联系电话： (010) 88379604

联系地址： 北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码： 100037



华章科技图书出版中心

译者序

本书是通信系统原理的经典教材之一，是作者多年教学与研究工作的结晶。全书内容系统全面，概念清晰，分析严谨，基础性与先进性并重，知识点组织条理清晰。

本书以数字通信系统为重点讨论了通信系统分析与设计的基本原理，同时也对模拟通信系统和相关数学基础给出了系统的介绍，保证了知识架构的完整性和系统性。本书首先对课程所需要的数学背景知识给出了详细介绍，其中第 2 章是线性系统分析，重点是频域分析方法和傅里叶方法。第 5 章讨论概率、随机变量和随机过程，保证了内容的系统性，也便于读者自学。第 3、4、6 章对传统的模拟通信系统的幅度调制、角度调制和模拟通信系统噪声性能分析方法分别进行了介绍，保证了内容的基础性，便于读者对系统理论的理解。第 7～15 章重点介绍作为现代通信系统主要内容的数字通信系统，保证了内容的先进性。具体包括模数转换（第 7 章）、AWGN 信道中的数字调制方法（第 8 章）、多维数字调制（第 9 章）、限带 AWGN 信道中的数字传输（第 10 章）、多载波调制与 OFDM 系统（第 11 章）、信息论概述（第 12 章）、可靠通信的编码（第 13 章）、衰落多径信道中的数据传输（第 14 章）及扩频通信系统（第 15 章）。

本书各章包含大量的实例，用以阐述由理论发展而来的技术在实际中的应用。每章还有大量不同难度的习题与计算机仿真习题，便于读者理解和拓展教材的理论内容。

相比第 1 版，第 2 版对内容进行了大量更新和大幅度的结构调整，主要包括：基于信号的几何表示对数字调制技术的内容进行了重新组织，增加了载波相位估计和符号同步、多载波调制与 OFDM 系统、射频信道的多天线（MIMO）系统、Turbo 码的迭代译码和 LDPC 码以及扩频信号与系统。这些更新加强了本书内容的系统性、先进性和知识点组织的严谨性。

我们很高兴承担了此书的翻译工作。本书第 1 章及第 8～11 章由郭宇春翻译，第 2～6 章由李磊翻译，第 7 章及第 12～15 章由张立军翻译。

本书适合作为高年级本科生或一年级研究生学习模拟与数字通信系统原理的教材（建议开设 1 或 2 学期的课程），同时也适合电子工程师解决数字通信系统设计中的各种基础问题时参考。

译者

2014 年 9 月

前　言

本书主要是为电气工程专业本科生编写的通信系统原理教材。主要目标是介绍现代通信系统中采用的基本技术，提供系统设计和分析需要的基础工具与方法。本书同时也可为工程技术人员提供参考，或作为自学材料。

本书的重点是数字通信系统，这些内容具体在第 7～15 章介绍。现代通信系统，包括新几代无线通信系统、卫星通信系统及数据传输网络，其主干就是这些数字通信系统。第 3、4、6 章对传统的模拟通信系统进行了适当的介绍。此外，本书以两章的篇幅对课程所需要的背景知识给出了详细介绍，第 2 章是关于线性系统分析的，重点是频域分析方法和傅里叶方法；第 5 章讨论概率、随机变量和随机过程。虽然现在这些内容会分别在电气工程专业的不同主干课程中讨论，但作者的经验是学生在学习通信系统原理之前，往往需要复习这些知识，因此在此对这些相关课程中的背景知识进行简要回顾很重要。学生学习这门课还需要具备微积分、线性代数和电子电路基础的背景知识。

新版更新内容

下面是本书第 2 版的主要更新内容：

- 基于信号的几何表示对数字调制技术的内容进行了大幅度的重新组织。
- 增加了对载波相位估计和符号同步的讨论。
- 增加了第 7 章“多载波调制与 OFDM”。
- 增加并扩展了 Turbo 码的迭代译码及 LDPC 码的内容。
- 增加了 14.4 节“多天线系统”。
- 增加了第 15 章“扩频通信系统”。

本书的结构安排

本书第 1 章首先给出通信系统的简要概述，第 2 章接着描述时域及频域的信号表示和系统分析方法，重点是信号的傅里叶级数和傅里叶变换表示，以及线性系统分析中变换的运用。

第 3 章和第 4 章介绍模拟信号的调制与解调。第 3 章讨论幅度调制（AM）。第 4 章讨论频率调制（FM）和相位调制（PM）。这两章也讨论 AM 和 FM 无线电广播。

第 5 章讨论概率和随机过程的基本定义和概念。重点分析可以对加性噪声分布数学建模的高斯随机过程，并且讨论时域及频域的随机信号表示。

第 6 章分析调幅、调角（调频和调相）模拟信号解调过程中加性噪声的影响，根据信噪比性能对比这些模拟信号调制技术。并且给出模拟通信系统中热噪声的特征和传输损耗的影响。

第 7 章介绍模拟数字转换。首先介绍抽样定理和量化技术，接着讨论包括 PCM、DPCM 和 DM 在内的波形编码技术。这一章最后简要讨论 LPC 语音编码技术和 JPEG 图像压缩标准。

第 8 章介绍基本数字调制技术及其在 AWGN 信道中的性能。讨论二进制对极和正交信号、M 进制脉冲幅度调制（PAM）、相移键控（PSK）和正交幅度调制（QAM）技术。这些类型的数字信号都可以用几何表示方法描述。这些技术的最佳解调方法基于最大后验准则和最大似然准则。此外，还描述利用锁相环（PLL）进行载波相位估计的方法和符号同步方法。

第 9 章基于信号的几何表示讨论多维数字调制信号，以及这些信号在 AWGN 信道中的传输性能。考虑的信号类型包括正交信号、双正交信号、单纯形信号、二进制编码信号和频移键控（FSK）信号。对连续相位 FSK（CPFSK）信号及其频谱特征也进行讨论。

第 10 章讨论限带 AWGN 信道中的数字信号传输。说明信道失真对传输信号的影响导致了符号间干扰（ISI）现象。接着描述消除或抑制符号间干扰的信号设计技术。最后讨论在信道失真的接收信号中消除或抑制 ISI 的自适应均衡器的设计方法。

第 11 章主要讨论多载波调制和正交频分复用（OFDM）的数字信号传输。给出了基于 FFT 算法的 OFDM 调制器和解调器的实现。此外还讨论 OFDM 信号的频域特征和 OFDM 信号中峰均功率比（PAR）的降低方法。最后给出 OFDM 在当前数字通信系统中的几个应用。

第 12 章给出信息通信的基本限制，包括无记忆源的信息量、信源输出的有效编码和 AWGN 信道容量。描述两种常用的数字信源输出编码技术，即霍夫曼（Huffman）编码算法和 Lempel-Ziv 算法。

第 13 章讨论信道编码和译码。描述在 AWGN 信道中增强数字通信系统性能的线性分组码和卷积码。讨论分组码和卷积码的硬判决和软判决译码。也讨论限带信道的编码（栅格编码调制）、Turbo 码、低密度奇偶校验码（LDPC）。

第 14 章讨论无线物理信道的特征和时变衰落多径信道数学模型的构建。确定瑞利（Rayleigh）衰落信道中的二进制调制性能，分析信号多样性对抗信号衰落的优势。描述 RAKE 解调器及其在频率选择性信道中的性能。介绍在无线通信系统中获得信号多样性的多发送及多接收天线的作用。介绍数字信号到多天线传输的映射方法，包括分组编码技术，例如 Alamouti 码和网格（trellis）码。最后讨论无线信道链路预算分析。

本书最后一章介绍扩频数字通信技术及其在抗干扰方面的应用，包括有意识（扰码）和无意识两类，后者来自信道的其他用户。具体介绍直接序列（DS）扩频和跳频（FH）技术及其在有干扰环境下的性能。另外还讨论实现传输信号扩频的伪随机序列的产生方法。最后描述在第 2、3 和 4 代（2G、3G、4G）数字蜂窝系统中扩频技术的应用。

本书贯穿很多实例，用以阐述根据理论所发展出来的技术在实际中的应用。在每章后面有大量难度各异的习题以及上机习题，上机习题通常使用 MATLAB 仿真实现利用该章知识的相关算法。MATLAB 习题的答案在 www. pearsonhighered. com 网站提供。

致谢

我们希望感谢本书第 1 版和第 2 版的审阅者（密歇根州立大学的 Selin Aviyente，得克萨斯农工大学的 Costas Georghiades，马萨诸塞大学的 Dennis Goeckel，维拉诺瓦大学的 Bijan Mobasseri，圣何塞州立大学的 Robert Morelos-Zaragoza，弗吉尼亚理工学院的 Ahmad Safaai-Jazi，中佛罗里达大学的 Lei Wei，以及弗吉尼亚大学的 Stephen Wilson），感谢他们的评价和建议。他们的意见对本书各部分内容的提高有重要帮助。

John G. Proakis

加州大学圣地亚哥分校兼职教授，美国东北大学荣誉教授

Masoud Salehi

美国东北大学

目 录

第1章 引言

我们在每天的生活和工作中，都在使用和接触各种现代通信系统和通信媒介，最常用的是电话、广播和电视。通过这些媒介，我们几乎能够即时地与世界各地的人们通信，处理日常商务，获取世界各地各种事态进展和值得关注事件的信息。电子邮件和传真使我们能够快速完成远距离的文字消息传递。

你能否想象没有电话、广播和电视的世界？然而，当你思考这个问题的时候，大多数的现代通信系统都是在20世纪发明的。我们在此简要回顾一下过去200年在现代通信系统技术发展史上占有重要位置的主要技术。

1.1 历史回顾

电报与电话。通信最早的重要发明之一是亚力山德罗·伏特(Alessandro Volta)在1799年发明的电池。这项发明使塞缪尔·莫尔斯(Samuel Morse)在1837年发明电报(telegraph)成为可能。第一条电报线连接了华盛顿(Washington)与巴尔的摩(Baltimore)，于1844年5月投入运营。莫尔斯设计了如表1-1所示的变长二进制码，其中英文字母表中的每个字母采用一串点("·")和画("—")的组合(码字)表示。在这个码中，频繁出现的字母用短码表示，不经常出现的字母用较长的码字表示。

表 1-1 莫尔斯码

A	·—	N	—·
B	—···	O	———
C	—·—·	P	·——·
D	—··	Q	——·—
E	·	R	·—·
F	··—·	S	···
G	——·	T	—
H	····	U	··—
I	··	V	···—
J	·———	W	·——
K	—·—	X	—··—
L	·—··	Y	—·——
M	——	Z	——··

a）字母

1	·————
2	··———
3	···——
4	····—
5	·····
6	—····
7	——···
8	———··
9	————·
0	—————

b）数字

句号（.）	·—·—·—	等待符（AS）	·—···
逗号（,）	——··——	双划线（破折号）	—···—
问号（?）	··——··	错误符号	········
引号（"）	·—··—·	斜线（/）	—··—·
冒号（:）	———···	消息结束（AR）	·—·—·
分号（;）	—·—·—·	传输结束（SK）	···—·—
括号（）	—·——·—		

c）标点符号及特殊字符

莫尔斯码(Morse code)是变长信源编码方法的先驱，这种编码方法将在第 12 章介绍。值得注意的是，莫尔斯发明的最早的电子通信形式——电报，是一种二进制的数字通信系统，在此系统中采用两种符号将英文字母有效地编码成可变长码字。

将近 40 年后，1875 年埃米尔·博多(Emile Baudot)设计了一种定长的二进制编码，每个码字的长度为 5。在博多码(Baudot code)中，二进制码元长度相等，并且采用传号和空号表示。

电报通信中的一个重要的里程碑是 1858 年美国和欧洲之间首条跨大西洋电缆的敷设。这条电缆在运营 4 周后失效。几年后敷设了第二条电缆，并于 1866 年 7 月投入运营。

1~2

随着 19 世纪 70 年代电话的发明，电话学(telephony)出现了。亚历山大·格拉汉姆·贝尔(Alexander Graham Bell)在 1876 年申请了电话发明专利，于 1877 年成立了贝尔电话公司。早期的电话系统相对简单，只能在几百英里内提供服务。二十世纪的前二十年，炭精送话器和感应线圈的发明使得电话服务的质量和范围有了巨大飞跃。

1906 年，李·德富雷斯特(Lee DeForst)发明了三极管放大器，使得电话通信系统中的引入信号放大成为可能，从而使电话信号的传输范围明显扩大。例如，1915 年，横跨美国大陆的长途电话开始运营。

两次世界大战和 20 世纪 30 年代的经济大萧条阻碍了跨大西洋电话业务的开展。直到 1953 年第一条跨大西洋电缆敷设后，美国与欧洲之间的越洋电话才投入应用。

自动交换系统的出现是电话学的另一个重要进展。1897 年史瑞乔(Strowger)设计实现的第一个自动交换机是一种机电式步进制交换机，这种交换机使用了几十年。随着晶体管的发明，电子(数字)交换技术的成本大大下降。贝尔电话公司经过几年的开发研制，于 1960 年 6 月研发第一台数字交换机，并在伊利诺伊投入使用。

在过去的 50 年，电话通信技术有很多重要进展。光缆迅速取代电话通信中使用的铜线，电子交换机也取代了机电式交换机。

无线通信。无线通信的发展需要从奥斯特(Oersted)、法拉第(Faraday)、高斯(Gauss)、麦克斯韦(Maxwell)以及赫兹(Herz)的工作说起。1820 年，奥斯特证明了电流产生磁场。1831 年 8 月 29 日，迈克尔·法拉第(Michael Faraday)演示了在一个导体附近移动一个磁体可以产生感应电流，后来，他进一步证明了变化的磁场产生电场。以这些早期工作为背景，麦克斯韦在 1864 年预言了电磁辐射的存在，并且建立了相关的基础理论，这一理论已被运用了一个多世纪。1887 年赫兹验证了麦克斯韦的理论。

1894 年，奥利弗·洛奇(Oliver Lodge)为了能在英国牛津演示 150 码距离范围的无线通信，发明了一种能够灵敏地检测出无线信号的器件，洛奇称之为检波器(coherer)。古列尔莫·马可尼(Guglielmo Marconi)被视为无线电波的发明者。1895 年，马可尼演示了 2 公里距离的无线信号传输。两年后，他申请了无线电波系统的专利，并且建立了无线电报与信号公司。1901 年 12 月 12 日，马可尼在纽芬兰(Newfoundland)的信号山(Signal Hill)收到了从 1700 英里之外的英国康威尔(Cornwell)市发来的无线信号。

真空管的发明对无线通信系统的发展有着特别重要的作用。1904 年弗莱明(Fleming)发明了真空二极管放大器，1906 年德富雷斯特发明了真空三极管放大器。在 20 世纪早期，三极管的发明使得无线广播成为可能。1920 年，匹兹堡(Pittsburgh)的 KDKA 无线广播电台提供 AM(调幅，amplitude modulation)无线广播服务。从此，AM 广播在美国和世界范围迅速普及。我们今天所熟知的超外差调幅无线接收机(superheterodyne AM radio receiver)是埃德温·阿姆斯特朗(Edwin Armstrong)在第一次世界大战期间发明的。无线通信另一个重要进展是同样由阿姆斯特朗发明的 FM(frequency modulation，调频)技术。

3

1933 年，阿姆斯特朗建立并展示了第一个 FM 通信系统。不过 FM 的应用相比 AM 的广

播的发展慢得多，直到二次世界大战后期才得到重视和商用。

1929 年，美国的佐利金(V. K. Zworykin)建立并演示了第一个电视系统。1936 年英国广播公司(BBC)在伦敦开始了商用电视广播。五年后，联邦通信委员会(FCC)批准了美国电视广播运营。

过去 60 年。过去 60 年通信服务取得了显著发展。重大成就包括沃尔特·布拉顿(Walter Brattain)，约翰·巴丁(John Bardeen)，和威廉姆肖克利(William Shockley)1947 年发明的晶体管；杰克·基尔比(Jack Kilby)和罗伯特·诺伊斯(Robert Noyce)1958 年发明的集成电路；汤斯(Townes)和肖洛(Schawlow)1958 年发明的激光。这些发明使得需要的小尺寸、低功率、轻量且高速的电子电路的开发成为可能。这些电路后来被广泛用于卫星通信系统、宽带微博无线系统、蜂窝通信系统以及利用光缆的光波通信系统中。1962 年发射了一颗名为 Telstar I 的卫星，专用于在欧洲与美国之间进行电视信号的中继传输。1965 年，随着一颗名为 Early Bird 卫星的发射，商用卫星通信服务开展起来。

目前，大多数的有线通信系统都被光缆所取代，能够提供极高的带宽，传输包括声音、数据和视频在内的多种信息源的信号。蜂窝无线通信系统可以为乘坐轿车、公交车或者火车的人提供电话服务。高速通信网络可以将世界范围内的计算机及各种外围设备联系起来。

今天，我们见证了包括语音、数据和视频传输等个人通信服务的开展，卫星和光纤网络也可以提供高速全球范围的通信服务，现代通信时代的曙光已经到来！

在过去一个世纪中，关于无线电和电信发展的文献很多，我们主要引用了 McMahon 所著的《The Making of a Profession—A Century of Electrical Engineering In America》(IEEE Press，1984)，Ryder 和 Fink 的著作《Engineers and Electronics》(IEEE Press，1984)，以及 S. Millman 主编的《A History of Engineering and Science in the Bell System——Communication Sciences(1925－1980)》(AT&T Bell Laboratories，1984)。

1.2 电气通信系统的组成

电气通信系统的作用，是将信源产生的消息或信息发送到一个或多个目的地。一般来讲，一个通信系统可以表示成图 1-1 所示的功能框图。信源产生的信息可以是声音(语音源)、图像(图像源)或者某种语言的文本，比如，英语、日语、德语或者法语。任一产生信息的信源，都有一个本质特征，即它的输出是以概率来描述的。也就是说，信源是不确定的，否则就没有传输这个消息的必要性。

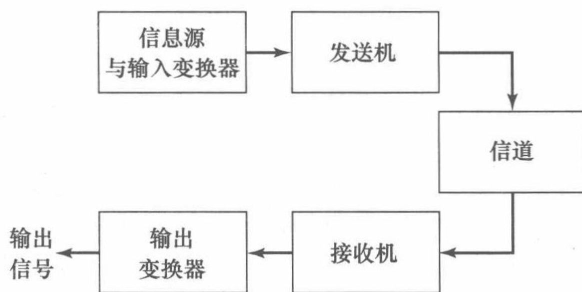


图 1-1 通信系统的功能框图

4

变换器通常是将信源的输出转换成为一种电信号，以便进行传输。例如，话筒作为变换器，可以将声波形式的话音信号转换成电信号，摄像机则可以将图像转换为电信号。在信宿方需要一个相似的变换器，将电信号还原为适合用户的形式，比如声波信号或者图像。

通信系统的核心是由 3 个部分组成，即发送机、信道和接收机。下面介绍这 3 个基本组成部分的功能。

发送机。发送机将电信号转换为适于在物理信道或者传输介质中传输的形式。例如，在无线广播和电视广播中，联邦通信委员会(FCC)规定了每个发射台所使用的频率范围。因此，发送机就必须将输出的信息信号转换到适当的频率范围，以匹配发射台允许使用的

频率。这样，不同的电台所发送的信号彼此就不会相互干扰。电话通信系统也有相似的功能，这样不同用户的语音电信号才可以在同一线路中同时传输。

一般来讲，发送机通过一个名为调制的过程实现消息信号与信道的匹配。通常，调制指利用信息信号系统地改变一个正弦载波的幅度、频率或相位。例如，AM 无线电广播中，信息信号就是通过正弦载波信号的幅度变化来承载的，载波的频率就是分配给电台的频段的中心频率。这就是一个*幅度调制*(amplitude modulation)的例子。在 FM 无线电广播中，以正弦载波的频率变化来承载的信息信号，这就是一个*频率调制*(frequency modulation)的例子。*相位调制*(phase modulation，PM)是将信息信号反映在正弦载波上的第三种调制方法。

5

如上所述，包括 AM、FM 和 PM 在内的载波调制是在发送机中完成的，将信息信号转换成匹配信道特征的信号形式的过程。因此，通过调制的过程，信息信号被变换到信道所分配的频段上。调制方式的选择依赖几个因素：如所分配的带宽、信号在信道传输中所遇到的噪声和干扰类型、传输之前放大信号所使用的电子器件等。总之，调制过程可以使得多个用户的不同消息在同一个物理信道中传输。

除了调制以外，在发送机中实现的其他功能还包括信息承载信号的过滤、已调信号的放大，以及无线传输条件下利用发射天线完成的信号辐射等。

信道。通信信道是一种物理媒介，用以将信号从发送机传输到接收机。在无线传输中，信道通常是大气层(自由空间)。电话信道则可以采用多种物理介质，包括电缆、光缆和无线(微波)。无论信号传输采用哪种物理介质，都会受到各种因素的随机性的损伤。最常见的信号降质来源于接收机前端信号放大器产生的加性噪声，这种噪声称为*热噪声*。无线通信中，加性噪声来源于接收机天线收到的人为噪声和大气噪声。例如，汽车点火噪声就是一种人为噪声，雷电释放的电光则是一种大气噪声。信道中其他用户产生的干扰属于另一种形式的加性噪声，这种噪声在有线和无线信道中都经常出现。

在一些无线通信信道中，例如用于长距离短波无线传输的电离层信道，多径传播导致另一种形式的信号降质。这种信号失真是非线性的，导致信号幅度随时间变化，一般称为衰落。对这一现象将在 1.3 节详细描述。

加性和非加性信号失真通常都被刻画为随机现象，采用统计特征描述。在通信系统的设计中，必须考虑这些信号失真的影响。

在设计通信系统时，一般采用能够刻画物理信道上的信号失真的统计特性的数学模型。通常，数学模型中采用的统计特性，是通过在信道上进行的传输实验而实际测量获得的经验值。这种情况下，需对数学模型需要进行物理修正。另一方面，在某些通信系统的设计中，信道的统计特性可能随时间显著变化。这时，设计者需要设计一种能够抵抗各种信号失真的通信系统，以对信号失真具有鲁棒性(robust)。通过使系统参数能够适应信号失真而自动调整，就可以实现这种系统。

6

接收机。接收机的作用就是恢复接收信号中所包含的消息信号。如果消息信号是采用载波调制进行传输，接收机就要实现*载波解调*，从正弦载波中提取消息。由于接收信号中存在加性噪声和其他可能的信号干扰，信号解调是在有失真的情况下进行的，解调后的消息信号一般会有某种程度的失真。我们将会在后面的分析中看到，接收消息信号的保真度是调制方式和加性噪声强度的函数。

除了进行信号解调，接收机还实现很多外围的功能，包括信号滤波和噪声抑制。

1.2.1 数字通信系统

现在我们已经描述了一个广义的电通信系统，隐含的假设条件是消息信号是连续时变波形。我们将这种连续时变信号波形称为*模拟信号*，相应地将产生这种信号的信号源称为

模拟信源。模拟信号可以经载波调制直接在通信信道中传输，在接收机进行相应的解调。我们将这样的通信系统称为模拟通信系统。

另一方面，模拟信源输出也可以转换为数字形式，然后经过数字调制和接收机的解调实现传输。采用数字调制传输模拟信号具有一些潜在的优势，最重要的一点是数字传输相比模拟传输有更好的信号保真度。具体来说，采用数字传输，在长距离传输中可以进行数字信号再生，在每个再生点可以消除噪声累积的影响。相反，在模拟传输的长距离传输中，因为每隔一定距离需要引入放大器来放大信号，因而叠加到信号中的噪声也被放大并逐次累积。对模拟信号采用数字传输的另一个原因是模拟信号可能是高度冗余的，通过数字处理，可以在调制之前消除冗余，从而压缩信道带宽。第三个可能的原因就是数字通信系统的实现成本较低。

在某些应用中，需要传输的信息本身就是数字的，比如英文文本内容和计算机数据。这种情况下，产生这种数据的信源就称为离散(数字)信源。

在数字通信系统中，发送机和接收机的功能还必须包括发送机中模拟信号的离散化和接收机的消息信号的合成或内插。附加的功能还包括消除冗余以及信道编码和译码。

图 1-2 给出了数字通信系统的功能框图和基本组成。信源输出可以是模拟信号(例如音频或视频信号)，也可以是数字信号(例如计算机的输出)，这种信号在时间上离散，且输出符号有限。在数字通信系统中，信源产生的消息通常转换为二进制数字序列。理想的目标是用尽可能少的二进制符号表示信源输出(消息)。也就是，希望找到一种有效的信源输出的表示方式，能够没有或者几乎没有冗余。将模拟或者数字信源的输出转换成二进制序列的过程称为信源编码或数据压缩。我们将在第 12 章描述信源编码方法。

7

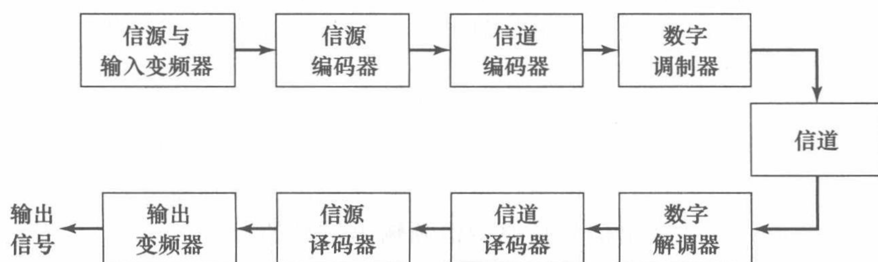


图 1-2 数字通信系统基本组成

信源编码器输出的二进制数字序列，称为信息序列，被进一步送入信道编码器中。信道编码器的作用是，以受控的方式在二进制信息序列中引入某种冗余，使接收机可以克服信道传输中噪声和信道干扰对信号造成的失真影响。这种引入的冗余能够提高接收数据的可靠性，改善信号的保真度。实际上，信息序列中的冗余还有助于接收机对信息序列的正确译码。例如，对于二进制信息序列的一种(平凡)编码方案就是将每个二进制比特重复 m 次，其中 m 是正整数。(复杂一些的编码方案是将每 k 个信息比特的序列映射成一个唯一的 n 比特的序列，称为码字。)在这种编码过程中引入的冗余量以比值 n/k 表示，其倒数，即 k/n，称为码字效率或者简称码率。信道编码将在第 13 章介绍。

信道编码器输出的二进制序列输入到数字调制器中，后者充当了与通信信道的接口。实际上几乎所有的通信信道都能够传输电信号(波形)，因此，数字调制器的主要功能就是将二进制信息序列映射成信号波形。为了说明这一点，假设编码后的信息序列以 R bit/s 的速率逐个比特匀速传输，数字调制器可以将二进制的 0 比特映射为波形 $s_0(t)$，将二进制的 1 比特映射为波形 $s_1(t)$。这种方式下，信道编码器输出的每个比特可以分别传输，称为二进制调制。此外，数字调制也可以将每 k 个编码比特的序列映射为一个信号波形，一共采用 $M=2^k$ 种不同的波形 $s_i(t)$，$i=0$，1，…，$M-1$。这种数字调制称为 M 进制调制

8

($M>2$)。注意，每 k/R 秒一个新的 k 比特序列输入到调制器中，因此，给定信道比特速率 R，传输 k 比特序列所对应的 M 种信号波形中的任何一个，需要的时间是二进制调制系统中信号波形周期的 k 倍。

在数字通信系统的接收端，数字解调器对信道损伤后的传输波形进行处理，将每个波形映射成信号编号，代表传输数据符号(二进制或 M 进制)的估计。例如，采用二进制调制时，解调器对接收到的波形进行处理，判定发送比特是 1 还是 0。此情况下，称解调器进行了二元判决或者硬判决。此外，解调器还可以进行三元判决，即依据接收信号的质量，判定发送比特是 1 或 0，或不进行判决。当对某个比特不做判决时，称解调器在解调数据中插入一个删除(erasure)。利用发送数据中的冗余度，译码器可尝试在删除发生的位置填入符号。将解调器所执行的判决处理视为一种量化，则二元判决和三元判决实际上就是解调器采用 Q 个电平的特例，其中 $Q\geqslant 2$。一般而言，如果数字通信系统采用 M 进制调制，其中 M 表示 M 个可能的发送符号(symbol)㊀，每个符号对应 $k=\log_2 M$ 个比特，则解调器进行 Q 电平判决，其中 $Q\geqslant M$。在极端的情况下不进行量化，则 $Q=\infty$。

如果发送信息中没有冗余，解调器必须要判定给定时间间隔内收到的波形是 M 个波形中的哪一个。相应地 $Q=M$，并且由于发送信息中无冗余，解码器之后未使用离散信道译码器。另一方面，如果发送机采用了离散信道编码器引入了冗余，每 k/R 秒将一个解调器的 Q 元输出信号送入译码器，译码器根据发送端编码器的编码方案和接收数据中的冗余，重建原始信息序列。

对于解调器和译码器性能的一个度量就是译码序列中错误发生的频度。准确地讲，译码器输出的每比特平均错误概率是对解调器-译码器组合的性能度量。一般而言，影响错误概率的因素包括码字特征、信道传输信息所采用的波形类型、发送功率、信道特征即噪声程度以及调制解调方法。

这些因素及其对性能的影响将在第 8 章到第 10 章介绍。

最后一步，当需要模拟输出时，信源译码器从信道译码器收到的输出序列，根据信源编码方案，重建信源的原始信号。由于信道译码错误和信源编码器以及信源译码器中可能引入的失真，信源译码器的输出信号是原始信源输出信号的近似。原始信号与重建信号之间的差值或者差值的函数，就是数字通信系统失真的一种度量。

9

1.2.2 早期的数字通信

尽管莫尔斯被公认为是最早的电子数字通信系统(电报)的发明者，但奈奎斯特(Nyquist，1924)对如何确定有限带宽电话信道上实现无码间干扰传输的最大信号速率这一问题的研究，被公认为现代数字通信的奠基者。奈奎斯特提出了一个电报系统的模型，其中传输信号为

$$s(t)=\sum_n a_n g(t-nT)$$

其中，$g(t)$表示基本的脉冲波形，$\{a_n\}$表示取值为$\{\pm 1\}$的二元数据序列，发送速率为$1/T$比特/秒。奈奎斯特着手研究带宽限制在 W 赫兹且最大脉冲速率为 $1/T$ 的最佳脉冲波形，在脉冲抽样时间 k/T，$k=0$，$\pm l$，± 2，…时不引起符号之间的干扰(码间干扰)问题。其结论是最大脉冲速率 $1/T$ 等于 $2W$ 脉冲/秒，此速率称为奈奎斯特速率。通过使用脉冲 $g(t)=(\sin 2\pi Wt)/2\pi Wt$ 就可以达到这个速率。此脉冲可在抽样瞬间实现无码间干扰的数据恢复。奈奎斯特的结论与后来由香农(Shannon，1948)精确阐述的限带信号的抽样定理等价。抽样定理指出，带宽为 W 的信号以 $2W$ 样值每秒的奈奎斯特速率抽样，得到的样

㊀ 本书中有时也根据习惯将该词译为“码元”。——译者注

值可以重构恢复，重构内插公式为

$$s(t)=\sum_{n}s\left(\frac{n}{2W}\right)\frac{\sin 2\pi W(t-n/2W)}{2\pi W(t-n/2W)}$$

受奈奎斯特研究的启发，哈特莱(Hatley，1928)研究了使用多振幅电平时，在带宽受限信道中可靠传输的数据量。由于噪声和其他干扰的存在，哈特莱假定接收机能以某种准确度(如A_{δ})可靠地估计出信号的振幅。其研究结论是，当最大信号幅度限制在$A_{\max}$(固定功率容限)且幅度分辨率为A_{δ}时，在限带信道上存在一个可以保证可靠通信的最大数据速率。

通信技术发展的另一个重大进展是维纳(Wiener，1942)的研究工作，即加性噪声存在的条件下，如何通过分析接收信号$r(t)=s(t)+n(t)$估计有用信号$s(t)$。这个问题源于信号解调。维纳给出了实现有用信号$s(t)$的最佳均方逼近的线性滤波器设计方法，这种滤波器称为最佳线性滤波器。

哈特莱和奈奎斯特关于数字信息最大传送速率的研究结果，成为香农研究工作(1948a，b)的先导。香农建立起信息论的数学基础，并推导出关于数字通信系统的基本限制。在香农的研究中，采用信源和通信信道的概率模型，从统计意义上严格表述了可靠通信的基本问题，并在此基础上，引入信源信息量的对数测度。香农还证明了发送器的功率容限、带宽容限及加性噪声的影响都可以与信道相联系，并且合并成一个参数，称为信道容量。例如，在加性白(谱平坦)高斯噪声干扰的情况下，带宽为W的理想带宽受限信道的容量C为 [10]

$$C=W\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right)\text{比特/秒}$$

其中P是平均发射功率，N_0是加性噪声的功率谱密度。信道容量的意义是：如果信源的信息速率R小于$C(R<C)$，理论上可以采用适当编码实现信号在信道上的可靠传输；另一方面，如果$R>C$，无论发送机和接收机如何处理信号，都不可能实现可靠传输。因此香农建立了信息传输的基本限制，并且开辟了一个新的研究领域——信息论。

起初香农的研究成果并未对数字通信系统的设计和开发产生很大的影响。一部分原因是，20世纪50年代对数字信息传输的需求较少。另一个原因是，要实现香农理论所预言的高效率、高可靠性数字传输，对数字硬件的要求非常复杂，由此也会导致高昂的成本。

数字通信领域另一个重要的贡献是科捷利尼科夫(Kotelinkov，1947)的研究成果，他为各种数字通信系统提供了基于几何空间的相干分析方法。科捷利尼科夫的方法后来由沃曾克拉夫特和雅各布(Wozencraft，Jacobs，1965)进一步拓展。

近四十年来数据通信需求量不断增长，集成电路技术也持续发展，推动了高效率、高可靠性数字通信系统的发展。在此进程中，香农的基础研究结果，以及在信道最大传输能力限制、可实现性能界限方面的研究成果，已成为各种通信系统设计的基准。香农以及其他信息论研究者给出的这些理论极限，成为数字通信系统开发和设计中努力追求的终极目标。

紧随香农工作之后的重要贡献是汉明(Hamming，1950)的研究工作，即采用检错编码和纠错编码抵抗信道噪声的有害影响。随后的几年里，汉明的工作激发了大量研究者的兴趣，提出了很多新的功能强大的编码方法，其中许多方法至今仍在现代通信系统中广为使用。 [11]

1.3 通信信道及其特征

正如前面讨论的，通信信道提供了发送机与接收机的连接通道。物理信道可以是一对承载电信号的电线，也可以是通过已调光束承载信息的光纤，或者是以声波形式传播信号的水下越洋信道，再或者是载荷信息信号的通过天线辐射的自由空间。其他可以称为通信信道的媒介还包括数据存储介质，例如磁带、磁盘和光盘等。

在任何信道上进行信号传送的一个常见问题是加性噪声。一般情况下，加性噪声产生

于系统内部的器件，例如实现系统的电阻和固态器件等。这类噪声也称为热噪声。其他的噪声和干扰源可能是系统外部产生的，如来自信道上其他用户的干扰。如果这种噪声和干扰与所需信号占据了同一波段，可以通过对发送信号和接收端的解调器进行适当的设计而使其影响最小化。信道传输中可能遇到的其他类型的信号失真，还包括信号衰减、振幅和相位失真以及多径失真等。

噪声的影响可以通过增大发送信号的功率使其最小化。但是，设备及其他实际约束限制了发送信号的功率水平。另一个基本限制是可用信道带宽。带宽的限制源于实现发送机和接收机的介质和电子元器件的物理极限。这两种限制导致了任意通信信道上可以可靠传输的数据量受限。

下面，我们将介绍几种通信信道的重要特征。

有线信道。电话网络主要采用有线信道传输话音信号，以及数据和视频信号。双绞线和同轴电缆是主要的有向信道，能提供相对较高的带宽。连接用户与中心交换局的电话线路一般具有几百千赫的带宽，而同轴电缆则有几兆赫的带宽。图 1-3 给出了包括波导和光纤在内的有向电磁信道的频率范围。

信号在这样的信道上传输，振幅和相位都会产生失真，并且会受到加性噪声的进一步损伤。双绞线信道还会受到来自物理邻近信道上的串音干扰。由于大部分的国内及国际日常通信业务由有线信道承载，人们对其传输特性及如何减少信号传输中出现的幅度和相位失真进行了大量的研究。在第 10 章中将描述最佳传输信号及其解调的设计方法，以及用于补偿幅度和相位失真的信道均衡器的设计方法。

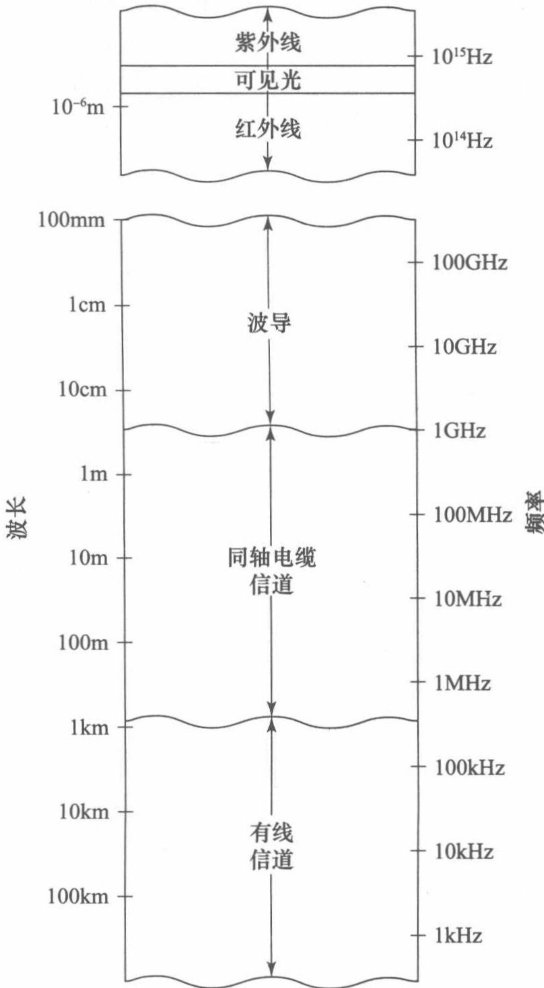


图 1-3 有向有线信道的频率范围

光纤信道。光纤为通信系统的设计者提供的带宽，相比同轴电缆信道高出好几个数量级。在过去的十年间，研究者开发出了具有低信号衰耗和高可靠性的光纤光缆，使信号生成和信号检测也得到了发展。这些技术上的进步，使得光纤信道在本地电信系统和跨洋通信中得到迅速部署。由于光纤信道具有高的带宽，电话公司可以为用户提供包括语音、数据、传真和视频信号的各种电信服务。

12 ~ 13

光纤通信系统中的发送器或调制器产生的是光源，可以是发光二极管(LED)或激光。信息的发送是通过改变(调制)消息信号光源强度而实现的。光信号在光缆中以光波形式传播，并沿着传播通道周期性地放大(在数字传输时，由转发器实现信号检测和再生)，以补偿信号衰耗。在接收端，光电二极管检测光强度，其输出电信号的变化与加到光电二极管上的光功率成正比。可以预见在今后的几年里，光纤信道将替代电话网络中几乎所有的有线信道。

无线电磁信道。在无线通信系统中，电磁能量通过作为辐射器的天线耦合到传播介质

中。天线的物理长度和配置决定了其工作频率。要实现电磁能量的有效辐射，天线的长度必须超过波长的1/10。相应地，如果一个无线电台工作在AM频带，频率为1MHz(对应的波长为$\lambda=c/f_c=300$米)，要求天线长度至少为30米。

图1-4描述了电磁频谱的各种频带。电磁波在大气层及自由空间中的传播模式可以分成3类，即地波传播、天波传播和视线(Line-Of-Sight，LOS)传播。在甚低频VLF和极低频ELF频段，波长超过10公里，地球和电离层充当了电磁波传播的波导。在这些频段，通信信号实际上沿着地球表面传播。因此，这些频带主要用于为世界各地的船只提供海岸到舰船的导航辅助。在这些频带上的可用信道带宽一般都很小(通常只有中心频率的1%～10%)，因此通过这些信道传输的信息速率较低，并且通常只限于数字信号传输。这些频率上的噪声主要来自地球上的雷暴雨，尤其是在热带地区。而干扰则来自频带上的其他用户。

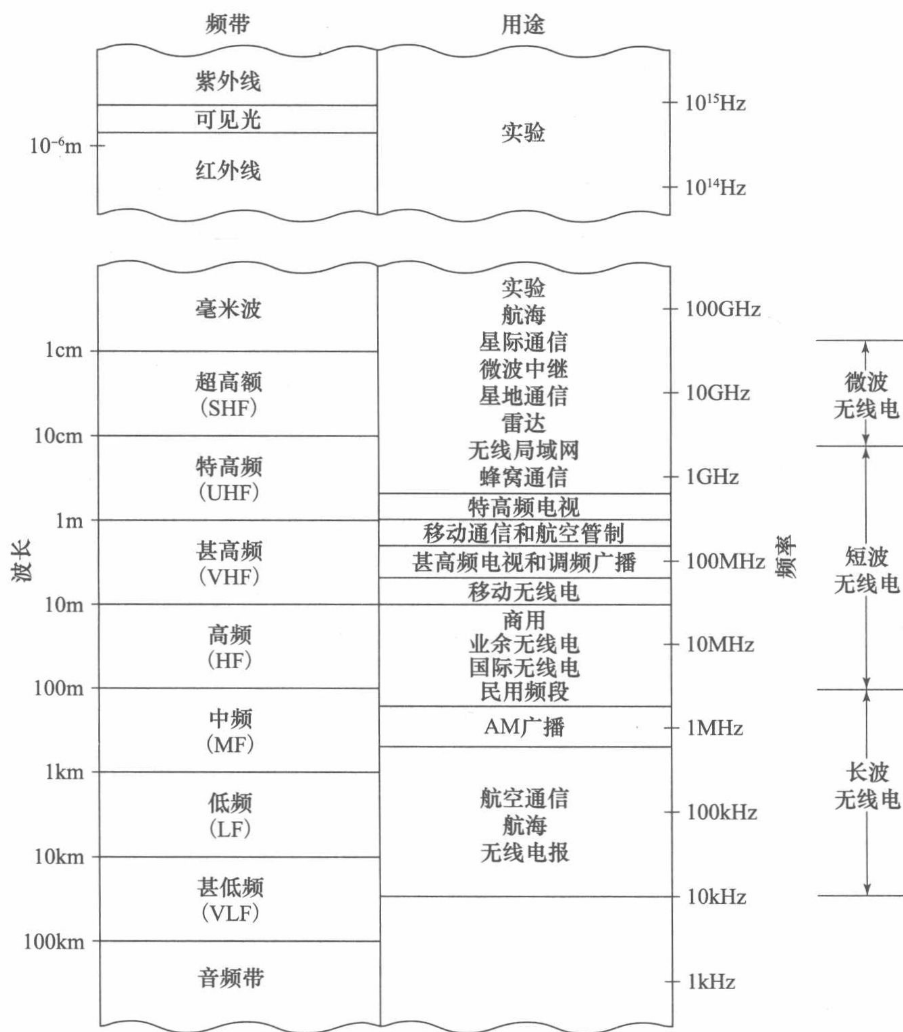


图1-4 无线电磁信道的频率范围

地波传播如图1-5所示，它是中频(MF)频带(0.3～3MHz)的主要传播方式。此频带用于AM广播及海事(maritime)通信。在AM广播中，即使功率很强的无线电台，其地波传播的范围也仅限于100英里左右。MF信号传输中主要的干扰包括大气噪声、人为噪声、电子器件产生的热噪声。

如图1-6所示，天波传播方式中，信号传播是靠电离层的反射(弯曲或折射)。在地球

表面 30 到 250 英里高空的多个充电粒子层构成电离层。白天由于太阳照射的加热作用，形成高度低于 75 英里的较低气层。这些较低的气层，尤其是 D 层，会吸收低于 2MHz 的频率，因此就严重限制了 AM 无线电广播的天波传播。不过到了夜间，电离层较低层的电子密度急剧下降，于是白天发生的频率吸收现象显著降低，因此大功率的 AM 无线电台，就可以通过在地球表面 90 至 250 英里的电离层 F 层，以天波传播方式进行远距离传播。

14~15

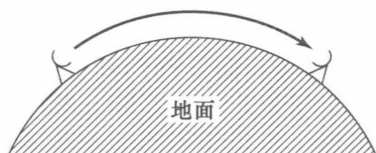


图 1-5 地波传播示意图

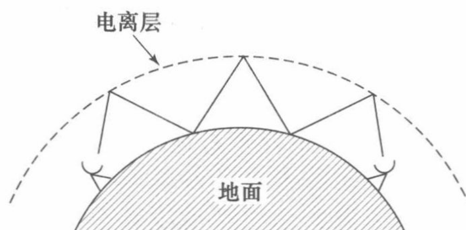


图 1-6 天波传播示意图

在高频(HF)频段通过天波传播电磁波的一个常见问题是信号多径。当信号通过多个传播途径以不同的时延到达接收机时就产生了信号多径。信号多径通常会导致数字通信系统中的码间干扰。而且，通过不同传播路径到达的信号分量会破坏性地叠加，导致信号衰落现象。大多数人在夜间收听远程电台广播时都体验过这种信号衰落，因为此时天波是主要的传播模式。高频 HF 频段的加性噪声是大气噪声和热噪声的组合。

当频率超过的 30MHz，即 HF 频段的尽头，天波电离层反射传播形式就不复存在。不过在 30～60MHz 的范围内，还可能存在电离层的散射传播，即信号在较低电离层的散射。在 40～300MHz 频率范围内，对流层散射传播也可以达到数百英里的通信距离。对流层散射指在高度 10 英里以下，由大气层中粒子引起的信号散射。一般而言，电离层散射和对流层散射会引起大量的信号传播损耗，因而需要大功率的发射机及极大尺寸的天线。

频率在 30MHz 以上的信号通过电离层传播所引起的信号衰耗相对较小，这使得卫星和宇宙通信成为可能。因而在超高频(VHF)及更高频段，主要的电波传播方式是视线(LOS)传播。对于陆地通信系统，这就要求发射机和接收机的天线必须在视线距离内，中间没有或者几乎没有障碍。正是因为这个原因，工作在 VHF 和 UHF 频段的电视台都会将天线架在高塔上，以获得足够大覆盖范围。

一般而言，LOS 传播的覆盖范围常受到地球表面曲度的影响。如果发射天线架在距地球表面高度 h 英尺高，假设没有高山之类的物理障碍，则天线设备间的水平距离约为 $d=\sqrt{2h}$英里。例如，架设在 100 英尺高塔上的电视天线覆盖范围约为 50 英里。用于电话和视频传输的微波无线中继系统，工作频率在 1GHz 以上，其天线也要集设在高塔或高大建筑物的顶端。

16

在 10GHz 以上的 SHF 频段，气候条件是影响信号传播的主要因素。例如大雨会引起极大的传播损耗，甚至导致服务中断(整个通信系统中断)。例如，对于 10GHz 信号，大雨导致的信号损耗约为 0.3dB/km；在 30GHz，衰耗约为 2dB/km；在 100GHz，衰耗约为 5dB/km。

在毫米波段以上频率，有红外线和可见光区段的电磁频谱，可以用于在自由空间提供 LOS 光通信。至今为止，这些频段还只是用于实验性的通信系统，如卫星到卫星的通信连接。

水下声波信道。在过去的几十年间，海洋开发活动快速发展。伴随海洋开发的增长，出现了数据传输的需求。首先，通过置于水底的传感器收集数据并传输到水面，然后再进一步将数据通过卫星转发到数据收集中心。

电磁波在水下无法长距离传输，除非频率极低。但是以这种极低频率传输信号，需要大的高功率发射机，因费用之昂贵难以实用。电磁波在水中的损耗可以用*趋肤深度*(skin depth)表示，它是信号衰减到原来的 $1/e$ 倍时的传播距离。对于海水而言，趋肤深度为 $\delta=250/\sqrt{f}$，其中 f 的单位为 Hz，δ 的单位为米。例如，在 10kHz，趋肤深度为 2.5 米。相反，声波信号的传播距离则可达到数十甚至数百英里。

浅水声波信道具有多径信道的特性，因为信号会从海洋表面和海底两个路径反射。由于波的运动，信号多径成分经历了时变的传播时延，引起信号衰减。除此之外，还存在频率依赖性衰减，近似正比于信号频率的平方。

海洋声波噪声是由鱼、虾以及各种动物产生的，靠近港口的地方还有人为声波噪声。

尽管存在这些不利环境，仍有可能设计高效可靠的水下声波通信系统，进行长距离传输。

存储信道。信息存储和检索系统构成了日常数据处理活动的重要基础。磁带(包括数字音频磁带和视频磁带)，磁盘(用于存储大量的计算机数据)，光盘(用于存储计算机的数据、音乐、视频)都属于数据存储系统，具有通信信道的特性。在磁带、磁盘或光盘上储存数据的过程，等价于在电话信道或无线信道上发送信号的过程。而读出(readback)过程和恢复存储信息的信号处理，等价于在电话或无线通信系统接收端，为了恢复发送信息而执行的功能操作过程。

17

电子器件产生的加性噪声和相邻路径上产生的干扰，通常出现在存储信道的读出信号中。

可存储的数据量通常受到磁盘或磁带尺寸的限制，还受到磁头及读/写电子系统可实现的密度(每平方英寸存储的比特数)的限制。例如磁盘存储系统已经可以达到10^9比特每平方英寸的填充密度。磁盘或磁带的写入速度及读取速度，同样受到构成信息存储系统的机械及电子子系统的限制。

信道编码和调制，是一个设计良好的数字磁存储系统或光存储系统的基本要素。在读取过程中，信号被解调；而信道编码器引入的附加冗余，在信号读取时用于纠错。

1.4 通信信道的数学模型

设计一个通过物理信道传送信息的通信系统时，构造出一个能反映传输介质绝大多数重要性质的数学模型会便于我们对通信系统进行分析。在发送端的信道编码器和调制器，以及接收端的信道译码器和解调器的设计过程，都要用到信道数学模型。我们简单描述常用的 3 种信道模型，这些模型常用于刻画实际中常见的物理信道。

加性噪声信道。最简单的通信信道数学模型就是加性噪声信道，如图 1-7 所示。在此模型中，发送信号 $s(t)$受到加性随机噪声过程 $n(t)$的干扰。从物理意义上看，加性噪声过程可能来自通信系统接收端的电子元件和放大器等，也可能来自无线信号传送过程中遇到的干扰。

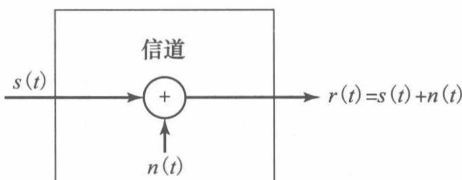


图 1-7 加性噪声信道

如果噪声主要来自通信系统接收端的电子元件和放大器，可以称为热噪声。这类噪声在统计意义上可以用高斯噪声过程表示。因此，这类噪声的数学模型称为*加性高斯噪声信道*。由于这种信道模型适用于多种物理通信信道，且数学上易于分析，因而成为通信系统分析和设计的主要信道模型。信道衰减很容易引入此模型。当信号在信道传输过程中经历衰减，接收到的信号可以表示为

18

$$r(t)=as(t)+n(t) \tag{1.4.1}$$

其中 a 表示衰减因子。

线性滤波器信道。在某些物理信道中，例如有线电话信道，会采用滤波器以确保发送信号不超出特定的带宽限制，从而避免信号之间相互干扰。在数字特性上，这是一种带有加性噪声的线性滤波器信道，如图 1-8 所示。如果信道的输入为信号 $s(t)$，则信道的输出信号为

$$r(t)=s(t)*h(t)+n(t)=\int_0^\infty h(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau+n(t) \tag{1.4.2}$$

其中，$h(t)$表示线性滤波器的冲激响应，$*$ 表示卷积。

线性时变滤波器信道。对传输信号产生时变多径传播的物理信道，例如水下声波信道和电离层无线信道，可以从数学上描述为时变线性滤波器。这类线性滤波器用时变信道冲激响应 $h(\tau;\ t)$刻画，这里 $h(\tau;\ t)$表示对于 $t-\tau$ 时刻的输入冲激信号，在 t 时刻的信道响应。这样，τ 表示"年龄"(持续时间)变量。有加性噪声的线性时变滤波器信道如图 1-9 所示。对于输入信号$s(t)$，信道输出信号为

$$r(t)=s(t)*h(\tau;t)+n(t)=\int_0^\infty h(\tau;t)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau+n(t) \tag{1.4.3}$$

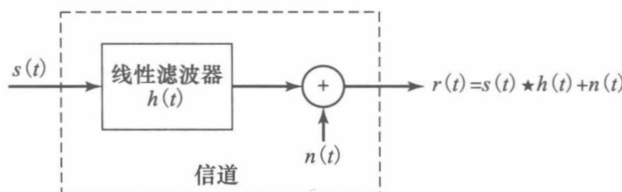


图 1-8 具有加性噪声的线性滤波器信道

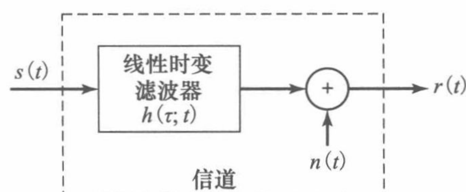


图 1-9 具有加性噪声的线性时变滤波器信道

考虑例如电离层(30MHz 以下频率)和移动蜂窝无线信道等多径信道中的信号传播。对于这些信道，一个好的时变冲激响应模型具有如下形式

$$h(\tau;t)=\sum_{k=1}^{L}a_k(t)\delta(\tau-\tau_k) \tag{1.4.4}$$

其中，$\{a_k(t)\}$表示 L 个多径传播路径的可能的时变衰耗因子。如果将式(1.4.4)带入式(1.4.3)接收信号可以表示如下

$$r(t)=\sum_{k=1}^{L}a_k(t)s(t-\tau_k)+n(t) \tag{1.4.5}$$

因此，接收信号由 L 个多径分量构成，每个分量的衰耗因子为$\{a_k\}$，时延为$\{\tau_k\}$。

上述 3 个数学模型能够描述实际中的大多数物理信道。本书将采用这三个信道模型进行通信系统的分析与设计。

1.5 小结与深入阅读

本章首先简要回顾了过去两个世纪中通信技术的发展，然后描述了模拟和数字通信系统的基本组成模块，并且介绍了 20 世纪前 60 年数字通信的主要进展。本章第二部分重点讨论了不同类型的有线信道和无线信道，包括在通信系统设计与性能分析中描述这些信道所采用的数学模型。

我们引用了几部 20 世纪出版的无线和电信历史著作。包括 McMahon(1984)、Ryder 和 Fink(1984)以及 Millman(1984)。此外，还引用了一些非常重要的经典文献，包括 Nyquist(1924)、Hartley(1928)、Kotelnikov(1947)，Shannon(1948)和 Hamming(1950)，这些论著是现代通信系统工程的奠基之作。

19
~
20

第2章

信号与线性系统

本章将复习信号与线性系统的基础理论，这些基本概念在建立各类通信系统模型时起着重要的基础性作用，很有学习的必要。尤其是信号，用于在通信信道上传输信息，这样的信号通常叫做载信息信号。例如语音信号、视频信号以及 ASCII 码终端机的输出信号都属于载信息信号。

当载信息信号通过通信信道进行传输时，信号的形状会因信道的影响而产生变化或者失真。换言之，由于受到信道失真等诸多因素的影响，信道的输出，即接收信号，不再是信道输入的完全复制。通信信道就是一个系统实例，是一个在输入信号的激励下产生输出信号的实体。大量通信信道都可以用一种叫做线性系统的系统子类模型来近似地表述。线性系统普遍存在于许多实际应用中，易于分析。

2.1 基本概念

本书谈及的通信信号通常为时间的函数，即时间是自变量。这类信号包括音频(语音、音乐)、视频和数据等，用 $s(t)$、$x(t)$或 $f(t)$等数学函数的形式表示。例如，语音信号的一个波形样本如图 2-1 所示。

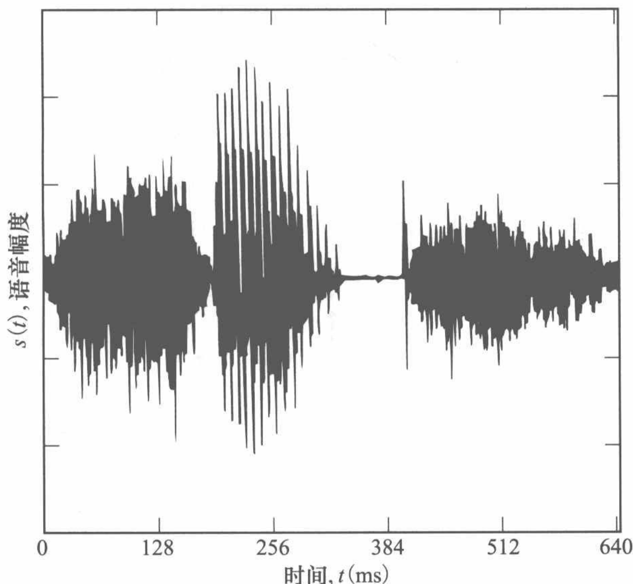


图 2-1 语音波形的一个样本

2.1.1 信号的基本运算

信号的基本运算包括时间平移、时间反转(翻转)以及时间展缩。本节介绍这些运算对信号的影响。

时间平移。信号 $x(t)$平移或者延迟给定常数时间量 t_0，变为信号 $x(t-t_0)$。如果 t_0取正值，则相当于延迟 t_0，即将原信号 $x(t)$向右平移 t_0；如果 t_0取负值，则相当于超前 $|t_0|$，即将原信号 $x(t)$向左平移 $|t_0|$。一个信号平移正值 t_0之后的波形如图 2-2 所示。

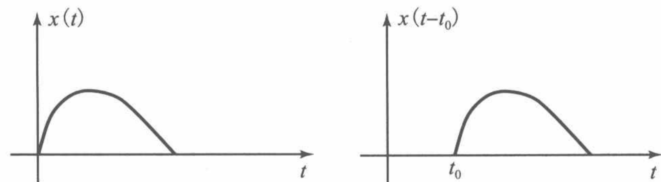


图 2-2 信号的时间平移

时间反转。信号的时间反转(或翻转)指的是信号沿纵轴进行翻转，或者参照纵轴建立信号的镜像。可以把这种信号的翻转看作是倒放一盘录音带，其结果是把正的时间映射为负的，反之亦然。信号 $x(t)$的时间反转用数学的形式表述为 $x(-t)$。反转运算如图 2-3 所示。

时间展缩。信号的时间展缩使得信号在时间进程中的时间单位发生了变化。这种变化既可以表现为原有信号的时间展宽(即新的时间单位是原时间单位的若干分之一)，也可以表现为原有信号的时间压缩(即新的时间单位是原时间单位的若干倍)。通常，将信号 $x(t)$的时间展缩表述为 $x(at)$，其中 $a>0$。如果 $a<1$，则为原有信号的时间展宽(好比将录音带以低于录制时的速度播放)。如果 $a>1$，则为原有信号的时间压缩(好比将录音带以高于录制时的速度播放)。$a>1$ 的情形如图 2-4 所示。

22

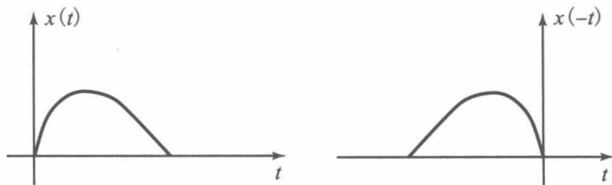


图 2-3 信号的时间反转

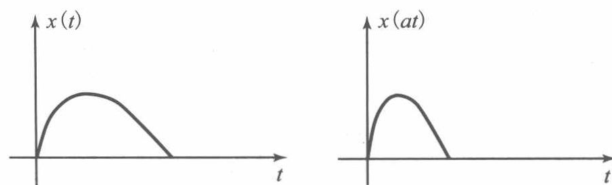


图 2-4 信号的时间展缩

通常可以综合运用这些运算。例如，$x(-2t)$就是时间信号翻转和压缩 2 倍的运算组合。同样，$x(2t-3)$等于 $x[2(t-1.5)]$，它相当于将时间信号压缩 2 倍后右平移 1.5(时间单位)。

2.1.2 信号的分类

将信号进行分类有助于降低学习难度。基于不同的出发点，信号的分类也有多种形式。本节介绍最重要的信号分类方法。

连续时间信号和离散时间信号。根据自变量的取值范围，可将信号分为两类：连续时间信号和离散时间信号。连续时间信号 $x(t)$的自变量 t 取实数值，而离散时间信号记作 $x[n]$，其自变量 n 取整数值。

可以将离散信号 $x[n]=x(nT_0)$定义为对连续时间信号 $x(t)$进行间隔为 T_0的等间隔抽样。图 2-5 给出了离散时间信号和连续时间信号的示例。

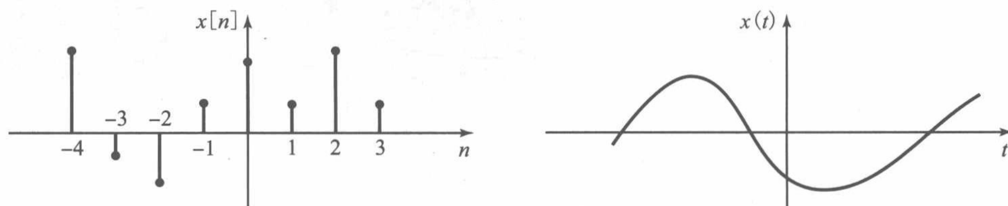


图 2-5 离散时间信号和连续时间信号的示例

例 2.1.1 设

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

23

这是一种叫做正弦信号的连续时间信号，信号波形如图 2-6 所示。

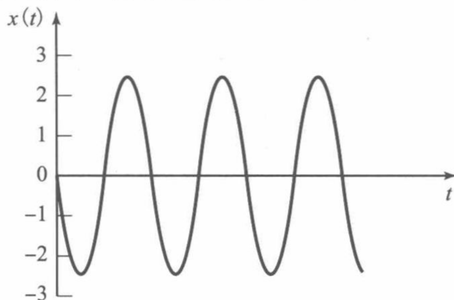


图 2-6 正弦信号

例 2.1.2 设

$$x[n]=A\cos(2\pi f_0 n+\theta)$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$（$\mathbf{Z}$ 为整数集），此离散信号的波形如图 2-7 所示。◀

实信号和复信号。 信号即函数，对于某给定的自变量，都有相应的函数值，该值可以是实数，也可以是复数。实信号在实数域中取值，即 $x(t)\in\mathbf{R}$；复信号在复数域中取值，即 $x(t)\in\mathbf{C}$。

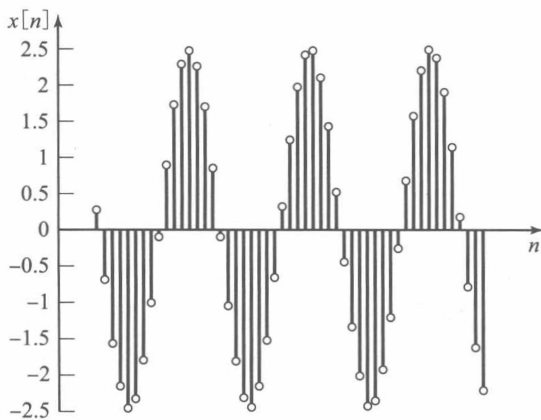


图 2-7　离散时间正弦信号

24

在通信领域，复信号一般用来刻画同时携带有幅度和相位信息的信号。与复数类似，一个复信号可以由两个实信号表示。这两个实信号可以是实部和虚部，也可以是绝对值（模或幅度）和相位。复信号的波形可用上述两种形式中的任何一种表示，但更为常见的是用幅度和相位图来表示复信号。

例 2.1.3 信号

$$x(t)=Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$$

是一个复信号，其实部为

$$x_r(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$$

其虚部为

$$x_i(t)=A\sin(2\pi f_0 t+\theta)$$

其中用到了欧拉（Euler）公式 $e^{j\phi}=\cos\phi+j\sin\phi$。当然，还可以将此信号等价地表述为模和相位的形式。$x(t)$的绝对值为

$$|x(t)|=\sqrt{x_r^2(t)+x_i^2(t)}=|A|$$

相位为

$$\angle x(t)=2\pi f_0 t+\theta$$

这些函数的图形如图 2-8 所示。◀

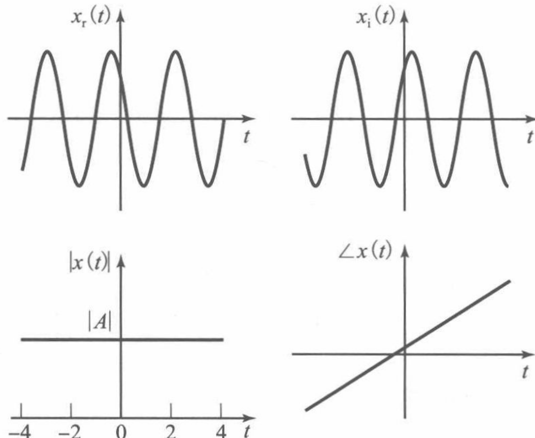


图 2-8　例 2.1.3 中的复指数信号的实部-虚部和幅度-相位图

任意复信号的实部和虚部，以及模和相位之间的关系表述如下：

$$x_r(t)=|x(t)|\cos[\angle x(t)] \tag{2.1.1}$$

$$x_i(t)=|x(t)|\sin[\angle x(t)] \tag{2.1.2}$$

$$|x(t)|=\sqrt{x_r^2(t)+x_i^2(t)} \tag{2.1.3}$$

$$\angle x(t)=\arctan\frac{x_i(t)}{x_r(t)} \tag{2.1.4}$$

25

确知信号和随机信号。 确知信号 $x(t)$在任意给定时刻 t 的取值都是确定的实数或复数，而随机信号在任意给定时刻 t 的取值是一个随机变量，即由某个概率密度函数定义。

前面列举的所有例子都是确知信号，随机信号将在第 5 章讨论。

周期信号和非周期信号。 周期信号是在时间上不断重复的信号。因此，在一个叫做周期的基础时间间隔内的波形变化就能决定整个信号。更为正式的定义是，一个信号 $x(t)$，对于所有时间 t，存在正实数 T_0（称为信号周期），满足

$$x(t+T_0)=x(t)$$

则为周期信号。至于离散时间周期信号 $x[n]$，对于所有整数 n，存在正整数 N_0（称为周期），满足

$$x[n+N_0]=x[n]$$

不满足上述周期性条件的信号即为非周期信号。

例 2.1.4 信号

$$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$$

和信号

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\theta)}$$

就是实周期信号和复周期信号的例子。两个信号的周期都是 $T_0=1/f_0$。图 2-9 所示信号

$$u_{-1}(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{2.1.5}$$

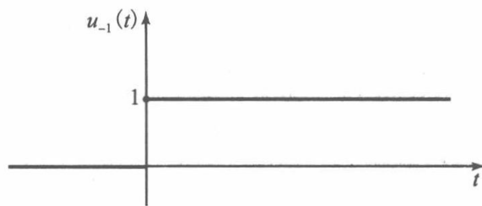


图 2-9 单位阶跃信号

26 则是非周期信号的一个示例。此即为众所周知的单位阶跃信号。◀

例 2.1.5 对于所有 f_0 的取值，图 2-7 所示离散时间正弦信号并非都是周期的。要使其成为周期信号，须对于所有整数 n，存在正整数 N_0 和整数 m，满足

$$2\pi f_0(n+N_0)+\theta=2\pi f_0 n+\theta+2m\pi \tag{2.1.6}$$

即

$$2\pi f_0 N_0=2\pi m$$

或

$$f_0=\frac{m}{N_0}$$

也就是说，只有当 f_0 为有理数时，离散时间正弦信号才是周期信号。例如，$A\cos(3\pi n+\theta)$ 是周期信号，而 $A\cos(\sqrt{2}\pi n+\theta)$ 不是周期信号。◀

因果信号和非因果信号。因果关系是系统分类中的一个重要概念，与系统的可实现性有着密切联系，在稍后介绍各种类型的系统时会谈及这个话题。接下来要定义的因果信号的概念与因果系统的概念密切相关。如果对于所有 $t<0$，都有 $x(t)=0$，则称信号 $x(t)$ 是因果信号，否则就是非因果信号。同样，如果离散时间信号在 $n<0$ 时取值为 0，也是因果信号。

例 2.1.6 信号

$$x(t)=\begin{cases}A\cos(2\pi f_0 t+\theta) & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

是因果信号，波形如图 2-10 所示。◀

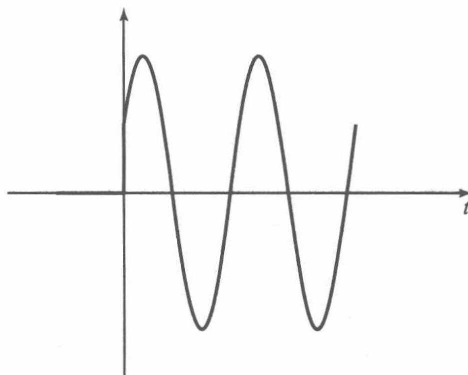


图 2-10 因果信号示例

类似地，可将因果信号的时间反转定义为反因果信号，其在 $t>0$ 时的取值都为零。

偶信号和奇信号。奇偶性是对信号各种对称类型的表述方式。如果一个信号 $x(t)$ 的波形关于纵轴对称，则为偶信号。如果一个信号 $x(t)$ 的波形关于

27 坐标原点对称，则为奇信号。

当且仅当对于所有 t，满足

$$x(-t)=x(t)$$

时，信号 $x(t)$ 为偶信号。当且仅当对于所有 t，满足

$$x(-t)=-x(t)$$

时，信号 $x(t)$ 为奇信号。

偶信号和奇信号的波形如图 2-11 所示。

通常，任意信号 $x(t)$ 都可以写成其偶对称部分和奇对称部分之和的形式：

$$x(t)=x_{\mathrm{e}}(t)+x_{\mathrm{o}}(t) \tag{2.1.7}$$

其中

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \tag{2.1.8}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \tag{2.1.9}$$

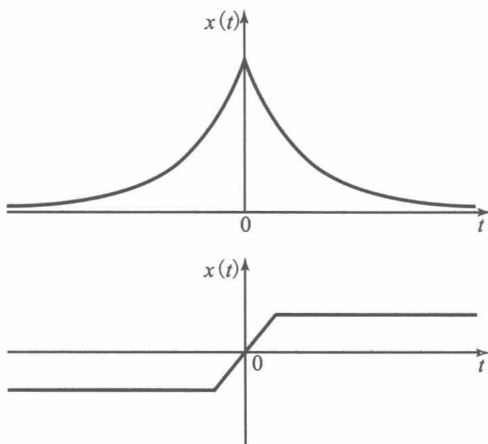


图 2-11　偶信号和奇信号示例

例 2.1.7　一般情况下，正弦信号 $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$既非偶信号，也非奇信号。然而，当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pm\pi/2$ 时，$x(t)$分别为偶信号和奇信号。通常，

$$x(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\cos(2\pi f_0 t) - \frac{A}{2}\sin(\theta)\sin(2\pi f_0 t)$$

由于 $\cos(2\pi f_0 t)$是偶信号，$\sin(2\pi f_0 t)$是奇信号，可得

$$x_e(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\cos(2\pi f_0 t)$$

和

$$x_o(t) = -\frac{A}{2}\sin(\theta)\sin(2\pi f_0 t)$$ ◀

例 2.1.8　由图 2-8 可知，当 $\theta=0$ 时得 $x(t)=Ae^{j2\pi f_0 t}$，其实部和模都是偶函数，而虚部和相位是奇函数。◀

复信号的埃尔米特对称。对于复信号，存在另外一种形式的对称定义，叫做埃尔米特(Hermitian)对称。一个复信号 $x(t)$，如果其实部是偶函数而虚部是奇函数，则叫做埃尔米特信号，而且容易证明其幅度为偶函数，其相位为奇函数。信号 $x(t)=Ae^{j2\pi f_0 t}$就是一个埃尔米特信号。

能量信号和功率信号。实际上，也可以根据信号的能量和功率进行分类，但在分类之前，需要先定义信号的能量和功率的概念。

对于任意信号 $x(t)$，其能量定义为㊀

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{2.1.10}$$

其功率定义为：

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{2.1.11}$$

对于实信号，$|x(t)|^2$可用 $x^2(t)$代替。

当且仅当信号 $x(t)$的能量$\mathscr{E}_x$为有限值时，称 $x(t)$为能量信号。当且仅当信号 $x(t)$的功率 P_x满足 $0<P_x<\infty$时，称 $x(t)$为功率信号。

28 ~ 29

例 2.1.9　求如下所示信号的能量：

$$x(t) = \begin{cases} 3 & |x| < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解：已知

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-3}^{3} 9\mathrm{d}t = 54$$

因此，该信号为能量信号。◀

例 2.1.10　信号 $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$的能量为

$$\mathscr{E}_x = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\cos^2(2\pi f_0 t+\theta)\mathrm{d}t = \infty$$

㊀ 如果用 $x(t)$表示加载在 1Ω 电阻上的电压，则通过该电阻的电流也为 $x(t)$，瞬时功率为 $x^2(t)$。由于能量是功率的积分，式(2.1.10)显然成立。

因此，该信号不是能量信号。然而，该信号的功率为

$$\begin{aligned}P_x &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A^2\cos^2(2\pi f_0 t+\theta)\mathrm{d}t\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{A^2}{2}[1+\cos(4\pi f_0 t+2\theta)]\mathrm{d}t\\&=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2T}{2T}+\left[\frac{A^2}{8\pi f_0 T}\sin(4\pi f_0 t+2\theta)\right]_{-T/2}^{T/2}\right\}\\&=\frac{A^2}{2}<\infty\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

因此，$x(t)$是一个功率信号，其功率为 $A^2/2$。◀

例 2.1.11 对于任何周期为 T_0的周期信号，其能量为

30

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_x &= \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{nT_0}{2}}^{\frac{nT_0}{2}}|x(t)|^2\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}n\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\infty\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

显然，周期信号通常不是能量信号。而任何周期信号的功率为

$$\begin{aligned}P_x &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT_0}\int_{-\frac{nT_0}{2}}^{\frac{nT_0}{2}}|x(t)|^2\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}|x(t)|^2\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

这意味着，周期信号的功率等于其一个周期内的平均功率。◀

2.1.3 一些重要信号及其性质

在学习通信系统的过程中，某些信号会频繁出现。本节简要介绍这些信号及它们的性质。

正弦信号。正弦信号定义为：

$$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$$

其中参数 A、f_0和 θ 分别表示正弦信号的幅度、频率和相位。正弦信号是周期为 $T_0=1/f_0$ 的周期信号，其波形如图 2-6 所示。

复指数信号。复指数信号定义为：

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\theta)}$$

同样，参数 A、f_0和 θ 分别表示该信号的幅度、频率和相位，其波形如图 2-8 所示。

单位阶跃信号。单位阶跃信号是另一种常见信号，2.1.2 节已经给出定义。任何信号乘以单位阶跃信号就会得到与该信号对应的因果信号。单位阶跃信号如图 2-9 所示，需要注意的是，对于任意 $a>0$ 有 $u_{-1}(at)=u_{-1}(t)$。

例 2.1.12 画出信号 $u_{-1}(t)+2u_{-1}(t-1)-u_{-1}(t-2)$的波形，注意该信号为单位阶跃信号的平移，其波形如图 2-12 所示。◀

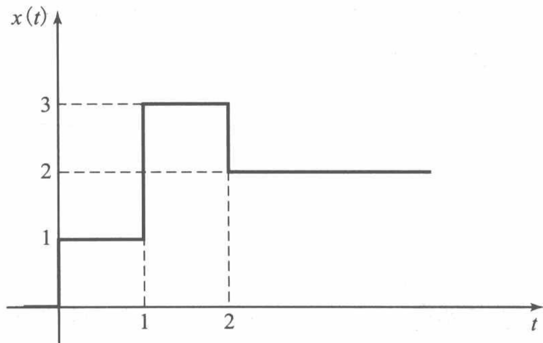


图 2-12 信号 u−1(t)+2u−1(t−1)−u−1(t−2)

矩形脉冲信号。矩形脉冲信号定义为：

31

$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.1.15}$$

其波形如图 2-13 所示。

例 2.1.13 画出信号 $2\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)-\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)$ 的波形，注意该信号是 $\Pi(t)$ 经过两种不同的时间平移和时间展缩运算所得结果之差，其波形如图 2-14 所示。◀

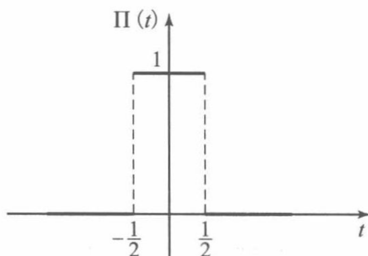


图 2-13　矩形脉冲信号

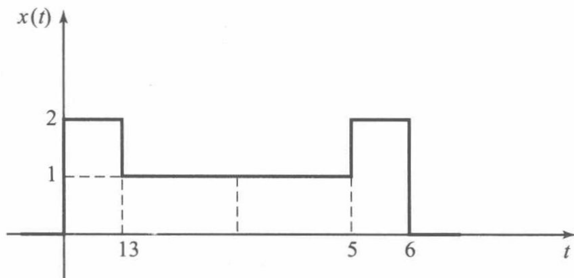


图 2-14　信号 $2\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)-\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)$

三角信号。三角信号定义为：

$$\Lambda(t)=\begin{cases}t+1 & -1\leqslant t\leqslant 0\\ -t+1 & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{2.1.16}$$

32

其波形如图 2-15 所示，不难验证[⊖]

$$\Lambda(t)=\Pi(t)*\Pi(t)\tag{2.1.17}$$

例 2.1.14 根据信号的时间展缩运算，画出信号 $\Pi(\frac{t}{4})+\Lambda(\frac{t}{2})$ 的波形，如图 2-16 所示。◀

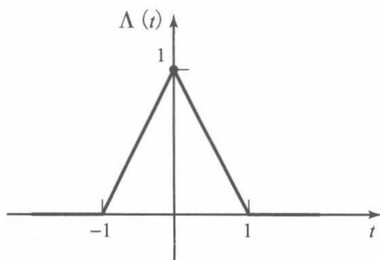


图 2-15　三角信号

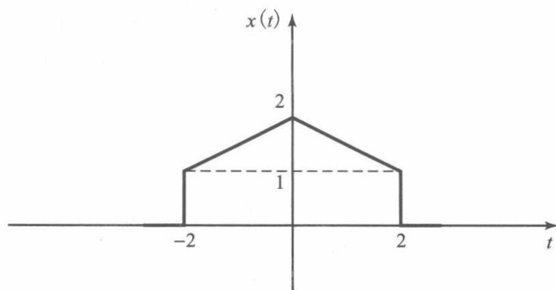


图 2-16　信号 $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)+\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$

取样信号。取样信号定义为：

$$\mathrm{sinc}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}\tag{2.1.18}$$

其波形如图 2-17 所示。从图中可以看出，取样信号在 $t=0$ 时取得最大值 1，在 $t=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 时值为 0。

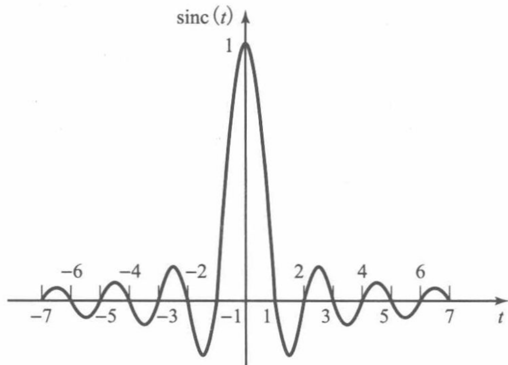


图 2-17　取样信号

33

符号信号或正负号信号。符号信号又称正负号信号，用于表示自变量 t 的符号，定义为：

⊖ $x(t)*y(t)$ 表示两个信号的卷积，卷积运算定义为

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=y(t)*x(t)$$

详见 2.1.5 节。

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\\ 0 & t=0\end{cases} \tag{2.1.19}$$

其波形如图 2-18 所示。若定义信号 $x_n(t)$如下：

$$x_n(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} & t>0\\ -\mathrm{e}^{\frac{t}{n}} & t<0\\ 0 & t=0\end{cases} \tag{2.1.20}$$

则正负号信号可以表示为 $x_n(t)$在 $n\to\infty$ 时的极限。后面将使用该定义研究其傅里叶变换。信号 $x_n(t)$的极限特性如图 2-18 所示。

34

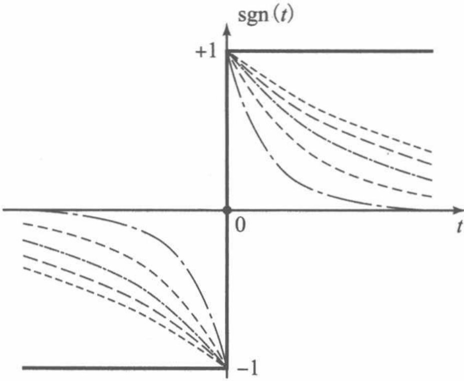


图 2-18 $x_n(t)$的极限——正负号信号

单位冲激信号或 δ 信号。 单位冲激信号是一种用于描述在极短时间内发生的物理现象的数学模型。由于时间间隔小到超出了测量仪器的分辨能力，一般可假设持续时间为零。诸如锤击、非常窄的电压或电流脉冲等都是这种现象的例子。用精确的数学语言来说，单位冲激信号 $\delta(t)$并非一个函数(或信号)——它是一个分布函数，或者说是一个广义函数。分布函数是根据其在积分运算下对另一个函数(通常叫做检验函数)的作用来定义的。冲激分布函数(或信号)可由下式定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=\phi(0) \tag{2.1.21}$$

若 $\phi(t)$在原点是连续的，上式即表明冲激分布函数对“检验函数”$\phi(t)$的作用。这一特性叫做冲激信号的筛选特性。换句话说，冲激信号在积分运算下对“检验函数”$\phi(t)$的作用是提取或筛选 $\phi(t)$在时间原点的取值。如上所述，定义 $\delta(t)$是根据其对 $\phi(t)$的作用，而非在不同时刻 t 的取值。

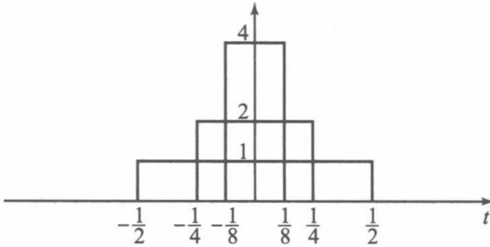
有时需要将 $\delta(t)$视为某些著名信号的极限，最常见的形式是

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \tag{2.1.22}$$

和

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \tag{2.1.23}$$

这些信号的波形如图 2-19 所示(符号 $\varepsilon\downarrow 0$ 表示 ε 从上方趋近于 0，即 ε 依然为正)。



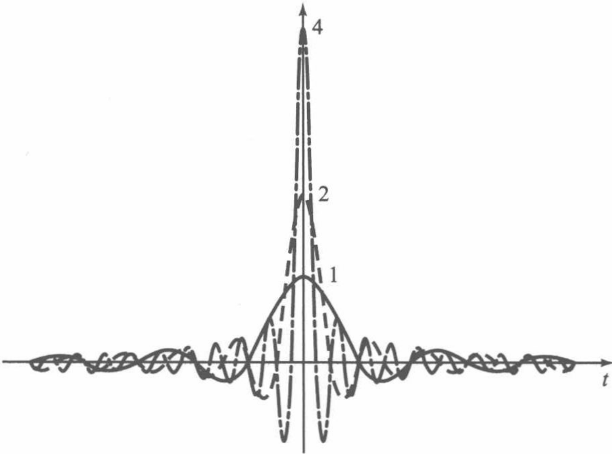


图 2-19 视为极限信号的冲激信号

由定义可知，单位冲激信号具有下列性质：

1. 当 $t\neq0$ 时 $\delta(t)=0$，而 $\delta(0)=\infty$。

2. $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$。

3. 对于任何在 t_0 时刻连续的 $\phi(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\phi(t_0) \tag{2.1.24}$$

4. 对于任何在 t_0 时刻连续的 $\phi(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t+t_0)\delta(t)\,\mathrm{d}t=\phi(t_0) \tag{2.1.25}$$

5. 当 $a\neq0$ 时，有

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{2.1.26}$$

35

6. 任何信号与冲激信号的卷积还是该信号本身：

$$x(t)*\delta(t)=x(t) \tag{2.1.27}$$

同样，

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0) \tag{2.1.28}$$

7. 单位阶跃信号是对单位冲激信号的积分，而单位冲激信号是单位阶跃信号的广义微分，即

$$u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.1.29}$$

和

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{-1}(t) \tag{2.1.30}$$

36

8. 与定义 $\delta(t)$ 的方法类似，可以通过下列等式定义 $\delta(t)$ 的广义微分 $\delta'(t)$，$\delta''(t)$，…，$\delta^{(n)}(t)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\phi(t)\right|_{t=0} \tag{2.1.31}$$

也可将此结论推广为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)\phi(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\phi(t)\right|_{t=t_0} \tag{2.1.32}$$

9. 任何信号 $x(t)$ 与单位冲激信号 n 阶导数的卷积等于 $x(t)$ 的 n 阶导数，即

$$x(t)*\delta^{(n)}(t)=x^{(n)}(t) \tag{2.1.33}$$

特别有

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t) \tag{2.1.34}$$

10. 任何信号 $x(t)$ 与单位阶跃信号的卷积等于 $x(t)$ 的积分，即

$$x(t)*u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.1.35}$$

11. 对于偶数 n，$\delta^{(n)}(t)$ 是偶信号；对于奇数 n，$\delta^{(n)}(t)$ 是奇信号。特别地，$\delta(t)$ 是偶信号，$\delta'(t)$ 是奇信号。

图 2-20 即为单位冲激信号的示意图，其中 $\delta(t)$ 在整个时域（$-\infty<t<\infty$）的积分为 1。

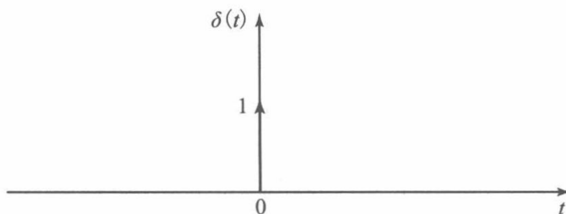


图 2-20　单位冲激信号

例 2.1.15 试求信号 $\cos(t)\delta(t)$，$\cos(t)\delta(2t-3)$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\delta'(t-1)\,\mathrm{d}t$。

解： 利用性质 2 得

$$\cos(t)\delta(t)=\cos(0)\delta(t)=\delta(t)$$

利用性质 5 得

37

$$\delta(2t-3)=\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

那么，根据性质 1，可得

$$\cos(t)\delta(2t-3)=\frac{1}{2}\cos(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)=\frac{\cos(1.5)}{2}\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\approx 0.035\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

最后，利用性质 8，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\delta'(t-1)\mathrm{d}t=(-1)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}\right|_{t=1}=\mathrm{e}^{-1}$$ ◀

2.1.4 系统的分类

从某种角度来说，系统是由各种元件和设备互连而成的一个整体。依据通信的观点，系统是受一种输入信号激励的实体，此激励的结果是令该实体产生一种输出信号。而在一个通信工程师看来，系统就是反映输入信号与输出信号之间关系的法则。例如，以电压源为输入信号且在某支路产生电流的电路可以看作是一个系统。定义系统时最为重要的一点是，对于任何合理的输入，系统的输出是唯一的。该定义的数学表述为：

$$y(t)=\mathscr{T}[x(t)] \tag{2.1.36}$$

其中 $x(t)$ 为输入信号，$y(t)$ 为输出信号，而 $\mathscr{T}$ 是系统施加的运算。图 2-21 给出了系统的示意图。

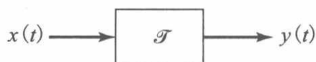


图 2-21 系统及其输入、输出

例 2.1.16 系统的输入-输出方程为 $y(t)=3x(t)+3x^2(t)$。对于任意输入信号 $x(t)$，都有唯一确定的 $y(t)$ 与之对应。 ◀

一个系统需由两个要素来定义：1)能够描述此系统的运算操作；2)合理的输入信号集合。本书用运算符 $\mathscr{T}$ 来表示系统的运算，用 $\mathscr{X}$ 表示系统合理的输入信号空间。

例 2.1.17 系统的输入-输出方程为

$$y(t)=\mathscr{T}[x(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \tag{2.1.37}$$

系统的输入信号空间 $\mathscr{X}$ 为所有可微信号，该系统称为微分器。 ◀

38

信号空间通常由系统运算定义，因此一般无须明确指出。

与信号的情形类似，也可以根据系统的性质对其进行分类。因此，系统的分类方法众多，这里简要介绍一些基本的类别。

离散时间系统和连续时间系统。系统是由运算定义的，输入信号在此运算下产生相应的输出。系统的输入和输出既可以是离散时间信号，也可以是连续时间信号，基于此可将系统分为离散时间系统和连续时间系统。

离散时间系统以离散时间信号作为输入，并输出离散时间信号。而连续时间系统的输入和输出都是连续时间信号。

例 2.1.18 前面介绍的两个系统都是连续时间系统。下面介绍一个离散时间系统

$$y[n]=x[n]-x[n-1] \tag{2.1.38}$$

此系统是一个离散时间微分器。 ◀

线性系统和非线性系统。满足叠加特性的系统称为线性系统，即系统对于输入为多个线性组合的信号的响应是对各信号单独输入的响应的线性组合。

当且仅当任意两个输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 以及任意两个标量 α 和 β，有

$$\mathscr{T}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha\mathscr{T}[x_1(t)]+\beta\mathscr{T}[x_2(t)] \tag{2.1.39}$$

则系统 $\mathscr{T}$ 是线性系统。如果系统不满足上述关系，则为非线性系统。

线性也可由下面两个性质来定义：

$$\begin{cases}\mathscr{T}[x_1(t)+x_2(t)]=\mathscr{T}[x_1(t)]+\mathscr{T}[x_2(t)]\\ \mathscr{T}[\alpha x(t)]=\alpha\mathscr{T}[x(t)]\end{cases} \tag{2.1.40}$$

第一个性质叫做可加性，第二个性质叫做齐次性。根据第二个性质，对于线性系统，显然有$\mathscr{T}[0]=0$。换言之，线性系统对于零输入的响应总为零(此为一个系统是线性系统的必要条件，而非充分条件)。

线性是非常重要的性质。对于线性系统，可以将输入信号分解为一些基本信号的线性组合，这些基本信号对应的输出信号往往易解，其线性组合即为总的输出信号。线性系统的运算通常用$\mathscr{L}$表示，而非$\mathscr{T}$。

例 2.1.19 前面介绍的微分器就是一个线性系统。这是因为，如果 $x_1(t)$和 $x_2(t)$可微，则对于任意 α 和 β，$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$一定可微，并且有

39

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha x'_1(t)+\beta x'_2(t)$$

系统

$$y(t)=ax^2(t)$$

是非线性系统。因为系统对于 $2x(t)$的响应为

$$\mathscr{T}[2x(t)]=4x^2(t)\neq 2x^2(t)=2\mathscr{T}[x(t)]$$

即系统不具备齐次性。◀

例 2.1.20 某延迟系统定义为 $y(t)=x(t-\Delta)$，即输出是输入的时间延迟(见图 2-22)。如果输入为 $x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，则系统响应显然为 $\alpha x_1(t-\Delta)+\beta x_2(t-\Delta)$。因此，该系统是线性系统。◀

时不变系统和时变系统。如果系统的输入-输出关系不随时间改变，则称此系统为时不变系统。这意味着输入信号的延迟会导致输出信号的延迟。



图 2-22　延迟系统中的输入-输出关系

当且仅当对于所有 $x(t)$和 t_0的所有取值，若某系统对于 $x(t)$的响应为 $y(t)$，而对于 $x(t-t_0)$的响应为 $y(t-t_0)$，该系统才是时不变系统(见图 2-23)。

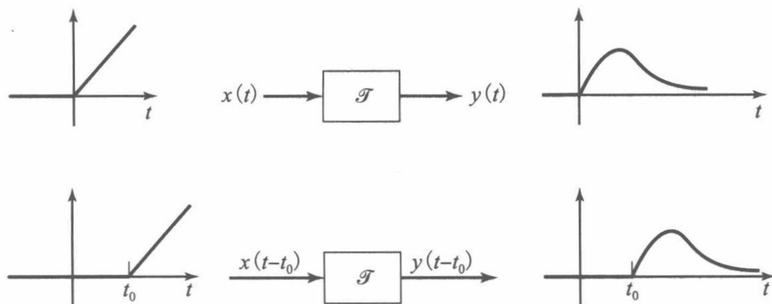


图 2-23　时不变系统

例 2.1.21 微分器是一个时不变系统，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t-t_0)=x'(t)\big|_{t=t-t_0}$$ ◀

例 2.1.22 调制器 $y(t)=x(t)\cos(2\pi f_0 t)$是一个时变系统。该系统对 $x(t-t_0)$的响应为

$$x(t-t_0)\cos(2\pi f_0 t)$$

并不等于 $y(t-t_0)$。◀

40

线性时不变(LTI)系统是一种极为重要的系统。此类系统对输入信号的响应可以通过计算输入信号与系统冲激响应的卷积而求得。2.1.5 节将详细讨论这一特性。

因果系统和非因果系统。因果性涉及系统的物理可实现性。任何物理系统都无法预知其输入信号在未来的取值，因此可以认定，一个物理可实现的系统在任何时间的输出仅取

决于当前时刻以及当前时刻之前的输入，而与输入信号在未来的取值无关。

如果系统在任意时刻 t_0 的输出取决于在时刻 t_0 及 t_0 之前的输入，即

$$y(t_0) = \mathscr{T}[x(t): t \leqslant t_0]$$

则称此系统为因果系统。

LTI 系统为因果系统的充分必要条件是，系统的冲激响应 $h(t)$（即如果输入为 $\delta(t)$ 时的系统输出，参见 2.1.5 节）必须是因果信号，即对于 $t<0$，须有 $h(t)=0$。至于非因果系统，其在时刻 t_0 的输出还要取决于 t_0 之后的输入。在无需对信号进行实时处理的场合常常要用到非因果系统[1]。

例 2.1.23 微分器就是一个因果系统，因为它是 LTI 系统，且其冲激响应 $h(t)=\delta'(t)$ 在 $t<0$ 时取值为零。调制器虽然是时变系统，却也是因果系统，因为 $y(t)=x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ 在时刻 t 的输出取决于输入在时刻 t 的取值，而非 $x(t)$ 在未来的取值。例 2.1.20 中定义的延迟系统在 $\Delta \geqslant 0$ 的条件下是因果系统，而当 $\Delta<0$ 时是非因果系统。这是因为其冲激响应 $\delta(t-\Delta)$ 在 $t<0$ 时的取值，当 $\Delta \geqslant 0$ 时为零，而当 $\Delta<0$ 时非零。◀

2.1.5 LTI 系统的时域分析

无论是在通信还是系统理论中，LTI 系统都扮演着重要角色。此类系统的输入—输出关系特别简单，可以用卷积的形式表示。为了进一步说明，首先介绍系统冲激响应的概念。

系统的冲激响应 $h(t)$ 是系统对输入为单位冲激信号 $\delta(t)$ 的响应

$$h(t) = \mathscr{T}[\delta(t)]$$

41

系统对于时刻 τ 的单位冲激，即 $\delta(t-\tau)$，的响应记作 $h(t, \tau)$。显然，若系统为时不变系统，则 $h(t, \tau)=h(t-\tau)$。[2]

卷积。现在来求解 LTI 系统对于任意输入 $x(t)$ 的输出 $y(t)$。下面要证明，输出 $y(t)$ 可以用输入 $x(t)$ 和系统的冲激响应 $h(t)$ 表示。

2.1.3 节已经指出，对于任意信号 $x(t)$，有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.1.41}$$

现在，若用 $y(t)$ 表示 LTI 系统对于输入 $x(t)$ 的响应，则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &\overset{\text{a}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \mathscr{L}[\delta(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{b}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

其中(a)依据的是系统的线性特性（积分本质就是极限求和），而(b)依据的是系统的时不变性质。上式表明系统对于输入 $x(t)$ 的响应是 $x(t)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积。因此，LTI 系统的冲激响应完全可以用来刻画该类系统的全部特性。这意味着冲激响应包含了能够描述系统行为的全部信息。

---

[1] 例如先将整个信号记录下来再进行处理，在此情形下，当处理 t_0 时刻的信号时，其实已经接触到了信号在 t_0 之后的取值。

[2] 注意，此处的表述并不严谨。符号 h 表示两个不同的函数：函数 $h(t, \tau)$ 有两个自变量；而函数 $h(t)$ 只有一个自变量。

例 2.1.24 系统

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.1.43}$$

称为积分器。因为积分运算是线性的，所以积分器是线性系统，其对于 $x(t-t_0)$ 的响应为：

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(u)\mathrm{d}u=y(t-t_0) \tag{2.1.44}$$

其中使用了变量代换 $u=\tau-t_0$。可见，此系统是 *LTI* 系统。若输入为单位冲激信号，可得系统的冲激响应为：

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u_{-1}(t)$$

◀　42

例 2.1.25 设某 LTI 系统的冲激响应为 $h(t)$。假设该系统的输入为复指数信号，即

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\theta)}$$

则系统对此输入的响应为：

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)}\mathrm{d}\tau=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0\tau}\mathrm{d}\tau\\&=A\left|H(f_0)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi f_0 t+\theta+\angle H(f_0)]}\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

其中

$$H(f_0)=\left|H(f_0)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle H(f_0)}=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.1.46}$$

这表明，LTI 系统对于频率为 f_0 的复指数信号的响应是与输入同频的复指数信号。响应的幅度是输入信号的幅度与 $|H(f_0)|$ 的乘积；响应的相位是在输入信号的相位上增加 $\angle H(f_0)$。注意，$H(f_0)$ 是冲激响应和输入信号频率的函数。基于此性质，复指数信号称为 LTI 系统的**特征函数**。一个系统的特征函数是一组输入信号的集合，系统对这些输入信号的响应只是这些信号的缩放。也正是基于此重要性质，LTI 系统对于复指数信号的响应就特别容易求解。因此，找到用复指数的形式表示任意信号的方法是非常必要的。稍后将探讨这些方法。◀

2.2　傅里叶级数

在通信系统中，有大量基础构件可以采用 LTI 系统模型来刻画。LTI 系统模型可以精确地适用于各种通信信道。发射机和接收机中的一些基本部件，诸如滤波器、放大器和均衡器，都是 LTI 系统。

显然，探求能够分析 LTI 系统的方法和工具成为当前的首要任务。要对一个系统进行分析，需要根据给定的输入确定其相应的输出，与此同时，还要能够了解系统的内部行为。已知 LTI 系统的输入和输出之间的关系可由卷积的形式表示

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2.1}$$

其中 $h(t)$ 表示系统的冲激响应。显然，卷积成为分析 LTI 系统的基本工具。然而，直接使用卷积来分析系统存在着重要缺陷。首先，用卷积运算来求解系统的响应可能过于直接，毕竟这种运算并不容易。其次，即便可以通过恰当的方式进行卷积运算，其结果也无助于了解系统响应其他输入信号时的内在特性。

43

接下来的两节将探讨分析 LTI 系统的另一种方法。这种方法的基本思想是：将输入信号展开成为一些基本信号(其对应的输出简单易求)的线性组合，然后利用系统的线性特性得到最终的系统输出。此方法比直接进行卷积运算要容易得多，同时有助于了解 LTI 系统的内在属性。该方法利用了以基本信号集的形式展开信号和在欧几里得空间中以单位向量的形式展开向量的相似性。

2.2.1　傅里叶级数及其性质

复指数信号集合中的元素都是 LTI 系统的特征函数。LTI 系统对于复指数信号的响应

是幅度和相位发生改变的同频复指数信号。例 2.1.25 表明，幅度和相位的变化是复指数信号的频率和 LTI 系统的冲激响应的函数。那么，哪种信号可以展开成为复指数信号呢？为了回答这个问题，不妨先给出周期信号可以按照复指数形式展开的条件，然后再讨论有关非周期信号的展开。

设信号 $x(t)$是周期为 T_0的周期信号。若信号 $x(t)$满足下列狄利克雷(Dirichlet)条件：

1. $x(t)$在其周期内绝对可积，即

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\,\mathrm{d}\tau < \infty$$

2. $x(t)$在每个周期内的最大和最小值的个数有限，
3. $x(t)$在每个周期内的非连续点的个数有限。

则 $x(t)$可展开成如下复指数信号的形式：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{2.2.2}$$

其中，对于任意 α，有

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}\,\mathrm{d}t \tag{2.2.3}$$

以下是与此定理有关的说明：

- 系数 x_n称为信号 $x(t)$的傅里叶(Fourier)级数系数。x_n通常为复数(即便 $x(t)$是实信号)。
- 积分限中的参数 α 可取任意值。可以为 α 选取恰当的值以简化积分运算，通常取 $\alpha=0$或 $\alpha=-T_0/2$。

44

- 狄利克雷条件只是 $x(t)$可以进行傅里叶级数展开的充分条件。对于一些不满足这些条件的信号，仍然可以进行傅里叶级数展开。
- $f_0=1/T_0$称为信号 $x(t)$的基频。显然，复指数信号的频率是基频的整数倍。f_0的 n 倍称为 n 次谐波。
- 它表明周期信号 $x(t)$可以用周期 T_0(或者基频 f_0)和复数序列$\{x_n\}$表示。因此，为了描述 $x(t)$，只需指定一组可列的复数。这就大大降低了描述 $x(t)$的复杂性，因为如果通过 t 的所有取值来定义 $x(t)$，就必须在一组不可列的点上指定 $x(t)$的值。
- 傅里叶级数展开可以用角频率 $\omega_0=2\pi f_0$的形式表示：

$$x_n = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega_0}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{2.2.4}$$

以及

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{2.2.5}$$

- 通常，$x_n=|x_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle x_n}$。因此，$|x_n|$是 n 次谐波的幅度，$\angle x_n$是 n 次谐波的相位。图 2-24 是信号 $x(t)$的各次谐波的幅度和相位图。这种图称为周期信号 $x(t)$的离散谱。

45

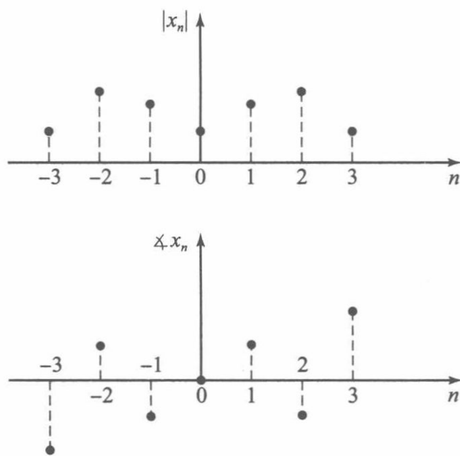


图 2-24 某信号 $x(t)$的离散谱

例 2.2.1 $x(t)$表示图 2-25 所示周期信号，其解析式如下：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right) \tag{2.2.6}$$

其中 τ 为正的常数(脉冲宽度)。求此信号的傅里叶级数展开。

解：首先，已知信号的周期为 T_0，且有

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{T_0}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{T_0}t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{-\mathrm{j}n2\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{T_0}\tau} - \mathrm{e}^{+\mathrm{j}n\frac{\pi}{T_0}\tau}\right] \quad n\neq 0 \\ &= \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) \quad n\neq 0 \\ &= \frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \quad n\neq 0 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

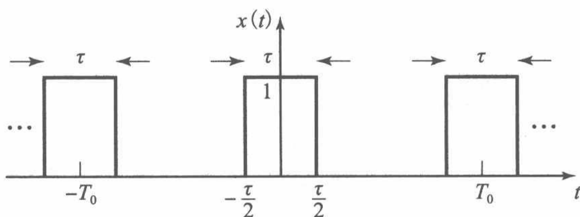


图 2-25 式(2.2.6)中的周期信号 $x(t)$

上式用到了公式 $\sin\phi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2\mathrm{j}}$。至于 $n=0$，积分运算十分简单，可得 $x_0=\tau/T_0$。因此有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{T_0}t} \tag{2.2.8}$$

此傅里叶级数系数如图 2-26 所示。 ◀

例 2.2.2 求如下式(及图 2-27)所示信号 $x(t)$ 的傅里叶级数展开

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Pi(t-n) \tag{2.2.9}$$

46

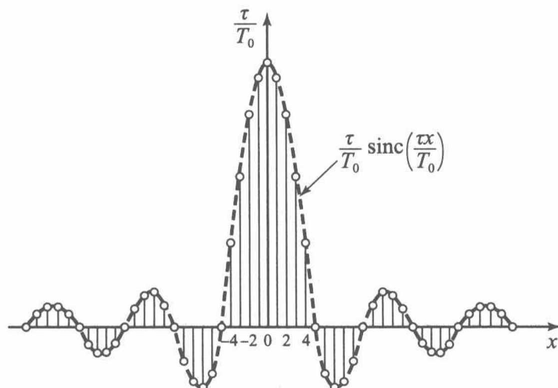


图 2-26 矩形脉冲序列的离散谱

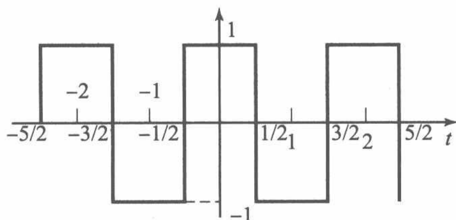


图 2-27 式(2.2.9)所示信号 $x(t)$

解：由于 $T_0=2$，不妨令 $\alpha=-1/2$。首先，对于 $n=0$，易得其积分结果为 0，因此 $x_0=0$。对于 $n\neq 0$，有

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\mathrm{j}2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}}\right] - \frac{1}{-\mathrm{j}2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{3\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n=4k+1 \\ -\frac{2}{n\pi} & n=4k+3 \\ 0 & n\ \text{为偶数} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

47

基于上述 x_n 的取值，可得 $x(t)$ 的傅里叶级数展开如下：

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{2}{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi t}) - \frac{2}{3\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi t}) + \frac{2}{5\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\pi t}) - \cdots \\ &= \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{4}{3\pi}\cos(3\pi t) + \frac{4}{5\pi}\cos(5\pi t) - \cdots\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\pi t] \tag{2.2.11}$$

◀

例 2.2.3 求如下式(及图 2-28)所示冲激序列的傅里叶级数展开。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{2.2.12}$$

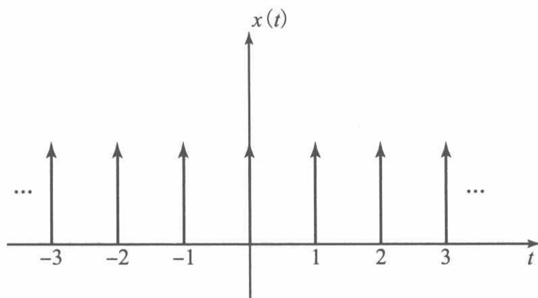


图 2-28 冲激序列

解：易得

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T_0}t} dt = \frac{1}{T_0} \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

由这些系数，可得如下展开式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{2.2.14}$$

48 此公式用处颇多，以后会经常见到。 ◀

正频率和负频率。 已知周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

其中包含基频 $1/T_0$ 的所有正、负整数倍的频率成分。正频率对应 $e^{j\omega t}$ 项(若 ω 取正值)，负频率对应 $e^{-j\omega t}$ 项。$e^{j\omega t}$ 项相当于一个相量以角频率 ω 按逆时针方向旋转，而 $e^{-j\omega t}$ 项相当于一个相量以相同的角频率按顺时针方向旋转。这两个相量如图 2-29 所示。

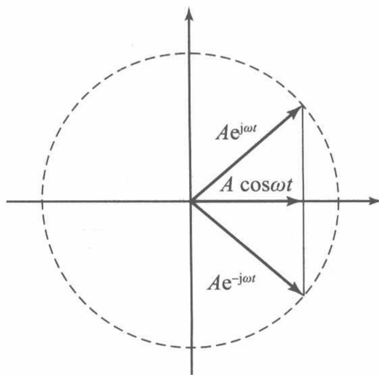


图 2-29 表示正频率和负频率的相量

注意，如果两个信号 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 叠加在一起，即为 $2\cos\omega t$，是个在 $\pm\frac{\omega}{2\pi}$ 处包含两种频率成分的实信号。读者很快就会了解到，此特性对于所有实信号都成立，即对于所有实信号，都可以分解成正负频率成对出现、幅度共轭的两部分。

实信号的傅里叶级数。 如果实信号 $x(t)$ 满足傅里叶级数定理，则一定存在另一种将信号展开的方法。对于实信号 $x(t)$，有

$$x_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt = \left[\frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt \right]^* = x_n^* \tag{2.2.15}$$

这表明实信号 $x(t)$ 的正负系数成共轭关系。因此，$|x_n|$ 关于 $n=0$ 呈偶对称($|x_n| =$ 49 $|x_{-n}|$)，$\angle x_n$ 关于 $n=0$ 呈奇对称($\angle x_n = -\angle x_{-n}$)。某实信号的离散谱如图 2-30 所示。

由 $x_{-n} = x_n^*$ 可知，如果设定

$$x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

则有

$$x_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

因此，对于 $n \geqslant 1$，有

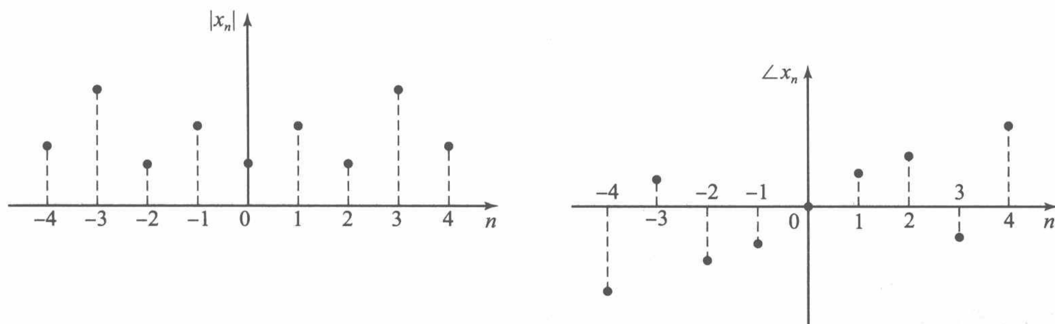


图 2-30　某实信号的离散谱

$$x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + x_{-n} e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

$$= a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$$

由于 x_0 是实数，且 $x_0 = a_0/2$，可得

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right] \tag{2.2.16}$$

上式只对实周期信号成立，叫做三角形式的傅里叶级数展开。为了求得 a_n 和 b_n，令

50

$$x_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt$$

因此

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt - \frac{j}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt$$

于是有

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \tag{2.2.17}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) dt \tag{2.2.18}$$

还有第三种将实信号进行傅里叶级数展开的方法。要知道，

$$x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} + x_{-n} e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} = 2|x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right) \tag{2.2.19}$$

将式(2.2.19)代入式(2.2.2)，可得

$$x(t) = x_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right) \tag{2.2.20}$$

总之，对于实周期信号 $x(t)$，已经有三种将其进行傅里叶级数展开的方法

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{2.2.21}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right) \right] \tag{2.2.22}$$

$$= x_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \angle x_n\right) \tag{2.2.23}$$

各自的系数可由下列各式求得

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \tag{2.2.24}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\cos\left(2\pi \frac{n}{T_0}t\right)\mathrm{d}t \tag{2.2.25}$$

51

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\sin\left(2\pi \frac{n}{T_0}t\right)\mathrm{d}t \tag{2.2.26}$$

$$|x_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.2.27}$$

$$\angle x_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.2.28}$$

例 2.2.4 求例 2.2.1 的正弦和余弦傅里叶级数系数。

解： 已知

$$x_n = \frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}$$

因此得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{n\tau}{T_0}\right) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} |x_n| = \left|\dfrac{2\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{n\tau}{T_0}\right)\right| \\ \angle x_n = 0 \text{ 或 } \pi \end{cases}$$

◀

偶信号和奇信号的傅里叶级数展开。 如果信号不仅是实信号，还是偶信号或者奇信号，则其傅里叶级数展开还可以进一步简化。对于偶信号 $x(t)$，有

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin\left(2\pi \frac{n}{T_0}t\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2.29}$$

这是因为 $x(t)\sin(2\pi \frac{n}{T_0}t)$ 是偶信号和奇信号的乘积，是一个奇信号，所以其积分为零。因此，偶信号的傅里叶级数展开仅含有余弦项，即

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(2\pi \frac{n}{T_0}t\right) \tag{2.2.30}$$

同理，由于 $x_n = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}$，可知偶信号的每个 x_n 都是实数(因 x_n 的符号不同，所有 x_n 的相位是 0 或 π)。

对于奇信号，利用相似的方法可得所有 a_n 为零；因此，奇信号的傅里叶级数展开中只包含正弦项，即每个 x_n 均为虚数。此时有

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(2\pi \frac{n}{T_0}t\right) \tag{2.2.31}$$

52

例 2.2.5 设 $T_0 = 2$，求如图 2-31 所示信号的傅里叶级数展开。

解： 当 $n=0$ 时，易得 $x_0 = 0$。当 $n \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi nt}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi nt}\mathrm{d}t\right] \end{aligned}$$

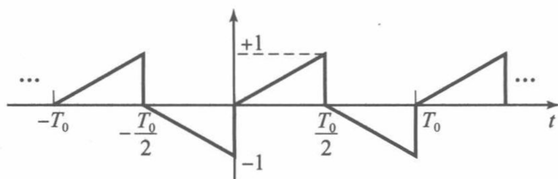


图 2-31　奇次谐波信号示例

利用公式

$$\int t\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}t\,\mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{\alpha t}$$

可得

$$\int t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{j}}{\pi n}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}$$

因此

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{\mathrm{j}}{2\pi n}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\Big]_{-1}^{0} - \frac{\mathrm{j}}{2\pi n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\Big]_{-1}^{0} + \frac{\mathrm{j}}{2\pi n}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\Big]_{0}^{1} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n t}\Big]_{0}^{1} \\ &= [\cos(\pi n) - 1]\left(\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{\mathrm{j}}{2\pi n}\right) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi^2 n^2} - \dfrac{\mathrm{j}}{\pi n} & n\text{ 为奇数} \\ 0 & n\text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

由于

$$x_n = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}$$

则有

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2 n^2} & n\text{ 为奇数} \\ 0 & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

和

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n} & n\text{ 为奇数} \\ 0 & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

53

则傅里叶级数展开为

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)\pi t - \frac{4}{\pi^2\ (2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi t\right]$$

显然，此信号只包含奇次谐波，其傅里叶级数展开式中没有出现偶次谐波。◀

2.2.2 LTI 系统对于周期信号的响应

通过前面的学习已经了解，LTI 系统对于复指数信号的响应是频率相同，但幅度和相位发生变化的复指数信号。特别地，若 $h(t)$是系统的冲激响应，则由例 2.1.25 可知，对复指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$的响应是 $H(f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$。其中

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

现假设 LTI 系统的输入信号 $x(t)$是周期为 T_0的周期信号，且其傅里叶级数表达式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\,\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t} \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

其中

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

由上式可以得出下列结论：

- 若 LTI 系统的输入是周期为 T_0的周期信号，则输出也是周期信号(思考一下，输出的周期是多少?)，且输出的傅里叶级数展开式为

54

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

其中

$$y_n=x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

这等价于

$$|y_n|=|x_n|\cdot\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$$

和

$$\angle y_n=\angle x_n+\angle H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

- 只有在输入信号中出现的频率分量才能在输出信号中出现。这意味着 LTI 系统不能在输出信号中引入不同于输入信号的新的频率分量。换言之，能够引入新的频率成分的系统是非线性和/或时变的。
- 幅度和相位的变化量 $\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$ 和 $\angle H\left(\frac{n}{T_0}\right)$ 是谐波次数 n 和系统冲激响应 $h(t)$ 的函数。函数

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \tag{2.2.33}$$

称为 LTI 系统的频率响应或频率特性。通常，$H(f)$ 是一个可由幅度 $|H(f)|$ 和相位 $\angle H(f)$ 表述的复函数。给定的周期性输入信号，函数 $H(f)$，或者等价的 $h(t)$ 包含求解 LTI 系统的输出所需的全部信息。

例 2.2.6 用 $x(t)$ 表示图 2-27 所示信号，但设定信号周期 $T_0=10^{-5}$ 秒。此信号通过一个频率响应如图 2-32 所示的滤波器，试求滤波器的输出。

解： 首先将输入进行傅里叶级数展开，易得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos[2\pi(2n+1)10^5 t]\\&=\frac{2}{\pi}e^{j2\pi 10^5 t}+\frac{2}{\pi}e^{-j2\pi 10^5 t}-\frac{2}{3\pi}e^{j6\pi 10^5 t}-\frac{2}{3\pi}e^{-j6\pi 10^5 t}\\&\quad+\frac{2}{5\pi}e^{j10\pi 10^5 t}+\frac{2}{5\pi}e^{-j10\pi 10^5 t}-\cdots\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

55

要想求得每个频率对应的输出，需将每个频率分量的系数乘以该频率对应的 $H(f)$ 值。因此有

$$\begin{aligned}H(10^5)&=1e^{j\frac{\pi}{2}}=e^{j\frac{\pi}{2}}\\H(-10^5)&=1e^{-j\frac{\pi}{2}}=e^{-j\frac{\pi}{2}}\\H(3\times10^5)&=3e^{j\frac{\pi}{2}}\\H(-3\times10^5)&=3e^{-j\frac{\pi}{2}}\\H(5\times10^5)&=5e^{j\frac{\pi}{2}}\\H(-5\times10^5)&=5e^{-j\frac{\pi}{2}}\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

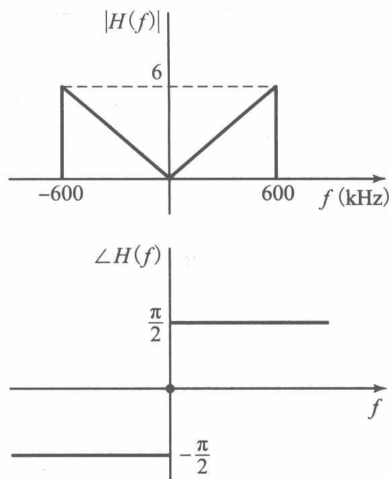


图 2-32 某滤波器的频率响应

对于更高的频率，$H(f)=0$。因此有

$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{2}{\pi}e^{j\left(2\pi10^5 t+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{2}{\pi}e^{j\left(-2\pi10^5 t-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{2}{\pi}e^{j\left(6\pi10^5 t+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{2}{\pi}e^{j\left(-6\pi10^5 t-\frac{\pi}{2}\right)}\\&+\frac{2}{\pi}e^{j\left(10\pi10^5 t+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{2}{\pi}e^{j\left(-10\pi10^5 t-\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

或等价于

$$y(t)=-\frac{4}{\pi}\sin(2\pi\,10^5 t)+\frac{4}{\pi}\sin(6\pi\,10^5 t)-\frac{4}{\pi}\sin(10\pi\,10^5 t) \tag{2.2.36}$$

◀

2.2.3 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔(Parseval)定理指出，周期信号的功率是该信号的傅里叶级数表达式中各项频率分量的功率之和。该定理是利用正交基，即复指数信号进行傅里叶级数展开的结果。 56

设周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数表达式为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

上式两边分别取共轭，得

$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

将两式相乘，可得

$$|x(t)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi\frac{n-m}{T_0}t}$$

上式两边在一个周期内积分，并利用

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^{j2\pi\frac{n-m}{T_0}t}dt=T_0\delta_{mn}=\begin{cases}T_0 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

因此有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0}|x(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^* T_0\delta_{mn}=T_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2 \tag{2.2.37}$$

或等价于

$$\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0}|x(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2 \tag{2.2.38}$$

这是帕塞瓦尔定理的正式表述。注意，根据式(2.1.14)，上式的左侧是信号 $x(t)$ 的功率 P_x，而 $|x_n|^2$ 是 n 次谐波 $x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}}$ 的功率。因此，帕塞瓦尔定理表明周期信号的功率等于其各次谐波功率之和。 57

如果将 $x_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$ 代入帕塞瓦尔定理，可得

$$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0}|x(t)|^2dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{2.2.39}$$

由于 $a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}\right)$ 和 $b_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}\right)$ 的功率分别为 $\frac{a_n^2}{2}$ 和 $\frac{b_n^2}{2}$，同样说明 $x(t)$ 的功率等于其各次谐波功率之和。

例 2.2.7 求例 2.2.6 中输入和输出信号的功率。

解： 易得

$$P_x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}1dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}1dt\right]=1$$

利用帕塞瓦尔定理也可得到相同的结果，即

$$P_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{2}=\frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots\right)$$

令上述两式相等，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

而输出信号的功率为

$$P_y = \frac{1}{2}\int_a^{a+2} |y(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\right] = \frac{24}{\pi^2}$$ ◀

2.3 傅里叶变换

2.3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

如前所述，利用傅里叶级数可以用复指数的形式表示周期信号。这种傅里叶级数的表示方法极大地降低了描述周期信号的难度。同时，这种复指数形式的级数表示对于分析 LTI 系统特别有用，这是因为复指数信号是 LTI 系统的特征函数。而任何周期信号都可以由傅里叶级数展开系数序列$\{x_n\}$和基频频率 f_0完全表示。

本节将介绍非周期信号的傅里叶级数表示方法。读者将会看到，非周期信号也可以按照复指数的形式展开。然而，展开的频谱不再是离散谱。换言之，非周期信号的频谱包含连续的频段。这就是下面要学习的著名的傅里叶变换。

首先，信号 $x(t)$必须满足如下狄利克雷条件：

1. $x(t)$在实轴上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

2. $x(t)$在实轴上任意有限间隔内的最大值和最小值的数量是有限的。

58

3. $x(t)$在实轴上任意有限间隔内的间断点的数量是有限的。

则 $x(t)$的傅里叶变换（或傅里叶积分）

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft} \mathrm{d}t \tag{2.3.1}$$

存在，且可以由傅里叶反变换

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft} \mathrm{d}f \tag{2.3.2}$$

恢复原信号。

关于傅里叶变换有如下说明：

- $X(f)$通常是复数函数，其幅度$|X(f)|$和相位$\angle X(f)$表示 $x(t)$中各频率分量的幅度和相位。函数 $X(f)$有时也指信号 $x(t)$的频谱[⊖]。
- 为了表明 $X(f)$是 $x(t)$的傅里叶变换，通常使用如下记号：
  $$X(f) = \mathscr{T}[x(t)]$$
  为了表明 $x(t)$是 $X(f)$的傅里叶反变换，则使用如下记号
  $$x(t) = \mathscr{T}^{-1}[X(f)]$$
  有时，两者之间的关系可以进一步简化为
  $$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$
- 如果傅里叶变换中的变量不是 f 而是 ω，则有
  $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$
  和
  $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega$$
- 傅里叶变换和傅里叶反变换的关系可以写成

⊖ 有时称 $X(f)$为电压谱，以区别于后面将要定义的功率谱。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\right]}^{X(f)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(t-\tau)}\mathrm{d}f\right]x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.3.3}$$

上式中最后一步变换了积分的顺序。另一方面，由于

59

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.3.4}$$

比较式(2.3.3)与式(2.3.4)，得

$$\delta(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(t-\tau)}\mathrm{d}f \tag{2.3.5}$$

或者

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \tag{2.3.6}$$

- 式(2.3.1)与式(2.2.3)类似，而式(2.3.2)与式(2.2.2)类似。不同之处在于式(2.2.2)中的求和被积分替代。

例 2.3.1 求由式(2.1.15)和图 2-33 所示信号 $\Pi(t)$的傅里叶变换。

解： 已知

$$\mathscr{T}[\Pi(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{-\mathrm{j}2\pi f}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f}]$$
$$=\frac{\sin\pi f}{\pi f}=\mathrm{sinc}(f) \tag{2.3.7}$$

因此

$$\mathscr{T}[\Pi(t)]=\mathrm{sinc}(f)$$

图 2-33 指明了信号 $\Pi(t)$与其傅里叶变换的关系。◀

60

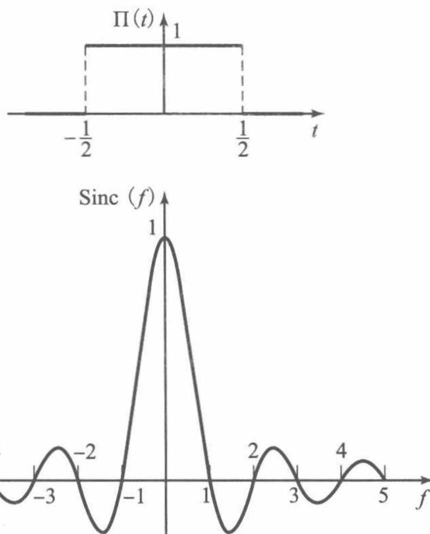


图 2-33　Π(t)及其傅里叶变换

例 2.3.2 求冲激信号 $x(t)=\delta(t)$的傅里叶变换。

解： 冲激信号的傅里叶变换可由下式求得

$$\mathscr{T}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=1 \tag{2.3.8}$$

其中利用了 $\delta(t)$的取样性质。上式表明，$\delta(t)$的频谱包含所有频率成分，且各频率成分的幅度为 1，相位为 0。冲激信号 $x(t)$及其傅里叶变换如图 2-34 所示。类似地，由公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f=1$$

可得

$$\mathscr{T}[1]=\delta(f)$$ ◀

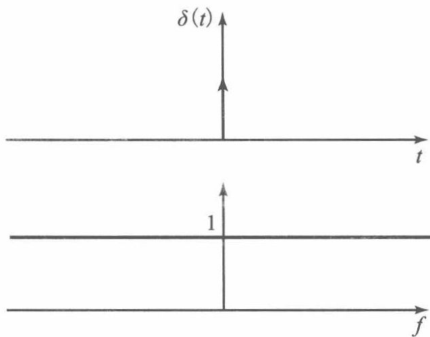


图 2-34　冲激信号及其频谱

例 2.3.3 求信号 $\mathrm{sgn}(t)$的傅里叶变换。

解： $\mathrm{sgn}(t)$的定义如图 2-18 所示，其为指数函数的极限，表达式如下

$$x_n(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} & t>0\\ -\mathrm{e}^{\frac{t}{n}} & t<0\\ 0 & t=0\end{cases} \tag{2.3.9}$$

61

此信号的傅里叶变换为

$$
\begin{aligned}
X_n(f) &= \mathscr{T}[x_n(t)] \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-e^{\frac{t}{n}}) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t}{n}} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{t(\frac{1}{n}-j2\pi f)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(\frac{1}{n}+j2\pi f)} dt \\
&= -\frac{1}{\frac{1}{n}-j2\pi f} + \frac{1}{\frac{1}{n}+j2\pi f} \\
&= \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2 f^2} \qquad (2.3.10)
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$，得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}[\mathrm{sgn}(t)] &= \lim_{n\to\infty} X_n(f) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2 f^2} = \frac{1}{j\pi f} \qquad (2.3.11)
\end{aligned}
$$

sgn(t)及其频谱如图 2-35 所示。◀

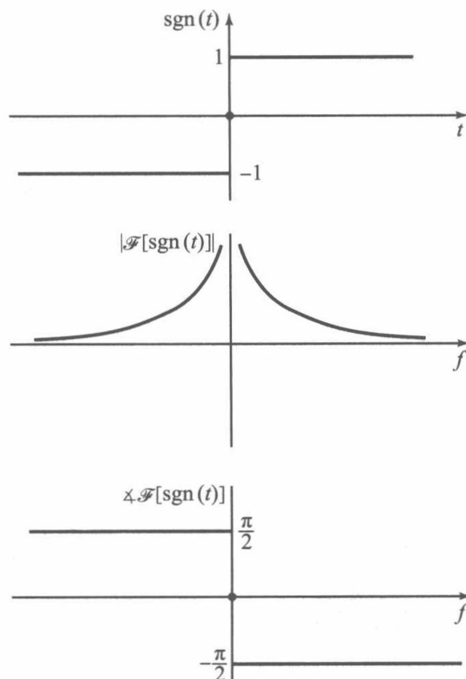


图 2-35 符号信号及其频谱

实信号、偶信号和奇信号的傅里叶变换。傅里叶变换通式可以写为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft) dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft) dt
\end{aligned}
$$

若 $x(t)$为实信号，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft) dt$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft) dt$$

都是实数，分别表示 $X(f)$的实部和虚部。由于余弦函数是偶函数而正弦函数是奇函数，可知对于实信号 $x(t)$，$X(f)$的实部是 f 的偶函数，而虚部是 f 的奇函数。因此，实信号 $x(t)$的傅里叶变换 $X(f)$是埃尔米特函数，即

62

$$X(-f) = X^*(f)$$

这等价于下列各式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[X(-f)] &= \mathrm{Re}[X(f)] \\
\mathrm{Im}[X(-f)] &= -\mathrm{Im}[X(f)] \\
|X(-f)| &= |X(f)| \\
\angle X(-f) &= -\angle X(f)
\end{aligned}
$$

对于实信号 $x(t)$，$|X(f)|$和$\angle X(f)$的典型曲线如图 2-36 所示。

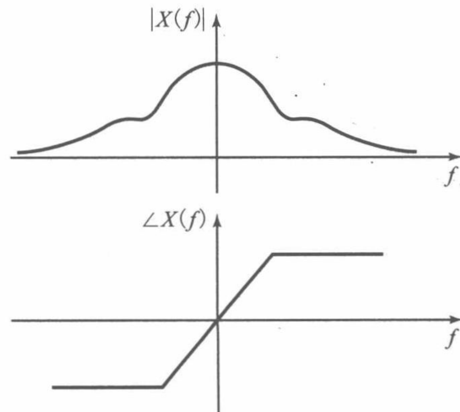


图 2-36 某实信号的幅度谱和相位谱

如果实信号 $x(t)$还是偶信号，则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft) dt$$

消失，这是因为被积函数是偶函数和奇函数的乘积，即被积函数是奇函数。由此，傅里叶变换 $X(f)$是实偶函数。同理，如果实信号$x(t)$还是奇信号，则其傅里叶变换 $X(f)$的实部为零，是虚奇函数。

63

信号带宽。信号带宽表示信号所呈现的频率范围。信号带宽越宽，信号所呈现的频率

变化越大。通常将实信号$x(t)$的带宽定义为该信号所呈现的正频率的范围。若要获知信号$x(t)$的带宽，首先要求$x(t)$的傅里叶变换$X(f)$，然后确定$X(f)$的正频率的覆盖范围。若$W_{\max}$是$X(f)$的最高正频率，$W_{\min}$是$X(f)$的最低正频率，则信号$x(t)$的带宽$BW=W_{\max}-W_{\min}$。

2.3.2　傅里叶变换的基本性质

本节将探讨傅里叶变换的一些基本定理。针对每个定理，都有相应的应用示例。

线性定理。 傅里叶变换是线性运算。也就是说，如果信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的傅里叶变换分别为$X_1(f)$和$X_2(f)$，则$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$的傅里叶变换为$\alpha X_1(f)+\beta X_2(f)$，其中$\alpha$和$\beta$是任意(实数或复数)标量。积分运算的线性特性是直接原因。

例 2.3.4 求单位阶跃信号$u_{-1}(t)$的傅里叶变换。

解： 利用

$$u_{-1}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sgn}(t)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

和线性定理，可得

$$\mathscr{T}[u_{-1}(t)]=\mathscr{T}\left[\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right]=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{\text{j}2\pi f} \tag{2.3.12}$$

64

◀

对偶定理。 如果

$$X(f)=\mathscr{T}[x(t)]$$

则有

$$x(f)=\mathscr{T}[X(-t)]$$

和

$$x(-f)=\mathscr{T}[X(t)]$$

为了证明此定理，首先根据傅里叶反变换，有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\text{e}^{\text{j}2\pi ft}\text{d}f$$

然后，利用变量代换$u=-f$，得

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(-u)\text{e}^{-\text{j}2\pi ut}\text{d}u$$

令$t=f$，有

$$x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X(-u)\text{e}^{-\text{j}2\pi uf}\text{d}u$$

最后，用t替代u，得

$$x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X(-t)\text{e}^{-\text{j}2\pi tf}\text{d}t$$

或

$$x(f)=\mathscr{T}[X(-t)] \tag{2.3.13}$$

使用同样的方法，可得

$$x(-f)=\mathscr{T}[X(t)] \tag{2.3.14}$$

例 2.3.5 求$\text{sinc}(t)$的傅里叶变换。

解： 注意$\Pi(t)$是偶信号，因此，$\Pi(-f)=\Pi(f)$，根据对偶定理，得

$$\mathscr{T}[\text{sinc}(t)]=\Pi(-f)=\Pi(f) \tag{2.3.15}$$

◀

例 2.3.6 求$\dfrac{1}{t}$的傅里叶变换。

解： 根据例 2.3.3 中求得的傅里叶变换对

65

$$\mathscr{T}[\mathrm{sgn}(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\pi f}$$

再次利用对偶定理，得

$$\mathscr{T}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\pi t}\right]=\mathrm{sgn}(-f)=-\mathrm{sgn}(f)$$

根据线性定理，得

$$\mathscr{T}\left[\frac{1}{t}\right]=-\mathrm{j}\pi\mathrm{sgn}(f) \tag{2.3.16}$$

时移定理。在时域中时移 t_0 会导致在频域中相移 $-2\pi f t_0$。即

$$\mathscr{T}[x(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\mathscr{T}[x(t)]$$

为了证明此定理，首先求 $x(t-t_0)$ 的傅里叶变换，即

$$\mathscr{T}[x(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t$$

利用变量代换 $u=t-t_0$，得

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t-t_0)]&=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f u}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}\mathscr{T}[x(t)]\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

注意，时间原点的改变并不会影响傅里叶变换的幅度，它只会引起与时间平移(或延迟)成正比的相位平移。

例 2.3.7 求如图 2-37 所示信号的傅里叶变换。

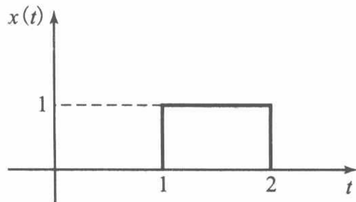


图 2-37 例 2.3.7 中的信号 $x(t)$

解：已知

$$x(t)=\Pi\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

根据时移定理，有

66

$$\mathscr{T}[x(t)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\times\frac{3}{2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi f}\mathrm{sinc}(f) \tag{2.3.18}$$

例 2.3.8 求冲激序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$$

的傅里叶变换。

解：根据时移定理，得

$$\mathscr{T}[\delta(t-nT_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n T_0}\mathscr{T}[\delta(t)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n T_0}$$

因此有

$$\mathscr{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n T_0}$$

由式(2.2.14)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

并且用 f 替换 t，用 $\frac{1}{T_0}$ 替换 T_0，得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)=T_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n f T_0}=T_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f T_0} \tag{2.3.19}$$

或

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f T_0}=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.20}$$

进一步可得

$$\mathscr{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)\right]=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.21}$$

当 $T_0=1$ 时尤其有意思，此时有

$$\mathscr{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n) \tag{2.3.22}$$

即只需将 t 替换为 f，就可以得到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ 的傅里叶变换是它自己。◀

展缩定理。对于任意实数 $a\neq 0$ 有

$$\mathscr{T}[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right) \tag{2.3.23}$$

为了证明此定理，须知

$$\mathscr{T}[x(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{2.3.24}$$

67

接下来利用变量代换 $u=at$，则

$$\mathscr{T}[x(at)]=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fu/a}\mathrm{d}u=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right) \tag{2.3.25}$$

上式已针对 $a>0$ 和 $a<0$ 这两种情况分别处理。

注意，根据以前的学习，如果 $a>1$，则 $x(at)$ 是 $x(t)$ 的时间压缩；相反如果 $a<1$，则 $x(at)$ 是 $x(t)$ 的时间展宽。因此，如果将一个信号在时域展宽，则其在频域(傅里叶变换)表现为压缩；而如果将一个信号在时域压缩，则其在频域表现为展宽。此结果倒是不难想象，因为随着信号在时域被压缩，信号会愈发突变，相应地会增加更多频率成分。

例 2.3.9 求如下信号的傅里叶变换。

$$x(t)=\begin{cases}3 & 0\leqslant t\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

解：注意，$x(t)$ 其实是一个幅度放大 3 倍，时间展宽 4 倍并向右平移 2 时间单位的矩形脉冲信号，即 $x(t)=3\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$。根据线性、时移和展缩定理，有

$$\mathscr{T}\left[3\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)\right]=3\mathscr{T}\left[\Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)\right]=3\mathrm{e}^{-4\mathrm{j}\pi f}\mathscr{T}\left[\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\right]=12\mathrm{e}^{-4\mathrm{j}\pi f}\mathrm{sinc}(4f)$$ ◀

卷积定理。如果信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都存在傅里叶变换，则

$$\mathscr{T}[x(t)*y(t)]=\mathscr{T}[x(t)]\cdot\mathscr{T}[y(t)]=X(f)\cdot Y(f) \tag{2.3.26}$$

要证明此定理，须有

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t)*y(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

68

利用变量代换 $u=t-\tau$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(t-\tau)}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}y(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fu}\mathrm{d}u=\mathscr{T}[y(t)]=Y(f)$$

因此有

$$\mathscr{T}[x(t)*y(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)Y(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau=X(f)\cdot Y(f) \tag{2.3.27}$$

此定理非常重要，是直接利用了复指数信号是 LTI 系统的特征函数(或者说，是卷积运算的特征函数)而得出的结果。在频域求解 LTI 系统对于给定输入信号的响应要比在时域求解简单得多。这一特性是 LTI 系统频域分析的基础。

例 2.3.10 求图 2-15 所示三角信号 $\Lambda(t)$ 的傅里叶变换。

解：由于 $\Lambda(t)=\Pi(t)*\Pi(t)$，利用卷积定理可得

$$\mathscr{T}[\Lambda(t)]=\mathscr{T}[\Pi(t)]\cdot\mathscr{T}[\Pi(t)]=\mathrm{sinc}^2(f) \tag{2.3.28}$$ ◀

例 2.3.11 求如例 2.1.14 所述，如图 2-16 所示信号 $x(t)=\Pi\left(\frac{t}{4}\right)+\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$ 的傅里叶变换。

解： 利用展缩和线性定理，易得

$$X(f)=4\text{sinc}(4f)+2\,\text{sinc}^2(2f)$$ ◀

调制定理。 $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ 的傅里叶变换是 $X(f-f_0)$。为了证明此定理，须有

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}]&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi ft}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi t(f-f_0)}dt=X(f-f_0)\end{aligned}\tag{2.3.29}$$

69

此定理与时移定理是对偶关系。时移定理表明，信号在时域的平移会导致在频域与一个复指数相乘。而调制定理则指出，信号在时域与一个复指数相乘会导致在频域的平移。信号在频域的平移通常称为调制。

例 2.3.12 求 $e^{j2\pi f_0 t}$ 的傅里叶变换。

解： 根据调制定理，有

$$\mathscr{T}[e^{j2\pi f_0 t}]=\mathscr{T}[1e^{j2\pi f_0 t}]=\delta(f-f_0)$$

注意，由于 $x(t)$ 不是实信号，其傅里叶变换不具备埃尔米特对称性(其幅度不是偶函数，相位不是奇函数)。 ◀

例 2.3.13 求信号 $\cos(2\pi f_0 t)$ 的傅里叶变换。

解： 由欧拉公式，得

$$\cos(2\pi f_0 t)=\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

利用线性定理以及例 2.3.12 的结果，得

$$\mathscr{T}[\cos(2\pi f_0 t)]=\frac{1}{2}\mathscr{T}[e^{j2\pi f_0 t}]+\frac{1}{2}\mathscr{T}[e^{-j2\pi f_0 t}]=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$ ◀

例 2.3.14 求信号 $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ 的傅里叶变换。

解： 易得

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t)\cos(2\pi f_0 t)]&=\mathscr{T}\left[\frac{1}{2}x(t)e^{j2\pi f_0 t}+\frac{1}{2}x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right]\\&=\frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)\end{aligned}\tag{2.3.30}$$

有关上式的详解参见图 2-38。到了第 3 章，读者就会明白，上式正是调幅系统工作的基础。 ◀

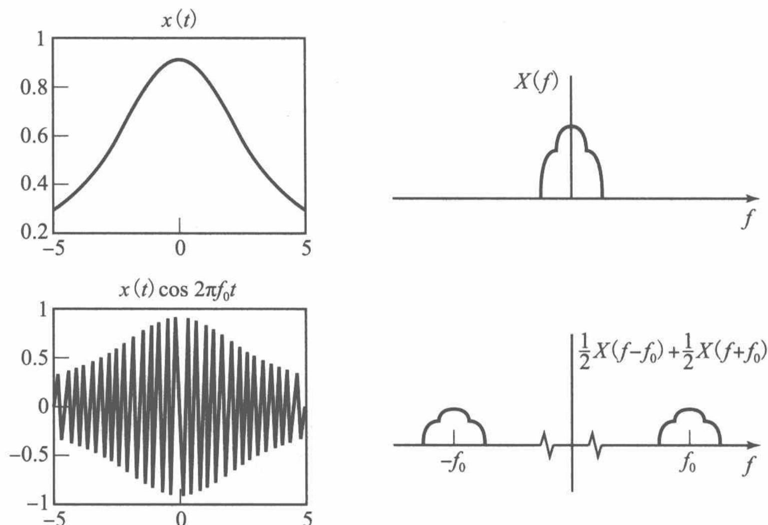


图 2-38 调制在时域和频域的效果示意

例 2.3.15　信号

$$x(t)=\begin{cases}\cos(\pi t) & |t|\leqslant\frac{1}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}\tag{2.3.31}$$

如图 2-39 所示，求其傅里叶变换。

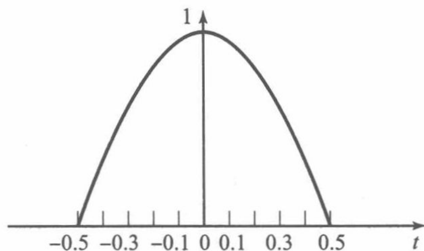


图 2-39　例 2.3.15 中的信号 $x(t)$

解：注意，$x(t)$可以表示为

$$x(t)=\Pi(t)\cos(\pi t)\tag{2.3.32}$$

因此有

$$\mathscr{T}[\Pi(t)\cos(\pi t)]=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(f+\frac{1}{2}\right)\tag{2.3.33}$$

其中用到了例 2.3.14 的结论$\left(当\ f_0=\frac{1}{2}时\right)$。◀

帕塞瓦尔公式。如果信号 $x(t)$和 $y(t)$的傅里叶变换分别是 $X(f)$和 $Y(f)$，则有

70~71

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)Y^*(f)\mathrm{d}f\tag{2.3.34}$$

要证明帕塞瓦尔定理，须有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}Y(f')\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f't}\mathrm{d}f'\right]^*\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}Y^*(f')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f't}\mathrm{d}f'\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty}Y^*(f')\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi t(f-f')}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}f'\right]\mathrm{d}f\end{aligned}$$

根据式(2.3.5)，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi t(f-f')}\mathrm{d}t=\delta(f-f')$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty}Y^*(f')\delta(f-f')\mathrm{d}f'\right]\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)Y^*(f)\mathrm{d}f\end{aligned}\tag{2.3.35}$$

在上式的最后一步利用了冲激信号的取样性质。

如果令 $y(t)=x(t)$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\mathrm{d}f\tag{2.3.36}$$

这就是著名的瑞利(Rayleigh)定理，它与周期信号的帕塞瓦尔定理类似。

例 2.3.16　根据帕塞瓦尔定理，求积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^4(t)\mathrm{d}t$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^3(t)\mathrm{d}t$$

解：已知$\mathscr{T}[\operatorname{sinc}^2(t)]=\Lambda(t)$。因此，根据瑞利定理，有

72

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^4(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda^2(f)\mathrm{d}f=\int_{-1}^{0}(f+1)^2\mathrm{d}f+\int_{0}^{1}(-f+1)^2\mathrm{d}f=\frac{2}{3}$$

针对第二个积分，可以利用$\mathscr{T}[\operatorname{sinc}(t)]=\Pi(f)$。因此，根据帕塞瓦尔定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^2(t)\operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(f)\Lambda(f)\mathrm{d}f$$

$\Pi(f)$与$\Lambda(f)$的乘积如图 2-40 所示。由图可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(f)\Lambda(f)\mathrm{d}f = 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^3(t)\mathrm{d}t = \frac{3}{4}$$ ◀

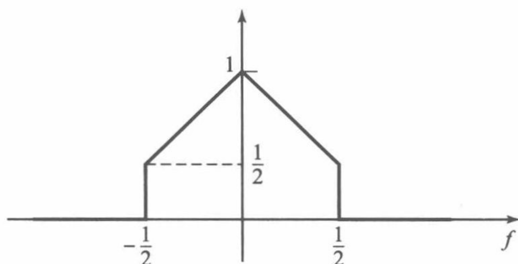


图 2-40 Π 和Λ的乘积

自相关定理。信号 $x(t)$ 的（时间）自相关函数记作 $R_x(\tau)$，其定义式为

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t \quad (2.3.37)$$

自相关定理表述为

$$\mathscr{T}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2 \quad (2.3.38)$$

由于 $R_x(\tau)=x(\tau)*x^*(-\tau)$，根据卷积定理，易得自相关定理[⊖]。

由自相关定理，可得出信号的自相关的傅里叶变换总是正的实函数。

微分定理。信号的导数的傅里叶变换可由下式求得

73

$$\mathscr{T}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right] = \mathrm{j}2\pi fX(f) \quad (2.3.39)$$

为了证明上式，须有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{j}2\pi fX(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \quad (2.3.40)$$

因此，推得

$$\mathscr{T}^{-1}[\mathrm{j}2\pi fX(f)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

或

$$\mathscr{T}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right] = \mathrm{j}2\pi fX(f)$$

重复使用微分定理，可得

$$\mathscr{T}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)\right] = (\mathrm{j}2\pi f)^nX(f) \quad (2.3.41)$$

例 2.3.17 求如图 2-41 所示信号的傅里叶变换。

解：显然，$x(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)$。因此，由微分定理，得

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t)] &= \mathscr{T}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)\right]\\ &= \mathrm{j}2\pi f\,\mathscr{T}[\Lambda(t)]\\ &= \mathrm{j}2\pi f\,\mathrm{sinc}^2(f)\end{aligned} \quad (2.3.42)$$ ◀

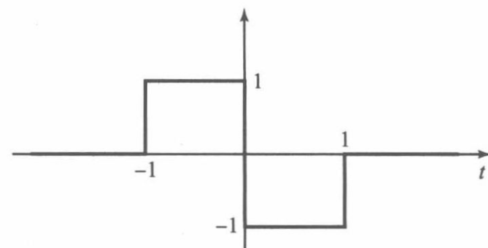


图 2-41 例 2.3.17 中的信号 $x(t)$

频域微分定理。首先有

74

$$\mathscr{T}[tx(t)] = \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}X(f) \quad (2.3.43)$$

上式的证明方法与微分定理的证明基本相同，留作一道习题。重复使用此定理，可得

$$\mathscr{T}[t^nx(t)] = \left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f) \quad (2.3.44)$$

例 2.3.18 求 $x(t)=t$ 的傅里叶变换。

解：利用频域微分定理，有

⊖ 随机信号自相关函数的定义在第 5 章给出。

$$\mathscr{T}[t]=\mathscr{T}[t\times 1]=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\mathscr{T}[1]=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\delta(f)=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\delta'(f) \tag{2.3.45}$$

◀

积分定理。信号的积分的傅里叶变换可由下式求得

$$\mathscr{T}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{X(f)}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}X(0)\delta(f) \tag{2.3.46}$$

为了证明此定理，利用习题 2.15 的结论，可得

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*u_{-1}(t)$$

根据卷积定理以及 $u_{-1}(t)$ 的傅里叶变换，有

$$\mathscr{T}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=X(f)\left[\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)\right]=\frac{X(f)}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}X(0)\delta(f) \tag{2.3.47}$$

例 2.3.19　求如图 2-42 所示信号的傅里叶变换。

解：已知

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\Pi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此，利用积分定理，得

$$\begin{aligned}\mathscr{T}[x(t)]&=\frac{\mathrm{sinc}(f)}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(0)\delta(f)\\&=\frac{\mathrm{sinc}(f)}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)\end{aligned} \tag{2.3.48}$$

◀

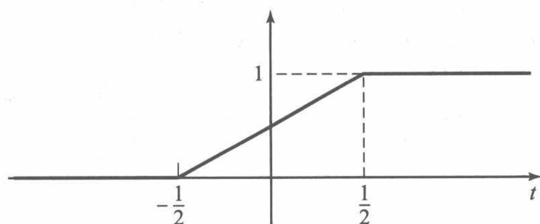


图 2-42　例 2.3.19 中的信号 $x(t)$

75

矩定理。若 $\mathscr{T}[x(t)]=X(f)$，则 $x(t)$ 的 n 阶矩 $\int_{-\infty}^{\infty}t^n x(t)\mathrm{d}t$ 可由下式求得

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^n x(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f)\bigg|_{f=0} \tag{2.3.49}$$

此定理可由频域微分定理推得，已知

$$\mathscr{T}[t^n x(t)]=\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f) \tag{2.3.50}$$

上式表明

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^n x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f)$$

令等式两边的 $f=0$，则定理得证。

特别当 $n=0$ 时，可以得到一个信号曲线下面积的简单公式，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t=X(0) \tag{2.3.51}$$

例 2.3.20　设 $\alpha>0$，$x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)$。求 $x(t)$ 的 n 阶矩。

解：首先求 $X(f)$，有

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t(\alpha+\mathrm{j}2\pi f)}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}2\pi f}(0-1)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}2\pi f} \tag{2.3.52}$$

经 n 次微分，得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}f^n}X(f)=\frac{(-\mathrm{j}2\pi)^n}{(\alpha+\mathrm{j}2\pi f)^{n+1}} \tag{2.3.53}$$

76

因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\right)^n(-\mathrm{j}2\pi)^n\cdot\frac{1}{\alpha^{n+1}}=\frac{1}{\alpha^{n+1}} \tag{2.3.54}$$

◀

例 2.3.21　求信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 的傅里叶变换，其中 $\alpha>0$（见图 2-43）。

解：因为

$$x(t)=e^{-\alpha t}u_{-1}(t)+e^{\alpha t}u_{-1}(-t)$$
$$=x_1(t)+x_1(-t) \tag{2.3.55}$$

且已知

$$\mathscr{T}[x_1(t)]=\mathscr{T}[e^{-\alpha t}u_{-1}(t)]=\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$$

根据展缩定理，当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\mathscr{T}[x_1(-t)]=\mathscr{T}[e^{\alpha t}u_{-1}(-t)]=\frac{1}{\alpha-j2\pi f}$$

因此，根据线性定理，得

$$\mathscr{T}[e^{-\alpha|t|}]=\frac{1}{\alpha+j2\pi f}+\frac{1}{\alpha-j2\pi f}$$
$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2f^2} \tag{2.3.56}$$ ◀

77

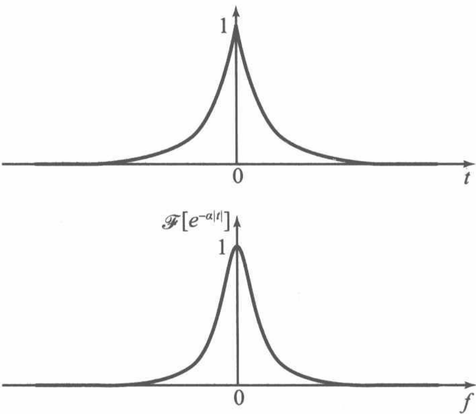


图 2-43 信号 $e^{-\alpha|t|}$ 及其傅里叶变换

表 2-1 列举了一组常见的傅里叶变换对。表 2-2 概括了傅里叶变换的主要性质。

表 2-1 常见傅里叶变换对

时域	频域	时域	频域
$\delta(t)$	1	$e^{-\alpha t}u_{-1}(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$
1	$\delta(f)$	$te^{-\alpha t}u_{-1}(t)$，$\alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}$	$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$
$e^{j2\pi f_0t}$	$\delta(f-f_0)$	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$	$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\sin(2\pi f_0t)$	$-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)$	$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\Pi(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$	$\delta'(t)$	$j2\pi f$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(f)$	$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2(f)$	$\frac{1}{t}$	$-j\pi\mathrm{sgn}(f)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$	$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$

表 2-2 傅里叶变换的性质

信号	傅里叶变换	信号	傅里叶变换
$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$	$\alpha X_1(f)+\beta X_2(f)$	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
$X(t)$	$x(-f)$	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi fX(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^nX(f)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}X(f)$	$tx(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)\frac{d}{df}X(f)$
$e^{j2\pi f_0t}x(t)$	$X(f-f_0)$	$t^nx(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n\frac{d^n}{df^n}X(f)$
$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

2.3.3 周期信号的傅里叶变换

本节将进一步扩展已有结论，以探寻周期信号傅里叶变换的方法。前面已经介绍了某

些周期信号的傅里叶变换(参见表 2-1)，包括 $e^{j2\pi f_0 t}$，$\cos(2\pi f_0 t)$，$\sin(2\pi f_0 t)$和 $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(t-nT_0)$。这些周期信号的傅里叶变换都有一个共同的特点：在频域里都包含冲激函数。接下来会证明，所有周期信号都是如此。实际上，周期信号的傅里叶变换与其傅里叶级数间存在着密切联系。

设 $x(t)$是周期为 T_0的周期信号，用$\{x_n\}$表示与此信号对应的傅里叶级数系数，那么

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

对等式两边进行傅里叶变换，并利用

$$\mathscr{T}[e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}]=\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

可得

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.57}$$

由上式可知，周期信号 $x(t)$的傅里叶变换由一个冲激序列组成，各冲激位于周期信号基频的整数倍处，冲激强度正好是周期信号的傅里叶级数系数。上式指明了利用傅里叶变换性质来计算信号的傅里叶级数系数的简便方法。如果定义截短信号 $x_{T_0}(t)$如下

$$x_{T_0}(t)=\begin{cases}x(t) & -\frac{T_0}{2}<t\leqslant\frac{T_0}{2}\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{2.3.58}$$

则有

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{T_0}(t-nT_0) \tag{2.3.59}$$

由于 $x_{T_0}(t-nT_0)=x_{T_0}(t)*\delta(t-nT_0)$，得

$$x(t)=x_{T_0}(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0) \tag{2.3.60}$$

因此，利用卷积定理和表 2-1，可得

$$X(f)=X_{T_0}(f)\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{n}{T_0})\right] \tag{2.3.61}$$

进一步简化，得

$$X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_{T_0}(\frac{n}{T_0})\delta(t-\frac{n}{T_0}) \tag{2.3.62}$$

与下式比较

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.3.63}$$

可推得

$$x_n=\frac{1}{T_0}X_{T_0}(\frac{n}{T_0}) \tag{2.3.64}$$

上式指明了另外一种求信号的傅里叶级数系数的方法。

给定周期信号 $x(t)$，求 x_n可采用以下步骤：

1. 首先，利用式(2.3.58)确定截短信号 $x_{T_0}(t)$。
2. 接下来，利用表 2-1 以及傅里叶变换的性质和定理，求截短信号的傅里叶变换。
3. 如式(2.3.64)所示，求截短信号的傅里叶变换在 $f=\frac{n}{T_0}$点的取值并除以 T_0。

78 ~ 79

80

例 2.3.22 求如图 2-25 所示信号 $x(t)$的傅里叶级数系数。

解： 参照上述步骤，截短信号为

$$x_{T_0}(t) = \Pi(\frac{t}{\tau})$$

其傅里叶变换为

$$X_{T_0}(f) = \tau \text{sinc}(\tau f)$$

所以得

$$x_n = \frac{\tau}{T_0}\text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$ ◀

2.3.4 信号通过 LTI 系统

卷积定理是 LTI 系统频域分析的基础。如前所述，LTI 系统的输出等于输入与系统冲激响应的卷积。如果利用卷积定理将三者的关系转换到频域，用 $X(f)$，$H(f)$和 $Y(f)$分别表示输入，系统冲激响应和输出的傅里叶变换，则有

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

因此，在频域中表示 LTI 系统的输入一输出关系要远比在时域中简单。在时域中，需要进行卷积运算；而在频域中仅需简单相乘即可。之所以简单，是因为信号的傅里叶变换是以 LTI 系统的特征函数的形式来表述的。因此，给定输入，要想求 LTI 系统的输出，可以先求得输入和系统冲激响应的傅里叶变换。然后再将两者相乘，得到傅里叶变换形式的输出。最后通过傅里叶反变换，就可以得到系统输出的时域表达式。大多数情况下，傅里叶反变换并不是必需的，系统输出的频域表达式已经可以提供关于输出信号的足够多的信息。

例 2.3.23 设 LTI 系统的输入信号为

$$x(t) = \text{sinc}(W_1 t)$$

系统的冲激响应为

$$h(t) = \text{sinc}(W_2 t)$$

81

求输出信号。

解： 首先，将信号变换到频域，有

$$X(f) = \frac{1}{W_1}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)$$

和

$$H(f) = \frac{1}{W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right)$$

$X(f)$和 $H(f)$如图 2-44 所示。则频域输出如下

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) \\ &= \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right)\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_1}\right) & W_1 \leqslant W_2 \\ \frac{1}{W_1 W_2}\Pi\left(\frac{f}{W_2}\right) & W_1 > W_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

利用傅里叶反变换，得

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{W_2}\text{sinc}(W_1 t) & W_1 \leqslant W_2 \\ \frac{1}{W_1}\text{sinc}(W_2 t) & W_1 > W_2 \end{cases}$$ ◀

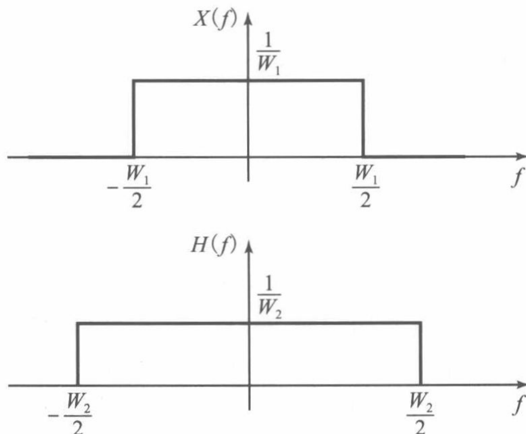


图 2-44 低通信号和低通滤波器

上例中的信号 $x(t)$称为低通信号。低通信号是指其频域特性包含零频附近的频率成分，

且最高频率不超过某有限值 W_1 的信号。类似地，允许低于某频率 W 的所有频率成分通过，但将高于频率 W 的所有频率成分完全抑制的 LTI 系统称为理想低通滤波器(LPF)。LPF 对于范围在 $-W \leqslant f \leqslant W$ 的所有频率成分的频率响应为 1，而对于该范围之外的频率响应为 0，W 称为 LPF 的带宽。与 LPF 对应的就是理想高通滤波器(HPF)。HPF 的 $H(f)$ 在 $-W \leqslant f \leqslant W$ 范围之外为 1，而在该范围内为 0。理想带通滤波器(BPF)的频率响应在 $-W_1 \leqslant |f| \leqslant W_2$ 范围内为 1，否则为 0，因此，BPF 的带宽是 $W_2 - W_1$。各类滤波器的频率响应函数如图 2-45 所示。

82

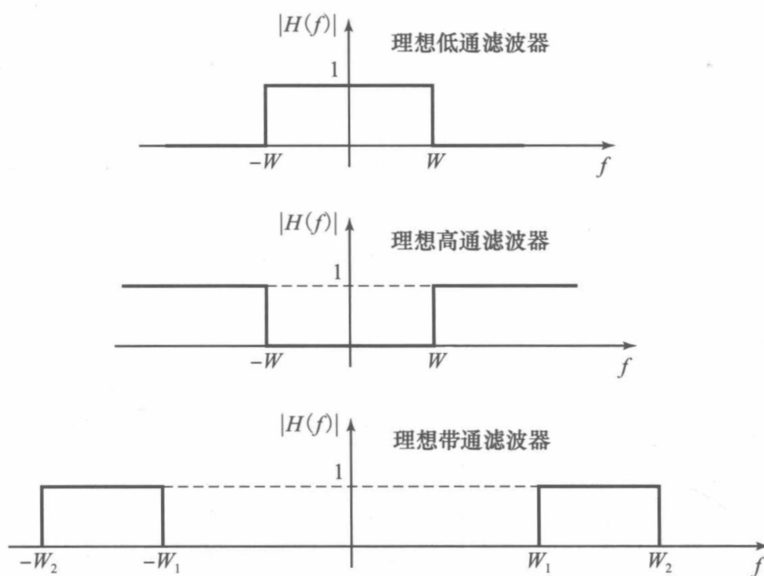


图 2-45　各类滤波器

非理想的低通或带通滤波器的带宽通常定义为功率通过率至少为最大功率通过率的一半所对应的频带宽度。此带宽通常称为滤波器的 3dB 带宽，这是因为功率下降一半在对数尺度上相当于减少了 3dB。某滤波器的 3dB 带宽如图 2-46 所示。

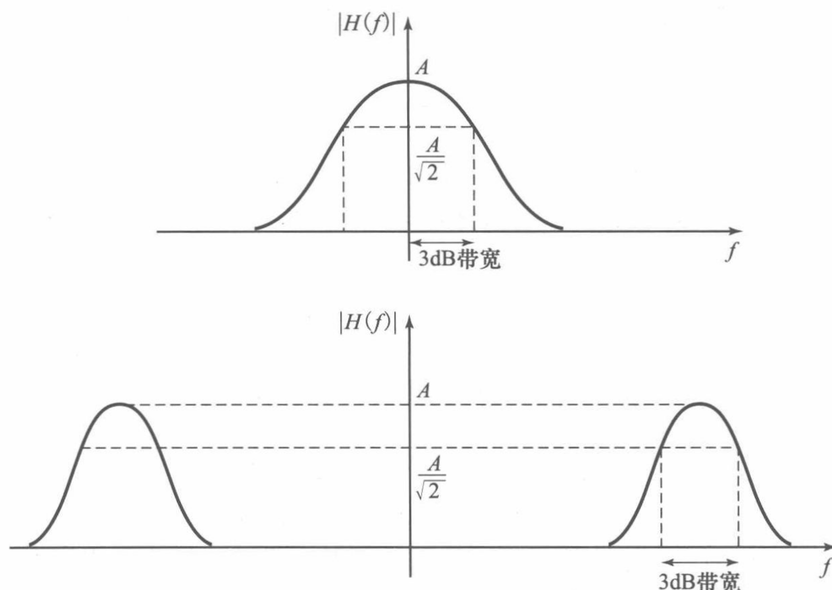


图 2-46　某滤波器的 3dB 带宽

需要强调的是，滤波器的带宽通常指滤波器可通过的正频率的宽度。

例 2.3.24 滤波器传递函数的幅度为

$$|H(f_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{10\,000}\right)^2}}$$

求该滤波器的类型及其 3dB 带宽。

解： 当 $f=0$ 时，$H(f)=1$。随着 f 趋于无穷大，$|H(f)|$ 逐渐减小并最终趋于零。因此，这是低通滤波器。由于功率与幅度的平方成正比，所以有方程

$$|H(f_0)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f_0}{10\,000}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

83 ~ 84

解得 $f_0 = \pm 10\,000$。因此，这是一个 3dB 带宽为 10kHz 的低通滤波器，其 $|H(f)|$ 如图 2-47 所示。◀

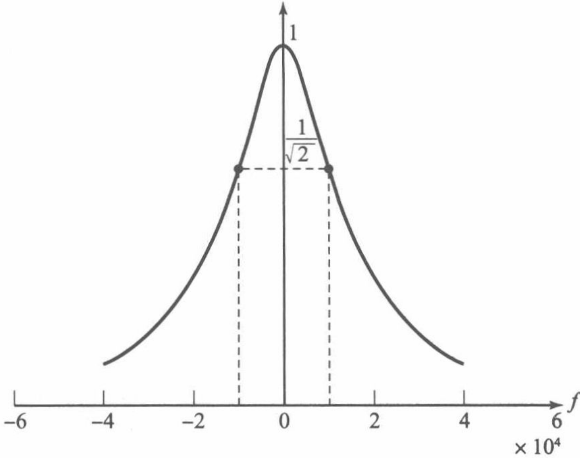


图 2-47 例 2.3.24 中滤波器的 3dB 带宽

2.4 滤波器设计

在通信系统中，滤波器广泛用于从非所需信号或者干扰信号中分离出所需信号。通常，在掌握了所需信号的频域特征之后，也就确定了所需滤波器的幅度和相位响应。所谓滤波器设计，就是求解一个频率响应逼近需求值的因果滤波器的系数。

滤波器有多种类型，既有模拟滤波器，也有数字滤波器。本节主要研究数字滤波器的设计，因为这种滤波器容易在计算机上用软件方法实现。数字滤波器大致分为有限冲激响应滤波器(FIR)和无限冲激响应滤波器(IIR)。FIR 滤波器是全零点滤波器，其系统函数的 z 域表示为

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

其中$\{h(k),\ 0 \leqslant k \leqslant M-1\}$是滤波器的冲激响应。通过 $H(z)$在单位圆上的取值可获得滤波器的频率响应，即将 $z=e^{j\omega}$ 代入 $H(z)$从而得到 $H(\omega)$。在离散时域上，FIR 滤波器由以下(差分)方程描述

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k)$$

其中$\{x(n)\}$和$\{y(n)\}$分别是滤波器的输入和输出序列。

IIR 滤波器既有零点，也有极点，通常在 z 域上的有理系统函数表示为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b(k) z^{-k}}{1-\sum_{k=0}^{N} a(k) z^{-k}}$$

其中$\{a(k)\}$和$\{b(k)\}$是滤波器的系数。通过 $H(z)$在单位圆上的取值可获得滤波器的频率响应 $H(\omega)$。在离散时域上，IIR 滤波器由以下差分方程描述

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a(k) y(n-k) + \sum_{k=0}^{M-1} b(k) x(n-k)$$

在实际应用中，FIR 滤波器可应用于要求滤波器通频带内相位线性的场合。如果不要求相位线性，则 FIR 和 IIR 滤波器都可以使用。一般说来，如果些许相位失真可以接受或是不太重要，最好使用 IIR 滤波器。这是因为其实现时所需系数较少，从而降低了计算复杂度。但本书讨论的是通信系统，其对相位失真的容忍度很低，因此下面主要考虑相位线性的 FIR 滤波器的设计。因果数字滤波器的典型频率响应特性如图 2-48 所示。

85

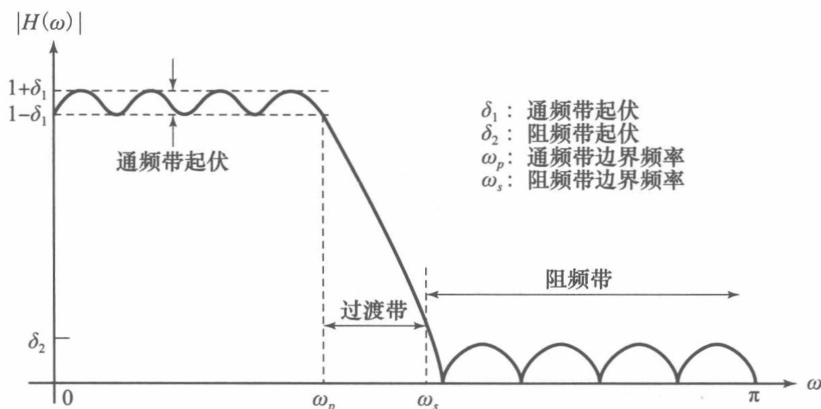


图 2-48 物理可实现滤波器的幅度特性

图 2-48 所示滤波器为低通滤波器，通频带边界频率 $f_p=\omega_p/2\pi$，阻频带边界频率 $f_s=\omega_s/2\pi$，通频带起伏为 δ_1，阻频带起伏为 δ_2。频率响应从通频带到阻频带的过渡区间定义为滤波器的过渡带。通频带的宽度 $0\leqslant f\leqslant f_p$ 通常称为滤波器的带宽。

滤波器频率响应的曲线一般会有较大的动态范围。为了容纳此范围，惯常做法是对幅度响应 $|H(f)|$ 采用对数坐标。因此，通频带起伏为 $20\log_{10}\dfrac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$，阻频带起伏为 $20\log_{10}\delta_2$。

在滤波器的设计过程中，通常需要指定几个滤波器的参数：(1)可接受的最大通频带起伏，(2)可接受的最大阻频带起伏，(3)通频带边界频率 f_p 和(4)阻频带边界频率 f_s。有了以上参数，就可以选择适当的滤波器系数以逼近所需的频率响应特性。

基于不同的设计方法，MATLAB 提供了几种设计滤波器的函数。此处重点关注基于雷米兹(Remez)算法的数字 FIR 滤波器(低通滤波器，希尔伯特(Hilbert)变换滤波器和微分滤波器)的设计与实现。该算法可用于设计最优的起伏平稳、相位线性的 FIR 滤波器。雷米兹算法需要指定 FIR 滤波器的长度，重要频点 f_p 和 f_s，以及 δ_2/δ_1 的比值。然而，通常在滤波器设计中，需要指定 f_p、f_s、δ_1 和 δ_2 以确定满足要求的滤波器的长度。如果给定以上参数，滤波器长度 M 的简单估算公式为

$$\hat{M}=\frac{-20\log_{10}(\sqrt{\delta_1\delta_2})-13}{14.6\Delta f}+1 \qquad (2.4.1)$$

86

其中，Δf 是过渡带宽度，即 $\Delta f=f_s-f_p$。

例 2.4.1 利用雷米兹函数来设计 FIR 低通滤波器，使其满足以下指标要求：

通频带起伏≤1dB

阻频带衰减≥40dB

通频带边界频率为 0.2

阻频带边界频率为 0.35

1. 利用式(2.4.1)估计该滤波器的长度。
2. 画出幅频响应 $20\log_{10}|H(f)|$。

解：根据已知条件，通频带起伏由式 $20\log_{10}\dfrac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$ 确定，若其值为 1dB，可得

$$1=20\log_{10}\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$$

解得

$$\delta_1=0.0575$$

另一方面，阻频带衰减是相对于通频带最大增益即 $1+\delta_1$ 而言的，因此有

$$20\log_{10}\frac{\delta_2}{1+\delta_1}=-40$$

将 $\delta_1=0.0575$ 代入上式，求得 δ_2

$$\delta_2 = 0.0106$$

还可求得 Δf 为

$$\Delta f = f_s - f_p = 0.35 - 0.2 = 0.15$$

有了 δ_1，δ_2 和 Δf，利用式(2.4.1)就可以求得滤波器长度 $\hat{M}$ 为

$$\hat{M} = \frac{-20\log_{10}(\sqrt{\delta_1\delta_2})-13}{14.6\Delta f}+1 = 9.7491$$

因此，要设计一个长度为 10 的滤波器。

此处用到的 MATLAB 命令是 remez 命令，其语法形式为

```
h=remez(M,f,m,w)
```

其中 M 是滤波器的阶数(若滤波器的长度为 $\hat{M}$，则滤波器的阶数 $M=\hat{M}-1$)，f 为频率向量(第一个频率分量为 0，最后一个频率分量为 1)。频率向量 f 的元素值依次增加以标明重要的频率分量，诸如通频带的截止频率和阻频带的初始频率。向量 m 与向量 f 的长度相同，其元素值为与向量 f 对应的滤波器幅度

87

响应的期望值。向量 w 是一个加权向量，通频带内取值为 δ_2/δ_1，阻频带内取值为 1。在本例中有

$$f = [0 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 1]$$

$$m = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$w = \left[\frac{0.0106}{0.0575} \quad 1\right] = [0.1839 \quad 1]$$

利用上述数据，调用

```
>> [h]=remez(M,f,m,w)
```

在 MATLAB 里可即时返回所需滤波器的冲激响应。有了冲激响应，就可以利用 MATLAB 命令 freqz 求得滤波器的频率响应。设计此滤波器的完整 MATLAB 命令如下：

```
>> fp=0.2;
>> fs=0.35;
>> df=fs-fp;
>> Rp=1;
>> As=40;
>> delta1=(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1);
>> delta2=(1+delta1)*(10^(-As/20));
>> Mhat=ceil((-20*log10(sqrt(delta1*delta2))-13)/
     (14.6*df)+1);
>> f=[0 fp fs 1];
>> m=[1 1 0 0];
>> w=[delta2/delta1 1];
>> h=remez(Mhat+20,f,m,w);
>> [H,W]=freqz(h,[1],3000);
>> plot(W/pi,20*log10(abs(H)))
```

88

所得滤波器的传递函数，以分贝为单位，如图 2-49 所示。 ◀

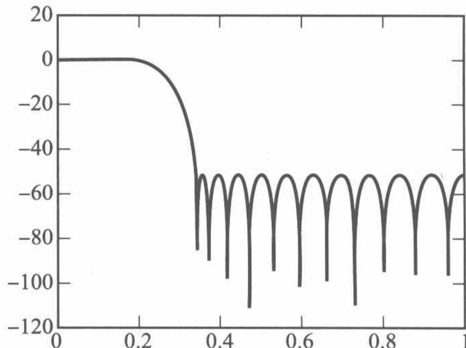


图 2-49　例 2.4.1 设计的滤波器的频率响应

2.5 功率和能量

2.1.2 节定义了功率和能量以及功率信号和能量信号的概念。本节将在时域和频域进一步扩展这些概念。

信号的能量和功率指的是当信号作为电压源或电流源馈送到 1 欧姆电阻上时对应的能量和功率。信号 $x(t)$(通常为复数)的能量定义为

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

信号的功率定义为

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

若信号的能量$\mathscr{E}_x<\infty$，则称信号为能量信号；若 $0<P_x<\infty$，则称信号为功率信号。一个信号不能既是能量信号，又是功率信号。因为能量信号的 $P_x=0$，而功率信号的$\mathscr{E}_x=\infty$。一个信号可以即非能量信号，也非功率信号。习题 2.10 就给出了这样一种信号。然而，通信当中涉及的大多数都是能量信号或功率信号。实际上，所有周期信号都是功率信号，其功率为

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

其中 T_0是周期，α 为任意实数。

2.5.1 能量信号

对于能量信号 $x(t)$，定义其自相关函数 $R_x(\tau)$为

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t \quad (2.5.1)$$

在上式中，令 $\tau=0$，就可以得到信号 $x(t)$的能量，即

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = R_x(0) \quad (2.5.2)$$

利用傅里叶变换的自相关定理(参见 2.3.2 节)，可知 $R_x(\tau)$的傅里叶变换为$|X(f)|^2$。根据此结论，或者等效地利用瑞利定理，可得

89

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \quad (2.5.3)$$

若 $x(t)$通过冲激响应为 $h(t)$(通常为复数)、频率响应为 $H(f)$的滤波器，则输出为 $y(t)=x(t)*h(t)$，转换到频域为 $Y(f)=X(f)H(f)$。输出信号 $y(t)$的能量为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \; |H(f)|^2 \mathrm{d}f = R_y(0)\end{aligned} \quad (2.5.4)$$

其中 $R_y(\tau)=y(\tau)*y^*(-\tau)$，是输出的自相关函数。$|Y(f)|^2$的傅里叶反变换为

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &= \mathscr{T}^{-1}[|Y(f)^2|] = \mathscr{T}^{-1}[|X(f)|^2|H(f)|^2] \\ &\overset{\text{a}}{=} \mathscr{T}^{-1}[|X(f)^2|] * \mathscr{T}^{-1}[|H(f)^2|] \\ &\overset{\text{b}}{=} R_x(\tau) * R_h(\tau)\end{aligned} \quad (2.5.5)$$

其中(a)利用了卷积定理，(b)利用了自相关定理。接下来设

$$H(f) = \begin{cases} 1 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么有

$$|Y(f)|^2 = \begin{cases} |X(f)|^2 & W < f < W + \Delta W \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

且

90

$$\mathscr{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 \mathrm{d}f \approx |X(W)|^2 \Delta W \tag{2.5.6}$$

此滤波器允许 $f=W$ 附近一个小的频率范围内的频率成分通过，而抑制其他所有频率成分。因此，输出信号的能量对应于输入信号中频率分布于 $f=W$ 附近的频率成分的能量。这表明 $|X(W)|^2 \Delta W$ 是信号 $x(t)$ 中频率位于区间 $[W, W+\Delta W]$ 范围内的那部分信号的能量。因此有

$$|X(W)|^2 = \frac{[W, W+\Delta W]\text{带宽范围内的能量}}{\Delta W}$$

这就是 $|X(f)|^2$ 为何称为信号 $x(t)$ 的能量谱密度，以及为何能够表征信号在各频点上单位带宽的能量的原因。因此，定义信号 $x(t)$ 的能量谱密度(或能量谱)为

$$\mathscr{G}_x(f) = |X(f)|^2 = \mathscr{T}[R_x(\tau)] \tag{2.5.7}$$

综上所述：

1. 对于任何能量信号 $x(t)$，定义其自相关函数为 $R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$。

2. $x(t)$ 的能量谱密度记作 $\mathscr{G}_x(f)$，是自相关函数 $R_x(\tau)$ 的傅里叶变换，等于 $|X(f)|^2$。

3. $x(t)$ 的能量 $\mathscr{E}_x$ 是其自相关函数在 $\tau=0$ 时的取值，等价于其能量谱密度在全频域的积分，即

$$\mathscr{E}_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}(f) \mathrm{d}f \tag{2.5.8}$$

4. 如果 $x(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ 的滤波器，输出为 $y(t)$，则有

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ R_y(\tau) &= R_x(\tau) * R_h(\tau) \\ \mathscr{G}_y(f) &= \mathscr{G}_x(f)\,\mathscr{G}_h(f) = |X(f)|^2\,|H(f)|^2 \end{aligned}$$

例 2.5.1 求信号 $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} u_{-1}(t)$，$\alpha > 0$ 的自相关函数、能量谱密度和信号能量。

解： 先求信号的傅里叶变换。由表 2-1 可知

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}2\pi f}$$

因此有

91

$$\mathscr{G}_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

且

$$R_x(\tau) = \mathscr{T}^{-1}[|X(f)|^2] = \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

自相关函数在零点的取值即为信号能量，即

$$\mathscr{E}_x = R_x(0) = \frac{1}{2\alpha}$$

◀

例 2.5.2 若上例中的信号通过冲激响应为 $h(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} u_{-1-1}(t)$，$\beta > 0$，$\beta \neq \alpha$ 的滤波器，求输出信号的自相关函数，功率谱密度和信号功率。

解： 滤波器的频率响应为

$$H(f) = \frac{1}{\beta + \mathrm{j}2\pi f}$$

因此有

$$|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \; |H(f)|^2 = \frac{1}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)(\beta^2+4\pi^2 f^2)}$$

$$= \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[\frac{1}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)} - \frac{1}{(\beta^2+4\pi^2 f^2)}\right]$$

上式最后一步利用了部分分式展开。在此基础上，由表 2-1 得

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|} - \frac{1}{2\beta}e^{-\beta|\tau|}\right]$$

和

$$\mathscr{E}_y = R_y(0) = \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$ ◀

2.5.2 功率信号

对于功率信号，可进行类似的推导。此处定义功率信号 $x(t)$ 的时间平均自相关函数为

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{2.5.9}$$

92

显然，信号的功率可由下式求得

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\mathrm{d}t = R_x(0) \tag{2.5.10}$$

定义信号 $x(t)$ 的功率谱密度(或功率谱)$\mathcal{S}_x(f)$ 为时间平均自相关函数的傅里叶变换

$$\mathcal{S}_x(f) = \mathscr{T}[R_x(\tau)] \tag{2.5.11}$$

稍后将对此进行证明。现在，由于 $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}f\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(f)\mathrm{d}f$，可以利用 $\mathcal{S}_x(f)$ 来表示信号 $x(t)$ 的功率，即

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(f)\mathrm{d}f \tag{2.5.12}$$

如果功率信号 $x(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ 的滤波器，则输出信号为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

且输出信号的时间平均自相关函数为

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

将 $y(t)$ 代入上式，得

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)\mathrm{d}u\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau)x^*(t-\tau-v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}t$$

通过变量代换 $w=t-u$，并改变积分顺序，可得

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v) \\
&\quad\times \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-u}^{\frac{T}{2}+u}[x(w)x^*(u+w-\tau-v)\mathrm{d}w]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&\overset{a}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+v-u)h(u)h^*(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&\overset{b}{=} \int_{-\infty}^{\infty}[R_x(\tau+v) * h(\tau+v)h^*(v)\mathrm{d}v] \\
&\overset{c}{=} R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

93

其中(a)利用了式(2.5.9)关于 R_x 的定义，(b)和(c)利用了卷积的定义。上式两边求傅里叶变换，得

$$\mathcal{S}_y(f) = \mathcal{S}_x(f)H(f)H^*(f) = \mathcal{S}_x(f)\,|H(f)|^2 \tag{2.5.14}$$

上面输入-输出功率谱密度间的关系式类似于滤波器输入一输出能量谱密度间的关系式。因此，对于功率谱密度，也可以采用与能量谱密度相同的操作手法，即让信号通过一个带宽极窄的理想滤波器，则滤波器输出的功率可以视为输入信号在滤波器通频带范围内的那部分信号的功率。因此，可推得$\mathcal{S}_x(f)$正如上面定义的那样，表示信号各频率成分的功率。同时也说明，功率信号的功率谱密度是时间平均自相关函数的傅里叶变换。

已知周期信号是功率信号。对于周期信号而言，时间平均自相关函数和功率谱密度可以极度简化。设信号 $x(t)$是周期为 T_0的周期信号，其傅里叶级数的系数为$\{x_n\}$，则 $x(t)$的时间平均自相关函数为

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}\int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k}{kT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

将周期信号的傅里叶级数展开式代入上式，可得

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n x_m^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{m}{T_0}\tau}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n-m}{T_0}t}\,\mathrm{d}t \tag{2.5.16}$$

现在利用

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n-m}{T_0}t}\,\mathrm{d}t = \delta_{mn}$$

可得

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}\tau} \tag{2.5.17}$$

上式表明，周期信号的自相关函数也是周期信号，其周期与原信号相同，并且其傅里叶级数的系数就是原信号的傅里叶级数系数的平方。

只要知道 $R_x(\tau)$的傅里叶变换，就可以求得周期信号的功率谱密度。而周期信号的傅里叶变换由频域的冲激序列构成。周期信号可表示成正弦(或指数)信号之和的形式。因此，周期信号的功率谱密度可由下式求得

$$\mathcal{S}_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.5.18}$$

将上式在全频域进行积分，就可以得到周期信号的功率，即

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

上式与 2.2.3 节求得的公式相同。若周期信号通过频率响应为 $H(f)$的 LTI 系统，则输出也是周期信号。而且，如果利用滤波器输入-输出信号的功率谱密度的关系，就可以求得输出信号的功率谱密度。因此有

$$\mathcal{S}_y(f) = |H(f)|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \tag{2.5.19}$$

且输出信号的功率为

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2$$

2.6　希尔伯特变换及其性质

本节将介绍信号的希尔伯特(Hilbert)变换，并探讨其性质。希尔伯特变换与许多其他变换不同，它不包含域变换。而傅里叶变换、拉普拉斯(Laplace)变换和 z 变换都是由信号的时域描述等价地变换到频域(更确切的说法是变换域)，变换前后的两种形式是同一信号对两种不同变量，即时间和频率的等价表述。严格说来，希尔伯特变换与上述变换有本质区别。首先，希尔伯特变换的结果并不是原信号的等价表示，而是截然不同的另外一种信号。其次，希尔伯特变换不包含域变换，即信号 $x(t)$ 的希尔伯特变换是相同域(即都是时域，变量均为 t)的另外一种信号，记作 $\hat{x}(t)$。

95

信号 $x(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 的所有频率成分都比 $x(t)$ 对应的频率成分滞后 90°。换言之，$\hat{x}(t)$ 含有与 $x(t)$ 相同的频率成分，且幅度也相同，但是存在 90°的相位延迟。因此，$x(t)=A\cos(2\pi f_0t+\theta)$ 的希尔伯特变换是 $A\cos(2\pi f_0t+\theta-90^\circ)=A\sin(2\pi f_0t+\theta)$。

所有频率成分均延迟 $\frac{\pi}{2}$ 意味着复指数 $e^{j2\pi f_0 t}$ 将变为 $e^{j2\pi f_0 t-\frac{\pi}{2}}=-je^{j2\pi f_0 t}$，而 $e^{-j2\pi f_0 t}$ 将变为 $e^{-j(2\pi f_0 t-\frac{\pi}{2})}=je^{-j2\pi f_0 t}$。换言之，原信号的频谱在正频域乘以 $-j$，在负频域乘以 $+j$，即信号的频谱(即傅里叶变换)乘以 $-j\text{sgn}(f)$。本节假设信号 $x(t)$ 是实信号，且不包含直流分量，即 $X(f)|_{f=0}=0$。

因此有

$$\mathscr{T}[\hat{x}(t)]=-j\text{sgn}(f)X(f) \tag{2.6.1}$$

根据表 2-1，得

$$\mathscr{T}[-j\text{sgn}(f)]=\frac{1}{\pi t}$$

因此有

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi t}*x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \tag{2.6.2}$$

所以，希尔伯特变换是一种卷积运算，即滤波。

例 2.6.1　求信号 $x(t)=2\text{sinc}(2t)$ 的希尔伯特变换。

解： 可利用频域分析方法求解。根据傅里叶变换的展缩定理，得

$$\mathscr{T}[x(t)]=2\times\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{2}\right)=\Pi\left(\frac{f}{2}\right)=\Pi\left(f+\frac{1}{2}\right)+\Pi\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

上式中，第一项包含所有负频率，第二项包含所有正频率。

利用 $\mathscr{T}[\hat{x}(t)]=-j\text{sgn}(f)\mathscr{T}[x(t)]$，可得 $x(t)$ 的希尔伯特变换的频域表达式为

$$\mathscr{T}[\hat{x}(t)]=j\Pi\left(f+\frac{1}{2}\right)-j\Pi\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

96

利用傅里叶反变换，得

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=je^{-j\pi t}\text{sinc}(t)-je^{j\pi t}\text{sinc}(t)=-j(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t})\text{sinc}(t)\\&=-j\times 2j\sin(\pi t)\text{sinc}(t)=2\sin(\pi t)\text{sinc}(t)\end{aligned}$$

◀

显然，对信号进行希尔伯特变换等同于将该信号的所有频率成分相移 90°。因此，信号的希尔伯特变换改变的仅仅是信号的相位。也就是说，在希尔伯特变换过程中，信号各频率成分的幅度，以及信号的能量和功率均未发生变化。另外，正如余弦信号的希尔伯特变换是正弦信号，毋庸置疑，信号 $x(t)$ 与其希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 是正交的[⊖]。而且，由于希尔伯特变换引入了 90°相移，那么连续两次希尔伯特变换则导致 180°的相移，由此可得到

⊖ 若满足 $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt=0$，则称 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是正交的。

原信号的反相信号。以上是希尔伯特变换几个重要性质。假设$X(f)$在零频处无冲激，则可得到下列结论：

奇偶性。偶信号的希尔伯特变换是奇信号，奇信号的希尔伯特变换是偶信号。

证明：如果$x(t)$是偶信号，则$X(f)$是实偶函数；因此$-\mathrm{jsgn}(f)X(f)$是虚奇函数，则其傅里叶反变换$\hat{x}(t)$是奇函数。如果$x(t)$是奇信号，那么$X(f)$则是虚奇函数；因此$-\mathrm{jsgn}(f)X(f)$是实偶函数，则$\hat{x}(t)$是偶函数。

符号取反。对信号$x(t)$进行两次希尔伯特变换，得到的是信号的反信号，即

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t) \tag{2.6.3}$$

证明：由于

$$\mathscr{T}[\hat{\hat{x}}(t)] = [-\mathrm{jsgn}(f)]^2 X(f) \tag{2.6.4}$$

则有

$$\mathscr{T}[\hat{\hat{x}}(t)] = -X(f) \tag{2.6.5}$$

其中$X(f)$在零频无冲激。

能量。信号的能量与其希尔伯特变换的能量相等。

证明：由傅里叶变换的瑞利定理，有

[97]

$$\mathscr{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t == \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.6.6}$$

和

$$\mathscr{E}_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 \mathrm{d}t == \int_{-\infty}^{\infty} |-\mathrm{jsgn}(f)X(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.6.7}$$

除$f=0$外，等式$|-\mathrm{jsgn}(f)|^2=1$都成立，且$X(f)$在零频无冲激，得证。

正交。信号$x(t)$与其希尔伯特变换是正交的。

证明：由傅里叶变换的帕塞瓦尔定理，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,[-\mathrm{jsgn}X(f)]^* \mathrm{d}f \\ &= -\mathrm{j}\int_{-\infty}^{0} |X(f)|^2 \mathrm{d}f + \mathrm{j}\int_{0}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

上式最后一步利用了$X(f)$的埃尔米特对称性，因此$|X(f)|^2$是偶函数。

2.7 低通和带通信号

低通信号是频谱(频率成分)分布在零频附近的信号，而带通信号的频谱则分布在远离零频的某个频点f_c附近，且带通信号的带宽(信号的所有正频率的分布范围)通常远远小于f_c。

频率为f_c的单音信号是带通信号的极端情形。此信号带宽为零，一般可记作

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

此即正弦信号，可用相量表示为

$$x_l = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

注意，假定A为正，θ的取值范围是$-\pi$到π，如图2-50所示。

[98]

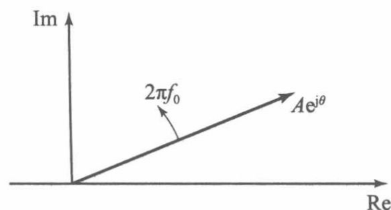


图 2-50 正弦信号对应的相量

相量的幅度为A，相位为θ。如果该相量以$\omega_c=2\pi f_c$的角速度逆时针旋转(相当于乘以$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}$)，即为$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t+\theta}$，其在实轴上的投影(即实部)为$x(t)=A\cos(2\pi f_c t+\theta)$。

将信号$x(t)$展开得

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta) \quad (2.7.1)$$
$$= A\cos(\theta)\cos(2\pi f_c t) - A\sin(\theta)\sin(2\pi f_c t) \quad (2.7.2)$$
$$= x_c\cos(2\pi f_c t) - x_s\sin(2\pi f_c t) \quad (2.7.3)$$

根据之前的讨论，单音信号包含两个分量：一个分量是 $x_c = A\cos\theta$，方向为 $\cos(2\pi f_c t)$，称为同相分量；另一个分量是 $x_s = A\sin\theta$，方向为 $-\sin(2\pi f_c t)$，称为正交分量。因此，相量还可以记作

$$x_l = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = x_c + \mathrm{j}x_s \quad (2.7.4)$$

有别于图 2-50 所示的相量，现在假定相量的幅度和相位随时间缓慢变化，即

$$x_l(t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \quad (2.7.5)$$

其中 $A(t)$ 和 $\theta(t)$ 是(相对于 f_c 而言)缓慢变化的信号。这样，类似于式(2.7.3)，有

$$x(t) = \mathrm{Re}\{A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi f_c t + \theta(t)]}\} \quad (2.7.6)$$
$$= A(t)\cos[\theta(t)]\cos(2\pi f_c t) - A(t)\sin[\theta(t)]\sin(2\pi f_c t) \quad (2.7.7)$$
$$= x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (2.7.8)$$

与前面的单音信号不同，该信号含有的频率有一定的范围，因此带宽不再为零。然而，由于幅度(也称为包络)和相位缓慢变化，该信号的所有频率分量仅分布在 f_c 周围一个很窄的范围内。此带通信号的频谱如图 2-51 所示。

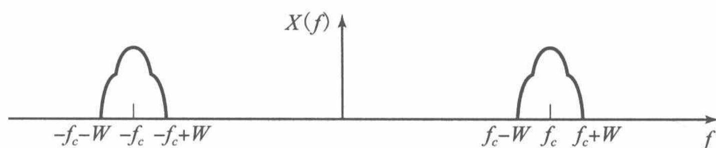


图 2-51　带通信号的频谱示意

此时，同相分量和正交分量分别为

$$x_c(t) = A(t)\cos[\theta(t)] \quad (2.7.9)$$
$$x_s(t) = A(t)\sin[\theta(t)] \quad (2.7.10)$$

99

且有

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (2.7.11)$$

注意，带通信号的同相分量和正交分量都是缓慢变化的信号，因此它们都是低通信号。

式(2.7.11)非常重要，表明一个带通信号都可以用两个低通信号，即其同相分量和正交分量来表示。

这样，低通复信号

$$x_l(t) = x_c(t) + \mathrm{j}x_s(t) \quad (2.7.12)$$

称为带通信号 $x(t)$ 的等效低通。如果用极坐标来表示 $x_l(t)$，有

$$x_l(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{x_s(t)}{x_c(t)}}$$

现在定义带通信号的包络和相位为

$$\begin{cases} |x_l(t)| = A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \angle x_l(t) = \theta(t) = \arctan\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)} \end{cases} \quad (2.7.13)$$

则 $x_l(t)$ 可以表示成

$$x_l(t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \quad (2.7.14)$$

根据式(2.7.14)和式(2.7.11)，有

$$x(t) = \mathrm{Re}[x_l(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}] \quad (2.7.15)$$

$$=\mathrm{Re}\{A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi f_c t+\theta(t)]}\} \tag{2.7.16}$$

$$=A(t)\cos[2\pi f_c t+\theta(t)] \tag{2.7.17}$$

式(2.7.17)和式(2.7.11)是用两个低通信号来表示带通信号的两种方法。一个带通信号既可以用其同相分量和正交分量的形式表示，也可以用其包络和相位的形式表示。

2.8 小结及深入阅读

本章简要复习了信号以及线性系统分析的基本表述和分类。内容包括周期信号的傅里叶级数表示和线性时不变(LTI)系统对于周期信号的响应，还包括傅里叶变换及其性质，信号和 LTI 系统的频域表述等。此外还讨论了低通和带通信号的表述，功率和能量信号，利用 MATLAB 设计滤波器、希尔伯特变换及其性质等。希尔伯特变换在模拟和数字信号的调制与解调中扮演重要角色。

100

有关 LTI 系统时频域分析的参考文献有很多。Oppenheim、Willsky 和 Young(1983)的著作对离散时间和连续时间系统的时频域分析有着全面的论述。Papoulis(1962)以及 Bracewell(1965)对傅里叶级数和变换进行了深入分析。Ingle 和 Proakis(2012)的著作则介绍了用 MATLAB 设计数字滤波器的技术。

习题

2.1 画出下列信号的波形：

1. $x_1(t)=\Pi(2t+5)$
2. $x_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(t-n)$
3. $x_3(t)=\mathrm{sgn}(2t)-\mathrm{sgn}(t)$
4. $x_4(t)=\mathrm{sinc}(10t)$

2.2 画出下列信号的离散形式。假设在 T_0 的整数倍时进行抽样，即 $x[n]=x(nT_0)$。

1. $x(t)=\mathrm{sinc}(3t)$ 且 $T_0=\frac{1}{9}$
2. $x(t)=\Pi\left(\frac{2t-1}{3}\right)$ 且 $T_0=\frac{1}{8}$
3. $x(t)=tu_{-1}(t)-(t-1)u_{-1}(t-1)$ 且 $T_0=\frac{1}{4}$

2.3 两信号 $x_1(t)=1$ 和 $x_2(t)=\cos 2\pi t$，在 $t=0$，±1，±2，…处抽样，所得离散时间信号记作 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$。试证 $x_1[n]=x_2[n]$。由此可得出什么结论？

2.4 证明两个离散周期信号之和还是周期信号，但两个连续周期信号之和未必是周期信号，并指出两个连续周期信号之和还是周期信号的条件。

2.5 验证下列信号是否是周期信号。如果是周期信号，求其周期。

1. $\sin(4000\pi t)+\cos(11\,000\pi t)$
2. $\sin(4000\pi t)+\cos(11\,000t)$
3. $\sin(4000\pi n)+\cos(11\,000\pi n)$
4. $\sin(4000\pi n)+\cos(11\,000n)$

2.6 将下列信号归为三类：偶信号，奇信号和非奇非偶信号。对于非奇非偶信号，求其奇部和偶部。

1. $x_1(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t} & t>0\\ -\mathrm{e}^{t} & t<0\\ 0 & t=0\end{cases}$
2. $x_2(t)=\cos\left(120\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$
3. $x_3(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$
4. $x_4(t)=\begin{cases}t & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$
5. $x_5(t)=x_1(t)-x_2(t)$，其中 $x_1(t)$ 是偶信号，$x_2(t)$ 是奇信号。

2.7 将下列信号归为三类：能量信号，功率信号和既非能量又非功率信号。对于能量信号和功率信号，分别求其能量和功率。

1. $x_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}\cos t)u_{-1}(t)$
2. $x_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos t$
3. $x_3(t)=\mathrm{sgn}(t)$
4. $x_4(t)=A\cos 2\pi f_1 t+B\cos 2\pi f_2 t$

2.8 将下列信号归为两类：周期信号和非周期信号。

1. $x_1(t)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{t-4n}{2}\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-4n)$
2. $x_2(t)=\sin t+\sin 2\pi t$
3. $x_3[n]=\sin n$

2.9 根据能量信号和功率信号的定义证明下列结论：

1. 证明信号 $x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\theta)}$ 是功率信号，功率为 A^2。
2. 证明信号 $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ 是功率信号，

功率为$\frac{A^2}{2}$

3. 证明单位阶跃信号 $u_{-1}(t)$是功率信号，并求其功率。

4. 证明信号

$$x(t)=\begin{cases}Kt^{-\frac{1}{4}} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}$$

既非能量信号，也非功率信号。

2.10 求信号 $x(t)=\Lambda(t)u_{-1}(t)$的奇部和偶部。

2.11 根据奇信号和偶信号的定义证明下列结论：

1. 证明信号分解为奇部和偶部之和的唯一性。
2. 证明两个奇信号或者两个偶信号的乘积是偶信号，而一个奇信号与一个偶信号的乘积是奇信号。
3. 试举一例，两个信号均非奇非偶，但两者的乘积是偶信号。

2.12 画出下列信号的波形：

1. $x_1(t)=\Pi(t)+\Pi(-t)$
2. $x_2(t)=\Lambda(t)\Pi(t)$
3. $x_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-2n)$
4. $x_4(t)=\text{sgn}(t)+\text{sgn}(1-t)$
5. $x_5(t)=\text{sinc}(t)\text{sgn}(t)$

2.13 利用冲激函数的性质，求下列表达式的值：

1. $x_1(t)=\text{sinc}(t)\delta(t)$
2. $x_2(t)=\text{sinc}(t)\delta(t-3)$
3. $x_3(t)=\Lambda(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$
4. $x_4(t)=\Lambda(t)*\delta'(t)$
5. $x_5(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\delta(3t)$
6. $x_6(t)=\delta(5t)*\delta(4t)$
7. $x_7(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}(t)\delta(t)\text{d}t$
8. $x_8(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}(t+1)\delta(t)\text{d}t$

2.14 证明冲激信号是偶信号。其 n 阶导数的奇偶性又如何呢？

2.15 已知 $x(t)*\delta(t)=x(t)$。证明

$$x(t)*\delta^{(n)}(t)=\frac{\text{d}^n}{\text{d}t^n}x(t)$$

和

$$x(t)*u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\text{d}\tau$$

2.16 将下列系统归为两类：线性系统和非线性系统。

1. $y(t)=2x(t)-3$
2. $y(t)=|x(t)|$
3. $y(t)=0$
4. $y(t)=2^{x(t)}$
5. $y(t)=\begin{cases}1 & x(t)>0\\ 0 & x(t)\leqslant 0\end{cases}$
6. $y(t)=\text{e}^{-t}x(t)$
7. $y(t)=x(t)u_{-1}(t)$
8. $y(t)=x(t)+y(t-1)$
9. $y(t)$为 $x(t)$在区间$(-\infty,t]$的跳变的代数和

2.17 证明系统是线性系统，当且仅当

1. 系统满足齐次性，即对于任意输入信号 $x(t)$和任意实数 α，有

$$\mathscr{T}[\alpha x(t)]=\alpha\mathscr{T}[x(t)]$$

2. 系统满足可加性，即对于任意输入信号 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，有

$$\mathscr{T}[x_1(t)+x_2(t)]=\mathscr{T}[x_1(t)]+\mathscr{T}[x_2(t)]$$

换言之，证明线性系统的定义式(2.1.39)和(2.1.40)是等价的。

2.18 验证习题 2.16 中的系统是否满足习题 2.17 所述的某个(或全部)条件。

2.19 证明如果某系统满足习题 2.17 所述的可加性，则对于任意有理数 α，该系统满足齐次性。

2.20 证明系统

$$y(t)\begin{cases}\frac{x^2(t)}{x'(t)} & x'(t)\neq 0\\ 0 & x'(t)=0\end{cases}$$

满足齐次性，但不是线性的。试再举出另一个该类系统的例子。

2.21 证明线性系统对于输入恒为零的响应也恒为零。

2.22 由输入-输出方程

$$y(t)=x(t)\cos(2\pi f_0t)$$

定义的系统称为调制器，其中 f_0 为常数。此系统是线性的吗？是时不变的吗？

2.23 判断下列表述的对错，并说明原因：

1. 系统的各组成部分是非线性的，则系统必然是非线性的。
2. 系统的各组成部分是时变的，则系统必然是时变的。
3. 因果系统对于因果信号的响应也是因果信号。

2.24 确定下列系统是时变系统还是时不变系统。

1. $y(t)=2x(t)+3$
2. $y(t)=(t+2)x(t)$
3. $y(t)=x(-t)$
4. $y(t)=x(t)u_{-1}(t)$
5. $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\text{d}\tau$
6. $y(t)=x(t)+y(t-1)$

2.25 证明：若某 LTI 系统对于 $x(t)$的响应是 $y(t)$，则此系统对于$\frac{\text{d}}{\text{d}t}x(t)$的响应是$\frac{\text{d}}{\text{d}t}y(t)$。

2.26 证明：若某 LTI 系统对于 $x(t)$ 的响应是 $y(t)$，则此系统对于 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的响应是 $\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau$。

2.27 某 LTI 系统对于输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ 的响应是 $\delta(t)$。根据时域分析和习题 2.25 的结论，求该系统的冲激响应。并求该系统对于一般信号 $x(t)$ 的响应通式。

2.28 系统由下式定义

$$y(t)=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

该系统是因果系统吗？

2.29 若 LTI 系统对于 $t<0$ 有 $h(t)=0$，则该 LTI 系统是因果系统。举出一个非线性因果系统，其冲激响应在 $t<0$ 时非零的例子。

2.30 确定以下列各式为冲激响应的 LTI 系统是否为因果系统。

1. $h(t)=\mathrm{sinc}(t)$
2. $h(t)=\Pi\left(\frac{t-3}{6}\right)$

2.31 利用卷积，证明 LTI 系统对于 $u_{-1}(t)$ 的响应为 $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$。

2.32 求微分器的冲激响应。并通过计算输入与冲激响应的卷积来求得系统对于任意输入 $x(t)$ 的输出。对于延迟系统，重复上述过程。

2.33 由

$$y(t)=\int_{t-T}^{T} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

定义的系统（T 为常数）是有限时间积分器。该系统是否为 LTI 系统？求该系统的冲激响应。

2.34 计算下列各卷积：

1. $\mathrm{e}^{-t}u_{-1}(t)*\mathrm{e}^{-t}u_{-1}(t)$
2. $\Pi(t)*\Lambda(t)$

2.35 证明：对于 LTI 因果系统，卷积可简化为

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

2.36 证明信号集 $\psi_n(t)=\sqrt{\frac{1}{T_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{n}{T_0}t}$ 构成了一个在区间 $[\alpha,\ \alpha+T_0]$（α 取任意值）的信号正交系。

2.37 本习题介绍柯西-施瓦兹（Cauchy-Schwartz）不等式的证明过程。

1. 证明：对于非负的 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ 和 $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

上式取等号的条件是什么？

2. 设 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ 为复数，证明

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i^*\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|x_iy_i^*\right|=\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i^*|$$

上式取等号的条件是什么？

3. 由(1)和(2)，可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i^*\right|\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

上式取等号的条件是什么？

4. 将以上结果扩展为积分形式，即证明柯西一施瓦兹不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

上式取等号的条件是什么？

2.38 设 $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 为含有 N 个信号的正交集，即

$$\int_{0}^{\infty}\phi_i(t)\phi_j^*(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1 & i\neq j\\0 & i=j\end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant N$$

且 $x(t)$ 为任意信号。令 $\hat{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\phi_i(t)$ 为信号 $x(t)$ 用 $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 表示的线性近似。求最小化

$$\varepsilon^2=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)-\hat{x}(t)|^2\mathrm{d}t$$

所需的 α_i 的值。

1. 证明最小值点 α_i 为

$$\alpha_i=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\phi_i^*(t)\mathrm{d}t$$

2. 证明当取 α_i 上述值时，有

$$\varepsilon_{\min}^2=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^2$$

2.39 求下列信号的傅里叶级数展开：

1. $x_1(t)=\cos(2\pi t)+\cos(4\pi t)$
2. $x_2(t)=\cos(2\pi t)-\cos(4\pi t+\pi/3)$
3. $x_3(t)=2\cos(2\pi t)-\sin(4\pi t)$
4. $x_4(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-2n)$
5. $x_5(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-2n)u_{-1}(t-n)$
6. $x_6(t)=|\cos(2\pi f_0t)|$（全波整流输出）

2.40 证明：一个实周期信号 $x(t)$ 的偶部和奇部可分别表示为

$$x_e(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)$$

$$x_o(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)$$

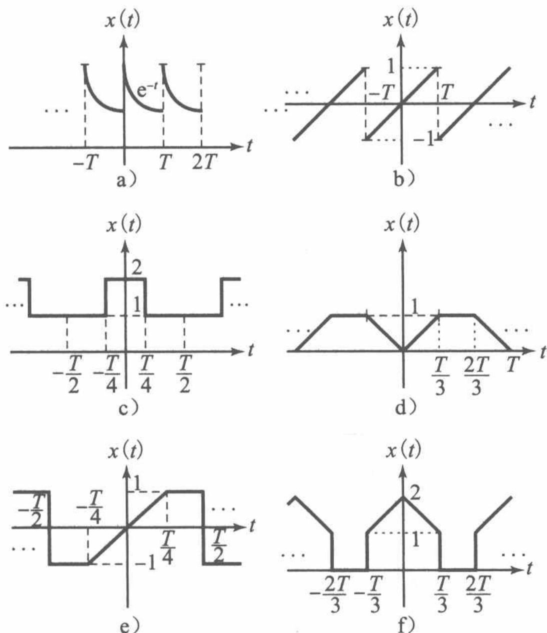
2.41 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数系数分别为 x_n 和 y_n，$x(t)$ 的周期为 T_0。就下列情形，用 x_n 表示 y_n。

1. $y(t)=x(t-t_0)$
2. $y(t)=x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0t}$
3. $y(t)=x(at)$，　$a\neq0$

2.42　设 $x(t)$和 $y(t)$是周期为 T_0的周期信号，其傅里叶级数系数分别为 x_n和 y_n，证明

$$\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n^*$$

2.43　求如习题 2.43 图所示各周期信号的傅里叶级数展开式。写出每个信号的三角傅里叶级数形式。



习题 2.43 图

2.44　若以习题 2.43 中的信号为输入，求下列 LTI 系统相应的输出。

1. $H(f)=10\Pi\left(\frac{f}{4}\right)$

2. $H(f)=\begin{cases}-j & 0<f\leqslant 4\\ j & -4\leqslant f<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

2.45　证明：对于所有功率有限的周期性物理信号，若其傅里叶级数展开的系数为 x_n，则当 $n\to\pm\infty$时，x_n的极限值为零。

2.46　求下列信号的傅里叶变换：

1. $x_1(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$

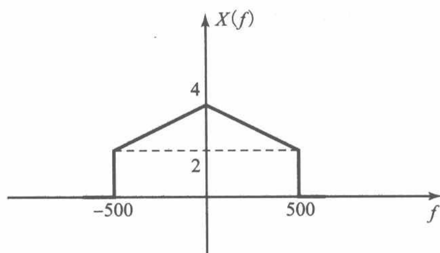
2. $x_2(t)=\Pi(t-3)+\Pi(t+3)$

3. $x_3(t)=4\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\cos(2\pi f_0 t)$

4. $x_4(t)=t\operatorname{sinc}(t)$

5. $x_5(t)=t\cos(2\pi f_0 t)$

2.47　某信号的傅里叶变换如习题 2.47 图所示。求 $x_1(t)=-x(t)+x(t)\cos(2000\pi t)+2x(t)\cos^2(3000\pi t)$的傅里叶变换，并画出草图。



习题 2.47 图

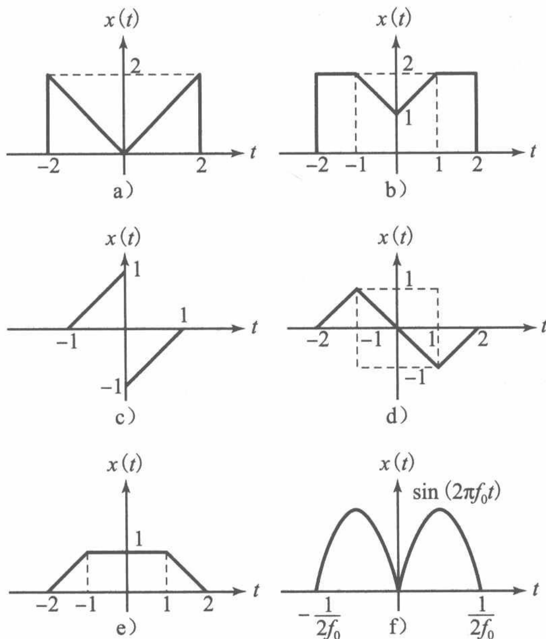
2.48　根据下列第一个等式，证明后两个傅里叶变换对：

$$\mathscr{T}\left[\frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]=\cos(\pi f)$$

$$\mathscr{T}[\cos(\pi t)]=\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathscr{T}[\sin(\pi t)]=\frac{j}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)-\frac{j}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

2.49　求如习题 2.49 图所示各信号的傅里叶变换。



习题 2.49 图

2.50　利用卷积定理证明

$$\operatorname{sinc}(t) * \operatorname{sinc}(t) = \operatorname{sinc}(t)$$

2.51　证明频域的卷积等价于时域的相乘，即

$$\mathscr{T}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$$

2.52　设 $x(t)$为任意信号，并定义 $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$

1. 证明 $x_1(t)$是周期信号。

2. 用 $x(t)$和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$ 表示 $x_1(t)$。

3. 用 $x(t)$的傅里叶变换表示 $x_1(t)$的傅里叶变换。

2.53　利用傅里叶变换的性质，求下列积分（α 为正）

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^5(t)\mathrm{d}t$
2. $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{sinc}(t)\mathrm{d}t$
3. $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t)\mathrm{d}t$

2.54　某 LTI 系统的冲激响应为 $h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)$，系统输入为 $x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u_{-1}(t)$。设 $\alpha,\ \beta>0$，利用频域分析，求该系统的输出。指明输出是能量信号还是功率信号，并求其能量或功率。

2.55　设 $x(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号，且 $0\leqslant\alpha<T_0$。定义

$$x_\alpha(t)=\begin{cases}x(t) & \alpha\leqslant t<\alpha+T_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

若 $x_\alpha(t)$ 的傅里叶变换为 $X_\alpha(f)$，证明对于所有 n，$X_\alpha\left(\frac{n}{T_0}\right)$ 与 α 的取值无关。

2.56　利用恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi t}{T_s}}$$

证明对于任意 $x(t)$ 和 T_s，下列等式成立

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{n}{T_s}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi t}{T_s}}$$

基于此，可得泊松(Poisson)求和公式如下：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{n}{T_s}\right)$$

2.57　利用习题 2.56 的泊松求和公式，证明：

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha|n|}$
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{K}\right)=K,K\in\{1,2,\cdots\}$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{K}\right)=K,K\in\{1,2,\cdots\}$

2.58　某 LTI 系统对于 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)$，$\alpha>0$ 的响应为 $\delta(t)$。利用频域分析技术，求该系统对于信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t)u_{-1}(t)$ 的响应。

2.59　按照下列给定的系统冲激响应 $h(t)$ 和系统输入 $x(t)$，求系统的输出：

1. $h(t)=\mathrm{sinc}(t)\quad x(t)=\mathrm{sinc}(t)$
2. $h(t)=\delta(t)+\delta'(t)\quad x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$，$(\alpha>0)$
3. $h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u_{-1}(t)\quad x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u_{-1}(t)$，$(\alpha,\beta>0)$（$\alpha=\beta$ 的情形要单独考虑）

2.60　LTI 系统对于 $x(t)=\mathrm{sinc}(t)$ 的响应可以是 $y(t)=\mathrm{sinc}^2(t)$ 吗？请验证。

2.61　若某 LTI 系统对于 $\Pi(t)$ 的响应为 $\Lambda(t)$，

1. 求该系统对于 $x(t)=\cos 2\pi t$ 的响应。
2. 证明该系统的冲激响应可以是 $h_1(t)=\Pi(t)$ 或 $h_2(t)=\Pi(t)+\cos 2\pi t$。这表明，仅仅知道某系统对于 $\Pi(t)$ 的响应并不足以唯一确定该系统。
3. 已知某 LTI 系统对于 $u_{-1}(t)$ 的响应，可以唯一确定该系统么？当 $\alpha>0$ 时，系统对于 $\mathrm{e}^{\alpha tu}_{-1}(t)$ 的响应如何？如果输出已知，输入信号 $x(t)$ 必须满足什么条件才能唯一确定一个系统？

2.62　证明 $A\sin(2\pi f_0+\theta)$ 的希尔伯特变换为 $-A\cos(2\pi f_0+\theta)$。

2.63　证明信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$ 的希尔伯特变换为 $-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$。

2.64　证明下式：

$$\mathscr{T}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t)\right]=2\pi|f|\,\mathscr{T}[x(t)]$$

2.65　证明信号的导数的希尔伯特变换等于其希尔波特变换的导数。

2.66　某实窄带信号 $x(t)$ 的频率成分分布在某频率 f_0（以及 $-f_0$）周围。该信号经过传递函数为 $H(f)$ 的滤波器，输出记作 $y(t)$。传递函数的幅度为 $A(f)$，相位为 $\theta(f)$。假设滤波器的传递函数足够平滑，也就是说，在输入信号的带宽范围内，传递函数的幅度基本保持不变，相位可近似由一阶泰勒级数展开表示，即

$$A(f)\approx A(f_0)$$

$$\theta(f)\approx\theta(f_0)+(f-f_0)\theta'(f)\Big|_{f=f_0}$$

1. 证明：输出信号的等效低通的傅里叶变换 $Y_l(f)$ 可以写成

$$Y_l(f)\approx X_l(f)A(f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta(f_0)+(f)\theta'(f)|_{f=f_0}]}$$

2. 推导下式

$$y(t)\approx A(f_0)+V_x(t-t_g)\cos(2\pi f_0 t-t_p)$$

其中 $V_x(t)$ 是输入信号 $x(t)$ 包络，且

$$t_g=-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta(f)}{\mathrm{d}f}\Big|_{f=f_0}$$

$$t_p=-\frac{1}{2\pi}\frac{\theta(f)}{f}\Big|_{f=f_0}$$

3. t_g 和 t_p 分别称为包络延迟（或者群延迟）和相位延迟。请分析它们的作用，并说明术语的含义。

2.67　已知希尔伯特变换对信号造成 90° 的相移，且正交滤波器的传递函数如下

$$H(f)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}} & f>0\\ 0 & f=0\\ \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} & f<0\end{cases}$$

可将此扩展为一种新的变换，此变换可以按照下式所示

$$H_\theta(f)=\begin{cases}e^{-j\theta} & f>0\\0 & f=0\\e^{j\theta} & f<0\end{cases}$$

对信号的频率成分相移 θ。若变换结果用 $x_\theta(t)$ 表示，则 $x_\theta(t)$ 的傅里叶变换 $X_\theta(f)=X(f)H_\theta(f)$。假设信号 $x(t)$ 不包含直流分量。

1. 求完成上述变换的滤波器的冲激响应 $h_\theta(t)$。
2. 证明 $x_\theta(t)$ 是 $x(t)$ 及其希尔伯特变换的线性组合。
3. 证明：若 $x(t)$ 是能量信号，则 $x_\theta(t)$ 亦是能量信号，且其能量与 $x(t)$ 的能量相等。

101 ~ 113

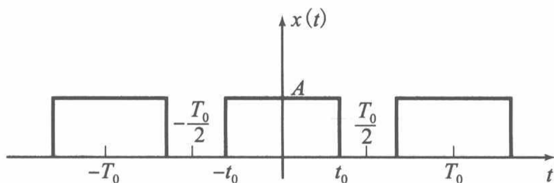
上机习题

2.1 傅里叶级数

本题目的是计算一个周期信号的傅里叶级数并画图。周期为 T_0 的周期信号 $x(t)$ 定义为

$$x(t)=A\Pi\left(\frac{t}{2t_0}\right)=\begin{cases}A & |t|\leqslant t_0\\0 & 其他\end{cases}$$

其中 $|t|\leqslant T_0/2$，$t_0<T_0/2$。$x(t)$ 的图形如上机习题 2.1 图所示。令 $A=1$，$T_0=4$，$t_0=1$。



上机习题 2.1 图 信号 $x(t)$

1. 证明 $x(t)$ 的傅里叶级数系数的数学表述为

$$x_n=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

2. 用 MATLAB 画出原信号 $x(t)$ 以及 $n=1,3,5,7,9$ 时一个周期内 $x(t)$ 的傅里叶级数近似。注意，随着 n 的增大，近似级数会越来越逼近原信号 $x(t)$。
3. 画出 $|n|\leqslant 20$ 的离散幅度谱 $|x_n|$ 和相位谱 $\angle x_n$。

2.2 周期信号的滤波

本题目的是阐明周期信号通过 LTI 系统之后的效果。设周期信号 $x(t)$ 是周期为 $T_0=2$ 的三角脉冲序列，一个周期内的定义式如下

$$\Lambda(t)=\begin{cases}t+1 & -1\leqslant t\leqslant 0\\-t+1 & 0\leqslant t\leqslant 1\\0 & 其他\end{cases}$$

LTI 滤波器的频率响应特性为

$$H(f)=\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$$

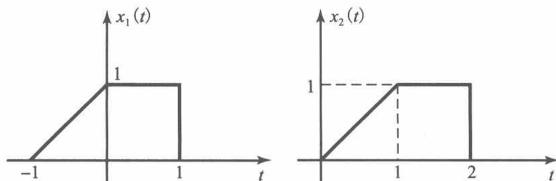
1. 证明 $x(t)$ 的傅里叶级数系数的数学表述为

$$x_n=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

2. 用 MATLAB 画出 $0\leqslant|n|\leqslant 10$ 时的谱 $\{x_n\}$。
3. 由于输入信号 $x(t)$ 的主频 $F_0=1/T_0=1/2$，滤波器输出的傅里叶级数系数 $y_n=x_nH(n/2)$。画出滤波器输出的离散谱 $\{y_n\}$。
4. 在同一幅图中，画出 $n=1,3,5,7,9$ 时滤波器输出信号的傅里叶级数近似。

2.3 傅里叶变换

画出如上机习题 2.3 图所示两信号的幅度谱和相位谱。注意，信号 $x_2(t)$ 是信号 $x_1(t)$ 的时移版本，因此两者应该有相同的幅度谱。



上机习题 2.3 图 信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$

2.4 LTI 系统的频域分析

信号

$$x(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\geqslant 0\\0 & t<0\end{cases}$$

通过频率响应为

$$H(f)=\begin{cases}\cos(\pi f/3) & |f|\leqslant 1.5\text{Hz}\\0 & 其他\end{cases}$$

1. 求输入信号 $x(t)$ 的幅度谱和相位谱，并画出图形。
2. 求输出信号 $y(t)$ 的幅度谱和相位谱，并画出图形。
3. 用 MATLAB 计算输出信号的傅里叶反变换，并画出图形。

2.5 由带通到低通的变换

信号

$$x(t)=\operatorname{sinc}(100t)\cos(400\pi t)$$

是带通信号，其频率成分集中在 $f_0=200\text{Hz}$ 附近。

1. 画出 $x(t)$ 及其幅度谱 $|X(f)|$ 的图形。
2. 已知 $f_0=200\text{Hz}$，求 $x(t)$ 的等效低通信号，并画出幅度谱。画出 $x(t)$ 的同相分量，正交分量和包络的图形。

2.6 FIR 滤波器设计

利用 MATLAB 的 remez 函数设计最低阶数(最小长度)的 FIR 低通滤波器，滤波器指标如下：

通频带：$0\leqslant\omega\leqslant 0.4\pi$

阻频带：$0.5\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$

通频带起伏：0.5dB

阻频带衰减：40dB

1. 画出 FIR 滤波器的冲激响应系数。

2. 画出该滤波器频率响应的幅度和相位曲线。

2.7 FIR 希尔伯特变换滤波器

利用 Remez 函数设计满足下列指标的 FIR 希尔伯特变换滤波器：

通频带：$0.1\pi \leqslant |\omega| \leqslant 0.5\pi$

阻频带：$0.6\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$

114 ~ 116

通频带起伏：$\delta_1 = 0.01$

阻频带衰减：$\delta_2 = 0.01$

1. 画出 FIR 滤波器的冲激响应系数。

2. 画出该滤波器频率响应的幅度曲线。

2.8 FIR 微分器

利用 remez 函数设计一个 25 抽头的 FIR 微分器，其通频带范围为 $0.1\pi \leqslant \omega \leqslant 0.6\pi$。

1. 画出滤波器的冲激响应曲线。

2. 画出滤波器频率响应的幅度。

3. 产生 100 个正弦信号

$$x(n) = 5\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad n = 0,1,\cdots$$

的抽样数据，作为微分器的输入信号。画出滤波器的输出 $y(n)$，并与 $x(n)$ 比较。注意，FIR 滤波器有 12 抽样的延迟。

第3章
幅度调制

大量信源产生的都是模拟信号。模拟信号可以直接进行调制和传输，也可以将其数字化，再利用数字调制技术进行传输。模数转换的内容将在第7章详细介绍。

语音、音乐、图像和视频等都是模拟信号。这些信号可由带宽、动态范围和自身特性来描述。例如，对于音频和黑白视频信号，只需要一个参数，用来衡量气压或亮度；但对于彩色视频信号，则需要四个参数，即红、绿、蓝以及亮度。除了这四路视频信号之外，在彩色广播电视中还有一路携带了音频信息的音频信号。在所占带宽方面，各种模拟信号呈现出极大的差异。例如，语音信号的带宽至多为4kHz，音乐信号的带宽通常为20kHz，而视频信号的带宽则高得多，约为6MHz。

尽管用数字方式传输模拟信号是大势所趋，但信号的模拟传输方式至今仍大量存在，特别是在音频和视频广播领域。第3章和第4章将介绍利用载波调制的方式传输模拟信号(这些系统在有噪环境下的系统性能将在第6章讨论)，即用正弦载波的幅度、频率和相位载荷模拟信号的方式实现模拟信号的传输。同时，也会给出解调载波调制信号以恢复原信号的方法。本章讨论幅度调制(AM)系统，即载波的幅度受调制信号控制。第4章讨论相位和频率调制系统，即载波的相位或频率随调制信号的变化而变化。

3.1 调制简介

待传输的模拟信号(又称调制信号)记作 $m(t)$，通常是带宽为 W 的低通信号；换言之，当 $|f|>W$ 时，$M(f)\equiv 0$。信号的功率为

$$P_m = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|m(t)|^2\mathrm{d}t$$

调制信号 $m(t)$ 由如下式所示载波载荷，并通过信道传输

$$c(t) = A_c\cos(2\pi f_c t + \phi_c) \tag{3.1.1}$$

其中，A_c 为载波幅度，f_c 为载波频率，ϕ_c 为载波初相，ϕ_c 的取值与时间原点的选取有关。通常，可选择时间原点使 $\phi_c=0$。若已调信号的幅度、频率或相位是调制信号的函数，则称调制信号 $m(t)$ 调制了载波信号 $c(t)$。事实上，调制的结果是将调制信号 $m(t)$ 由一个低通信号转换为一个在载频 f_c 附近的带通信号。

用消息信号 $m(t)$ 调制载波信号 $c(t)$，主要是为了达到下列某个或多个目的：

(1)将低通信号的频率成分变换至信道的通频带内，使得待传送信号的频谱与信道的通频带特性相匹配。例如，通过微波链路电话传输系统传送语音信号，为了保证信号能够顺利通过该信道，传输频率必须增加至GHz频段。这意味着，必须使用单一调制技术或者复合调制技术，将语音信号从低频段(至多4kHz)变换至GHz频段。

(2)采用较高频率可以简化发射机的结构。例如，利用电磁波进行信息传输时，低频信号的发射需要大尺寸的天线。通过调制可以将信号频带变换至高频，从而减小了发射机的天线尺寸，简化了发射机(和接收机)的结构。

(3)实现频分复用(FDM，参见3.4节)以容纳来自多个信源的信号同时传输。

(4)可以扩展传输信号的带宽，从而增强信号在利用有噪信道传输时的抗噪声和抗干扰性能。

本章介绍的所有调制方法均可实现目标(1)(2)和(3)。目标(4)的实现需要利用角度调制来扩展信号 $m(t)$ 的带宽。第 4 章将讨论角度调制。

118

随后几节将介绍模拟信号的载波幅度调制(AM)的发射和接收，并比较这些调制方法所需的带宽和实现复杂度。这些调制方法在抗加性噪声干扰以及功率效率方面的性能将在第 6 章讨论。

3.2 幅度调制

在幅度调制中，调制信号 $m(t)$ 控制载波信号 $c(t)=A_c\cos(2\pi f_c t)$，这导致正弦信号 $c(t)$ 的幅度成为调制信号 $m(t)$ 的函数。$m(t)$ 调制载波信号幅度的方法有多种，所得已调信号的频谱特性各不相同。下面将介绍这些方法，依次为(a)双边带抑制载波(DSB-SC)幅度调制，(b)常规双边带幅度调制，(c)单边带(SSB)幅度调制，(d)残留边带(VSB)幅度调制。

3.2.1 双边带抑制载波幅度调制(DSB-SC AM)

将调制信号 $m(t)$ 与载波信号 $c(t)=A_c\cos(2\pi f_c t)$ 相乘就是 DSB-SC AM，相应的调幅信号为

$$u(t) = m(t)c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

调制信号 $m(t)$，载波信号 $c(t)$ 以及已调信号 $u(t)$ 的示例如图 3-1 所示。由图中可以看出，变化相对缓慢的调制信号 $m(t)$ 变成了快速变化的已调信号 $u(t)$。这种随时间快速变化的波形表明 $u(t)$ 含有高频分量。同时，$u(t)$ 还保留了 $m(t)$ 的主要特征，可用于在接收端恢复 $m(t)$。

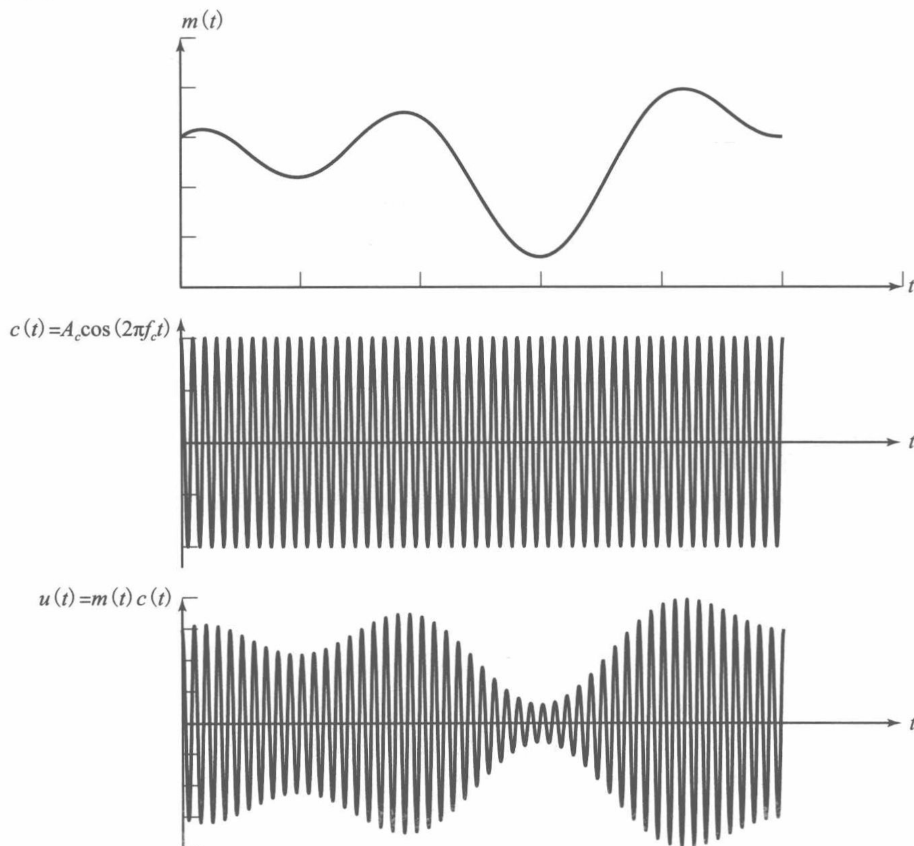


图 3-1 调制信号、载波信号以及已调 DSB-BC 信号的示例

DSB-SC 调幅信号的频谱。对 $u(t)$进行傅里叶变换，可得已调信号的频谱，再结合例 2.3.14的结果，可知

$$U(f)=\frac{A_c}{2}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]$$

图 3-2 分别给出了 $M(f)$和 $U(f)$的幅度谱和相位谱。

调制信号 $m(t)$的幅度谱已经被变换或者说平移了 f_c。此外，若调制信号 $m(t)$的带宽为 W，则调幅信号的带宽为 $2W$。因此，要传输已调信号 $u(t)$，所需信道带宽为 $B_c=2W$。

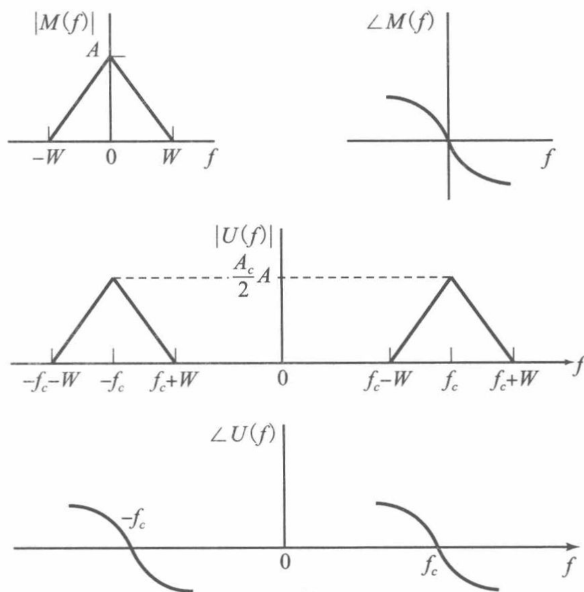


图 3-2 调制信号 $m(t)$和 DSB AM 已调信号 $u(t)$的幅度谱和相位谱示例

已调信号 $u(t)$在频带 $|f|>f_c$ 的频率分量称为$U(f)$的上边带，在频带 $|f|<f_c$ 的频率分量称为$U(f)$的下边带。特别需要注意的是，$U(f)$的上下边带都含有 $M(f)$的所有频率分量。即$U(f)$中 $f>f_c$ 的频率分量对应于 $M(f)$中 $f>0$ 的部分，而$U(f)$中 $f<-f_c$ 的频率分量对应于 $M(f)$中 $f<0$ 的部分。因此，$U(f)$的上边带含有 $M(f)$的所有频率分量。同样的结论也适用于$U(f)$的下边带，即 $U(f)$的下边带也含有 $M(f)$的所有频率分量。由于 $U(f)$含有上下两个边带，故称为双边带(DSB)调幅信号。

119

已调信号 $u(t)$的另一个特征是自身不包含载波分量，即发射功率全部用于调制(消息)信号 $m(t)$。$U(f)$频谱将这一点表露无遗。只要 $m(t)$不含有直流分量，则 $U(f)$在 $f=f_c$ 处就没有冲激信号；而如果已调信号 $u(t)$中含有载波分量，则 $U(f)$在 $f=f_c$ 处就会出现冲激信号。基于此，$u(t)$称为抑制载波(SC)信号，所以，$u(t)$是 DSB-SC 调幅信号。

例 3.2.1 设调制信号 $m(t)$为具有如下形式的正弦波

$$m(t)=a\cos(2\pi f_m t)\quad f_m\ll f_c$$

求 DSB-SC 调幅信号，及其上下边带。

解：DSB-SC 调幅信号在时域表述为

$$u(t)=m(t)c(t)=A_c a\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)=\frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c-f_m)t]+\frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t]$$

等式两边进行傅里叶变换，则已调信号在频域表述为

$$U(f)=\frac{A_c a}{4}[\delta(f-f_c+f_m)+\delta(f+f_c-f_m)]+\frac{A_c a}{4}[\delta(f-f_c-f_m)+\delta(f+f_c+f_m)]$$

$u(t)$的频谱如图 3-3a 所示。

$u(t)$的下边带为

120～121

$$u_l(t)=\frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c-f_m)t]$$

其频谱如图 3-3b 所示。

最后，$u(t)$的上边带为

$$u_u(t)=\frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t]$$

其频谱如图 3-3c 所示。

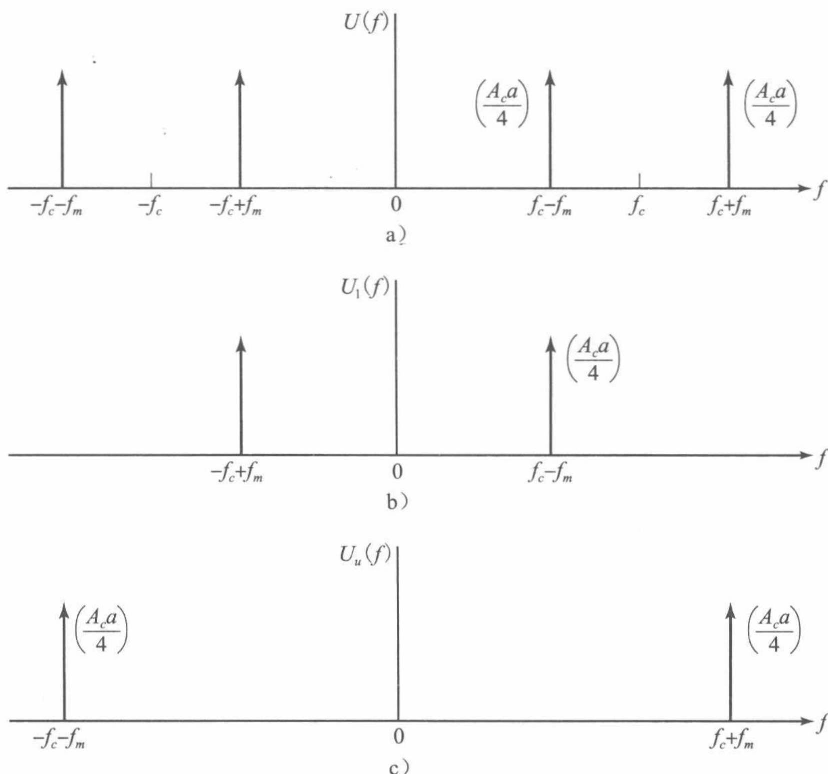


图 3-3 a)正弦调制信号的 DSB-SC AM 幅度谱及其 b)下边带和 c)上边带 ◀

例 3.2.2 调制信号 $m(t)=\text{sinc}(10^4 t)$，若载波是频率为 1MHz 的正弦波，求 DSB-SC 调幅信号及其带宽。

解：在本例中，$c(t)=\cos(2\pi\times 10^6 t)$。因此，$u(t)=\text{sinc}(10^4 t)\cos(2\pi\times 10^6 t)$，如图 3-4 所示。要求已调信号的带宽，首先需要知道调制信号的带宽。由 $M(f)=\mathscr{F}[\text{sinc}(10^4 t)]=10^{-4}\Pi(10^{-4}f)$，可知调制信号的傅里叶变换在 $-5000\sim 5000$Hz 频率范围内为常数，在其他频率处为零。因此，调制信号的带宽 $W=5000$Hz，而已调信号的带宽是调制信号带宽的两倍，即 10 000Hz(10kHz)。 ◀

122

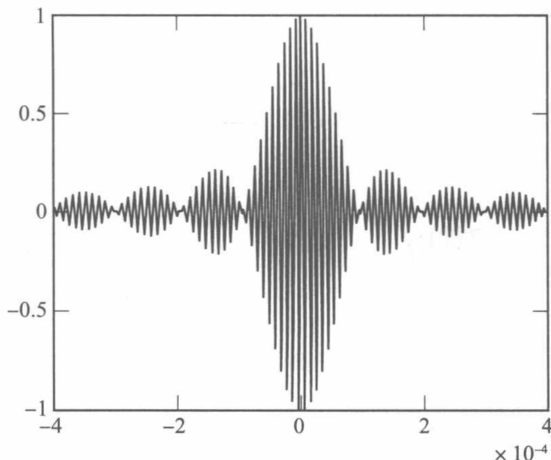


图 3-4 $u(t)=\text{sinc}(10^4 t)\cos(2\pi\times 10^6 t)$的波形

DSB-SC 调幅信号的功率。 利用式(2.1.11)，即信号功率的定义式，可以计算 DSB-SC 信号的功率，因此有

$$
\begin{aligned}
P_u &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A_c^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)[1-\cos(4\pi f_c t)]\mathrm{d}t \qquad (3.2.1)\\
&= \frac{A_c^2}{2}P_m \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

其中，P_m 表示调制信号 $m(t)$的功率。最后一步的依据是：$m^2(t)$是一个缓慢变化的信号，与高频正弦信号 $\cos(4\pi f_c t)$相乘后，就得到一个包络缓慢变化的高频正弦信号，如图 3-5所示。

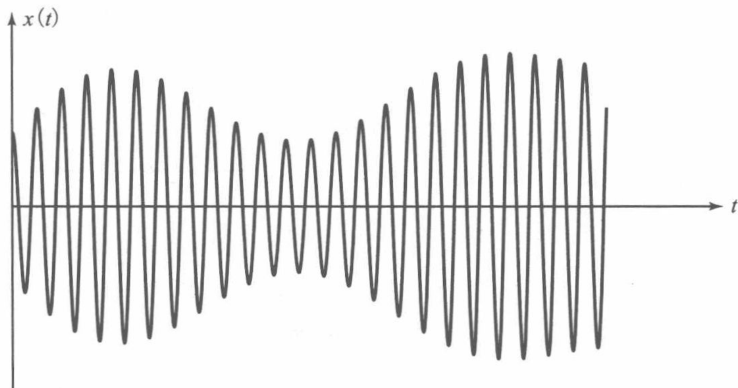


图 3-5 $m^2(t)\cos(4\pi f_c t)$的波形

由于包络是缓慢变化的，因此可以认为每个周期的正负半边的幅度几乎相等。于是，积分时两者相互抵消，即$m^2(t)\cos(4\pi f_c t)$的积分几乎总为零，如图 3-6 所示。再加上积分的结果还要除以 T，当 T 非常大时，式(3.2.1)的第二项为零。

123

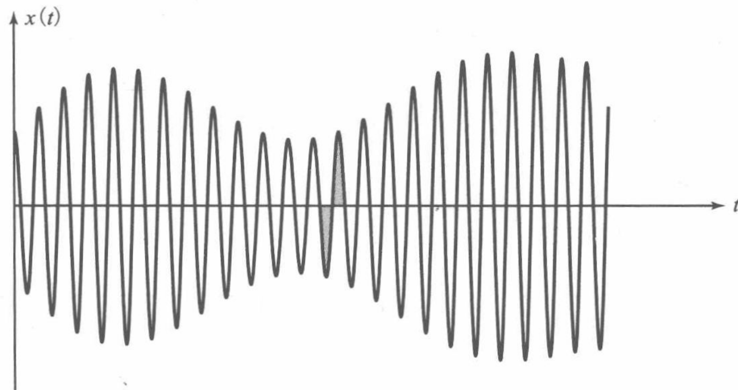


图 3-6 式(3.2.1)第二项为零的图解

例 3.2.3 求例 3.2.1 中已调信号及其两个边带的功率。

解： 已知调制信号 $m(t)=a\cos(2\pi f_m t)$。其功率可依据例 2.1.10 和式(2.1.12)求得

$$P_m=\frac{a^2}{2}$$

及

$$P_u=\frac{A_c^2}{2}P_m=\frac{A_c^2a^2}{4}$$

124

由于上下边带的对称性，上下边带的功率相等，为

$$P_{us}=P_{ls}=\frac{A_c^2a^2}{8}$$

◀

DSB-SC 调幅信号的解调。 假设 DSB-SC 调幅信号 $u(t)$通过理想信道(没有信道失真和噪声)传输，则接收信号与已调信号相同，即

$$r(t)=u(t)=A_c m(t)A_c\cos(2\pi f_c t) \tag{3.2.3}$$

若对接收信号 $r(t)$进行解调，不妨先将 $r(t)$与本地(接收端)生成的正弦信号 $\cos(2\pi f_c t+\phi)$相乘，其中 ϕ 为正弦信号的初相。然后再将得到的乘积通过带宽为 W 的理想低通滤波器。$r(t)$与 $\cos(2\pi f_c t+\phi)$的乘积为

$$\begin{aligned}r(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)&=A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t+\phi)\\&=\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi)+\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(4\pi f_c t+\phi)\end{aligned}$$

信号的频谱如图 3-7 所示。由于调制信号 $m(t)$ 的频率分量最高为 WHz，其中 $W \ll f_c$，因此可以设计一个低通滤波器，能够滤除以 $2f_c$ 为中心的频率分量，而让以 $f=0$ 为中心的频率分量无损地通过。完成此任务的理想低通滤波器也在图 3-7 中给出。因此，理想低通滤波器的输出为

$$y_l(t) = \frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi) \qquad (3.2.4)$$

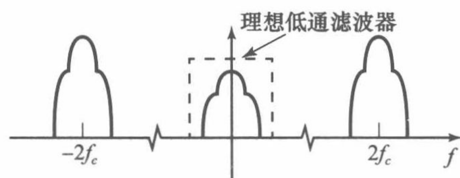


图 3-7　DSB-SC AM 解调的频域示意

注意，由于 $m(t)$ 与 $\cos(\phi)$ 相乘，因此，解调输出信号的功率以因子 $\cos^2(\phi)$ 衰减，即输出信号的幅度受本地生成正弦信号的初相 ϕ 的影响。若 $\phi \neq 0$，则输出信号的幅度下降。

125

如果 $\phi=45°$，输入信号的幅度下降$\sqrt{2}$倍，而信号的功率减少一半。如果 $\phi=90°$，则输出信号彻底消失。

上述讨论表明，从接收信号中恢复调制信号 $m(t)$，需要相位相干或同步解调器。即本地生成的正弦信号的初相 ϕ 在理想情况下应当为零(或者说与接收载波信号同相)。

有两种方法可以生成与接收载波同相的正弦信号。一种方法是在发射信号中加入载波分量，如图 3-8 所示。此载波分量称为“导频音”，其幅度 A_p 和功率$A_p^2/2$要远小于已调信号 $u(t)$ 的幅度和功率。这样，发射信号仍是双边带，但不再是抑制载波信号。在接收端，利用一个调谐到载频 f_c 的窄带滤波器将导频信号滤出，并与接收信号相乘，如图 3-9 所示。可以看出，由于导频信号的存在，解调输出信号会出现直流成分，为了恢复 $m(t)$，必须将直流分量去除。

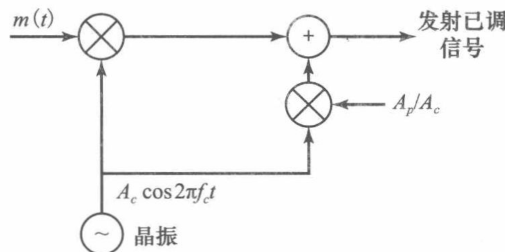


图 3-8　在 DSB-SC 调幅信号中增加导频音

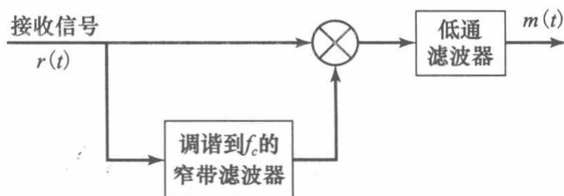


图 3-9　利用导频音解调 DSB-SC 调幅信号

在发射信号中添加导频音的方法存在一个缺点：发射信号的一部分功率必须用于发射导频。另一种方法不需要导频，而是通过锁相的方法利用接收信号 $r(t)$ 产生同相的正弦载波。此方法的实现要用到锁相环，将在 8.8.1 节讲述。

3.2.2　常规幅度调制

常规调幅信号较 DSB-SC 调幅信号多了一个大载波分量。发射信号的数学表达式为

126

$$u(t) = A_c[1+m(t)]\cos(2\pi f_c t) \qquad (3.2.5)$$

其中调制信号 $m(t)$ 的波形需要满足 $|m(t)| \leqslant 1$。$A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$ 是 DSB 调幅信号，而 $A_c\cos(2\pi f_c t)$ 是载波分量。图 3-10 给出了某调幅信号的时域波形。在本章稍后部分就可以看到，此载波分量的存在会极大简化解调器的结构。这正是商用调幅广播通常使用此调制方式的原因。

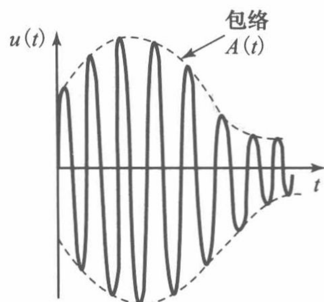


图 3-10　常规调幅信号的时域波形

只要 $|m(t)| \leqslant 1$，幅度 $A_c[1+m(t)]$ 总是非负，这是常规 DSB 调幅信号易于解调的必要条件。另一方面，对于某些 t，如果$m(t)<-1$，则调幅信号是过调制的，解调过程就会复杂得多。在实际应用中，$m(t)$ 常成比例地缩小，使其幅度总是小

于一个单位。

有时为了方便起见，可将 $m(t)$ 表示成

$$m(t) = am_n(t)$$

其中 $m_n(t)$ 经过了归一化处理，使得其最小值为 -1，即

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max|m(t)|}$$

此处，比例因子 a 称为调制指数，通常是一个小于 1 的常数。由于 $|m_n(t)| \leqslant 1$，且 $0 < a < 1$，则有 $1 + am_n(t) > 0$，于是已调信号可以表示为

$$u(t) = A_c[1 + am_n(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{3.2.6}$$

该信号绝不会出现过调制的情况。

常规调幅信号的频谱。设调制信号 $m(t)$ 的傅里叶变换(频谱)为 $M(f)$，则常规调幅信号的频谱为

$$\begin{aligned} U(f) &= \mathscr{T}[A_c a m_n(t)\cos(2\pi f_c t)] + \mathscr{T}[A_c\cos(2\pi f_c t)] \\ &= \frac{A_c a}{2}[M_n(f - f_c) + M_n(f + f_c)] + \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \end{aligned}$$

127

调制信号 $m(t)$，$m(t)$ 的频谱 $M(f)$，相应的已调信号 $u(t)$ 及其频谱 $U(f)$ 的图形如图 3-11 所示。显然，常规调幅信号的带宽是调制信号带宽的两倍。

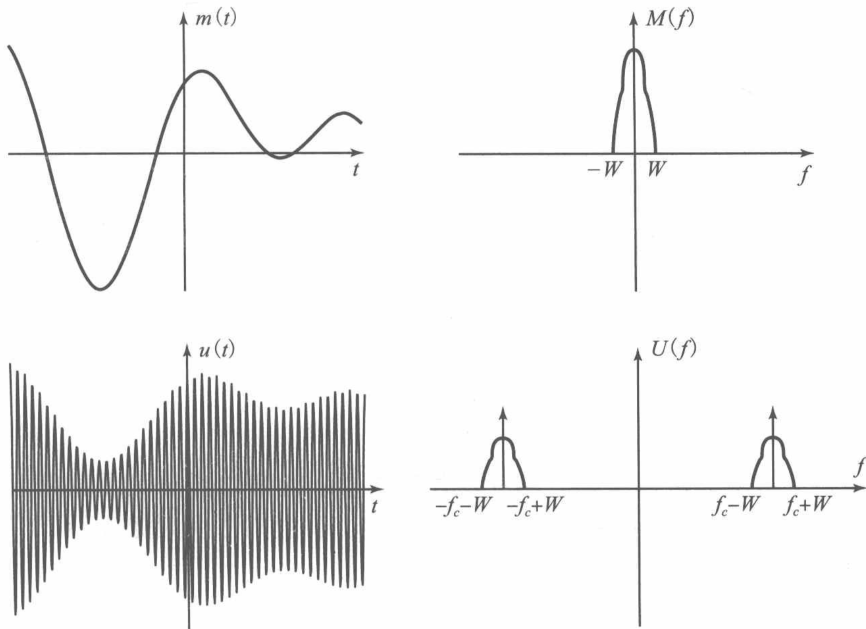


图 3-11 常规调幅信号的时域和频域示意

例 3.2.4 设调制信号 $m(t)$ 为如下式所示正弦信号

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t) \quad f_m \ll f_c$$

若调制指数为 a，求常规调幅信号 $u(t)$，其上下边带，以及频谱。

解：根据式(3.2.6)，得常规调幅信号为

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c[1 + a\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t] + \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c + f_m)t] \end{aligned}$$

下边带为

$$u_l(t) = \frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

128

上边带为

$$u_u(t)=\frac{A_c a}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t]$$

常规调幅信号 $u(t)$ 的频谱为

$$U(f)=\frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+\frac{A_c a}{4}[\delta(f-f_c+f_m)+\delta(f+f_c-f_m)]$$
$$+\frac{A_c a}{4}[\delta(f-f_c-f_m)+\delta(f+f_c+f_m)]$$

幅度谱 $|U(f)|$ 如图 3-12 所示。有趣的是，由于 $a<1$，载波分量的功率为 $A_c^2/2$，超过了上下两个边带的功率之和($A_c^2a^2/4$)。

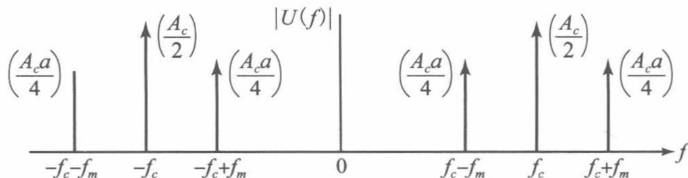


图 3-12　例 3.2.4 中常规调幅信号的幅度谱

常规调幅信号的功率。 若 $m(t)$ 由 $1+m_n(t)$ 代替，常规调幅信号与 DSB 调幅信号是非常相似的。正如在 DSB-SC 中见到的那样，已调信号的功率(参见式(3.2.2))为

$$P_u=\frac{A_c^2}{2}P_m$$

其中 P_m 表示调制信号的功率。而对于常规调幅，有

$$P_m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[1+am_n(t)]^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[1+a^2m_n^2(t)]\mathrm{d}t$$

上式已经假设 $m_n(t)$ 的均值为零，此假设对于包括音频信号在内许多信号来说是合理的。因此，对于常规调幅，有

$$P_m=1+a^2P_{m_n}$$

继而有

$$P_u=\frac{A_c^2}{2}+\frac{A_c^2}{2}a^2P_{m_n}$$

129

上式中第一部分只与载波有关，不存在任何信息；而第二部分是承载信息的部分。注意，第二部分较第一部分要小得多($a<1$，$|m_n(t)|<1$，且对于大动态范围的信号 $P_{m_n}\ll1$)。这表明，相对于 DSB-SC 系统，常规调幅系统的功率效率很低。但常规调幅的优点是容易解调。

例 3.2.5 用信号 $m(t)=3\cos(200\pi t)+\sin(600\pi t)$ 调制载波 $c(t)=\cos(2\times10^5t)$，调制指数 $a=0.85$。求已调信号的载波功率和边带功率。

解： 调制信号如图 3-13 所示。首先，需要求归一化调制信号 $m_n(t)$。而为了求 $m_n(t)$，必须求得 $\max|m(t)|$。为了找到 $m(t)$ 的极值，可求其导数，并令导数等于 0，即

$$m'(t)=-600\pi\sin(200\pi t)+600\pi\cos(600\pi t)=0$$

所以得

$$\cos(600\pi t)=\sin(200\pi t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-200\pi t\right)$$

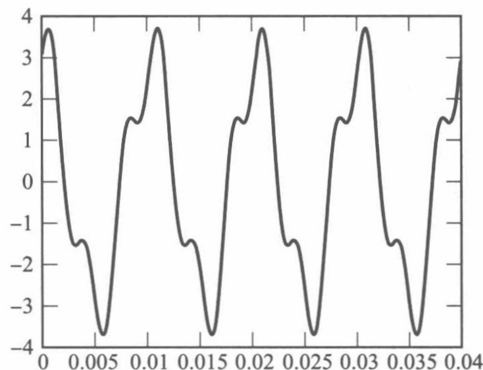


图 3-13　例 3.2.5 中的调制信号

上式的一个解为 $800\pi t=\frac{\pi}{2}$，即 $t=\frac{1}{1600}$。代入 $m(t)$ 得

$$m\left(\frac{1}{1600}\right) = 3.6955$$

这就是信号 $m(t)$的最大值。因此有

$$m_n(t) = \frac{3\cos(200\pi t) + \sin(600\pi t)}{3.6955} = 0.8118\cos(200\pi t) + 0.2706\sin(600\pi t)$$

130

两个不同频率的正弦信号之和的功率是各自功率之和，因此有

$$P_{m_n} = \frac{1}{2}[0.8118^2 + 0.2706^2] = 0.3661$$

已调信号的载波功率为

$$\frac{A_c^2}{2} = 0.5$$

边带功率为

$$\frac{A_c^2}{2}a^2 P_{m_n} = \frac{1}{2} \times 0.85^2 \times 0.3661 = 0.1323$$

◀

常规 DSB 调幅信号的解调。常规调幅信号的主要优点就是不需要同步解调器，解调简便。由于调制信号 $m(t)$满足条件$|m(t)|<1$，即其包络(幅度)$1+m(t)>0$。如果对接收信号进行整流，就可以消除负值而不影响调制信号，如图 3-14 所示。

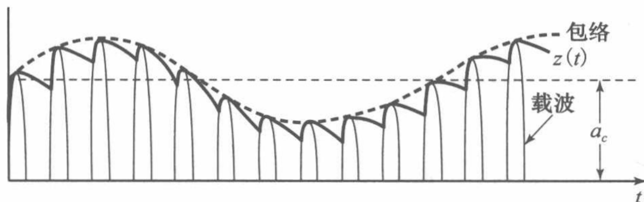


图 3-14 常规调幅信号的包络检波示意

整流后的信号在 $u(t)\geqslant 0$ 时等于 $u(t)$，在 $u(t)<0$ 时为零。整流后的信号通过一个带宽与调制信号匹配的低通滤波器后，就可以恢复出调制信号。整流器和低通滤波器结合在一起，称为包络检波器。

包络检波器的理想输出形式如下

$$d(t) = g_1 + g_2 m(t) \tag{3.2.7}$$

其中 g_1 表示直流分量，g_2 表示信号解调器的增益。$d(t)$通过变压器就可以去除直流分量，输出为 $g_2 m(t)$。

131

解调器的形式简单，这使得常规调幅成为调幅无线电广播的实际选择。因为需要将近数十亿的接收机，所以解调器的成本低廉还是极为重要的。相对于接收机的数量，广播发射机的数量要少得多，常规调幅功率效率低的缺点就不那么明显了。结果就是，即使为了简化接收端的信号解调，而不得不建造大功率的发射机，而且功率效率也不高，但就整体而言还是比较经济的。

3.2.3 单边带幅度调制

3.2.1 节已经说明，DSB-SC 调幅信号需要 $B_c=2W$Hz 的信道带宽才能传输，其中 W 是调制信号的带宽。显然，同时传输两个边带是多余的，其实只传输一个边带就足以在接收端重建调制信号 $m(t)$。这样，传输信号所需的带宽就减少至与基带调制信号带宽相同。

在本章结尾的附录里将证明，一个单边带(SSB)调幅信号的数学表达式为

$$u(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \mp A_c \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{3.2.8}$$

其中$\hat{m}(t)$是 $m(t)$的希尔伯特变换，这种变换已经在 2.6 节介绍过。上式中的正负号对应不同的单边带信号，正号对应下边带，而负号对应上边带。根据前面的介绍，希尔伯特变换可以看作冲激响应 $h(t)=1/\pi t$的线性滤波器，其频率响应应为

$$H(f)=\begin{cases}-j & f>0\\ j & f<0\\ 0 & f=0\end{cases} \tag{3.2.9}$$

132 因此，采用如图 3-15 所示的系统结构就可以生成 SSB 调幅信号 $u(t)$。

图 3-15 所示方法使用了希尔伯特变换滤波器。而对于如图 3-16 所示的另外一种方法，则是先生成 DSB-SC 调幅信号，然后再使用带通滤波器来选择保留双边带调幅信号中的上边带或者下边带。

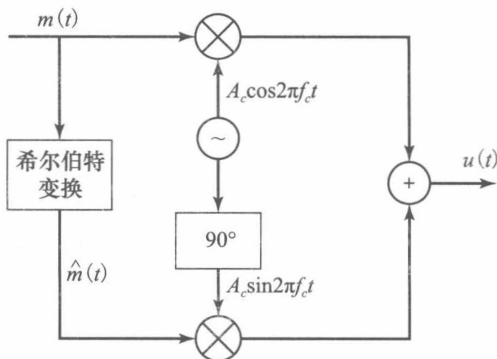


图 3-15 SSB 调幅信号生成框图

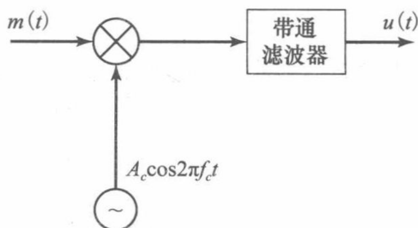


图 3-16 过滤 DSB-SC 调幅信号的某个边带以生成 SSB 调幅信号

例 3.2.6 设调制信号为如下形式的正弦波

$$m(t)=\cos(2\pi f_m t) \quad f_m \ll f_c$$

求两种 SSB 调幅信号。

解：$m(t)$的希尔伯特变换为

$$\hat{m}(t)=\sin(2\pi f_m t) \tag{3.2.10}$$

因此有

$$u(t)=A_c\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)\mp A_c\sin(2\pi f_m t)\sin(2\pi f_c t) \tag{3.2.11}$$

如果取上边的负号(—)，则得到上边带信号

$$u_u(t)=A_c\cos[2\pi(f_c+f_m)t]$$

而如果在式(3.2.11)中取正号(+)，则得到下边带信号

$$u_l(t)=A_c\cos[2\pi(f_c-f_m)t]$$

$u_u(t)$和 $u_l(t)$的频谱已在前面的图 3-3 中给出。 ◀

SSB 调幅信号的解调。与解调 DSB-SC 调幅信号相同，为了从接收到的 SSB 调幅信号中恢复出调制信号 $m(t)$，需要相位相干或同步解调器。以式(3A.7)中的上边带(USSB)信号为例，有

$$\begin{aligned}r(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)&=u(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)\\&=\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi)+\frac{1}{2}A_c\hat{m}(t)\sin(\phi)+\text{双倍频项}\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

133 令式(3.2.12)中的乘积信号通过一个理想低通滤波器，滤除信号中的双倍频分量，剩余分量为

$$y_l(t)=\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi)+\frac{1}{2}A_c\hat{m}(t)\sin(\phi) \tag{3.2.13}$$

注意，相位偏移不仅使输出调制信号 $m(t)$受到 $\cos(\phi)$因子的影响而衰减，而且由于 $y_l(t)$中存在$\hat{m}(t)$项，导致了无用边带信号的出现。后一种分量不会在 DSB-SC 信号解调过程中出现，但却是导致 SSB 信号解调失真的重要因素。

在发射信号中添加载频的导频音，是提供相位相干参考信号以便在接收端进行同步解

调的一种非常有效的方法。这样可以消除无用边带信号分量。当然，这意味着必须为载波分配一定的发射功率。

SSB 调幅信号的频谱效率高，使得这种调制方式在电话信道(电线和电缆)上的话音通信领域极具使用价值。在实际应用中，发射用于同步解调的导频可以在几个信道间共享。

如图 3-16 所示的滤波器方法，在传输时，需要在两个信号边带中选择一个边带。如果调制信号 $m(t)$有大功率集中在频点 $f=0$ 附近，滤波法实现起来就颇为困难。在此情况下，为了滤除另一个边带，边带滤波器在载频附近必须具有极其陡峭的截止特性。在实际应用中，这样的滤波器特性很难实现。

3.2.4 残留边带幅度调制

SSB 调幅系统对边带滤波器频率响应的要求过于严苛。如果允许另一部分边带信号残留在解调器的输出信号中，则滤波条件可以适当放宽。即用适当增加传输信号信道带宽的代价，来换取边带滤波器设计的简化。这种调制方式称为*残留边带*(VSB)幅度调制，适用于诸如视频信号等具有丰富低频分量的信号。标准电视广播系统采用的就是这种调制方式。

为了生成 VSB 调幅信号，首先要生成 DSB-SC 调幅信号，再经过频率响应为 $H(f)$的边带滤波器，如图 3-17 所示。VSB 信号的时域表达式为

$$u(t)=[A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)]*h(t) \tag{3.2.14}$$

其中，$h(t)$是 VSB 滤波器的冲激响应。相应地，频域表达式为

$$U(f)=\frac{A_c}{2}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]H(f) \tag{3.2.15}$$

134

为了求得滤波器的频率响应特性，需要考虑 VSB 信号 $u(t)$的解调过程。如图 3-18 所示，$u(t)$先与载波分量 $\cos(2\pi f_c t)$相乘，然后再经过理想低通滤波器。则乘积信号为

$$v(t)=u(t)\cos(2\pi f_c t)$$

或等价表示为

$$V(f)=\frac{1}{2}[U(f-f_c)+U(f+f_c)] \tag{3.2.16}$$

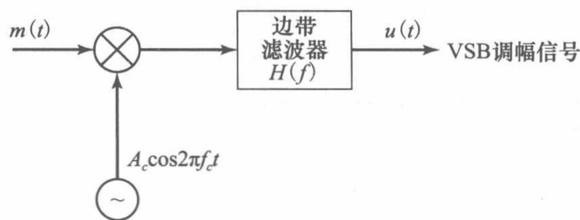


图 3-17 VSB 调幅信号生成框图

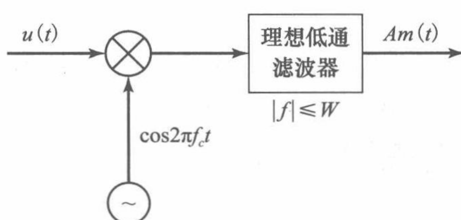


图 3-18 VSB 信号的解调

将式(3.2.15)中的 $U(f)$代入式(3.2.16)，得

$$V(f)=\frac{A_c}{4}[M(f-2f_c)+M(f)]H(f-f_c)$$

$$+\frac{A_c}{4}[M(f)+M(f+2f_c)]H(f+f_c) \tag{3.2.17}$$

低通滤波器抑制掉了双倍频项，仅允许 $|f|\leqslant W$ 的频率分量通过。因此，理想低通滤波器输出信号的频谱为

$$V_l(f)=\frac{A_c}{4}M(f)[H(f-f_c)+H(f+f_c)] \tag{3.2.18}$$

低通滤波器输出的调制信号必须是无失真的。因此，VSB 滤波器的特性必须满足如下条件

135

$$H(f-f_c)+H(f+f_c)=C \quad |f|\leqslant W \tag{3.2.19}$$

满足上述条件的滤波器的频率响应特性如图 3-19 所示。

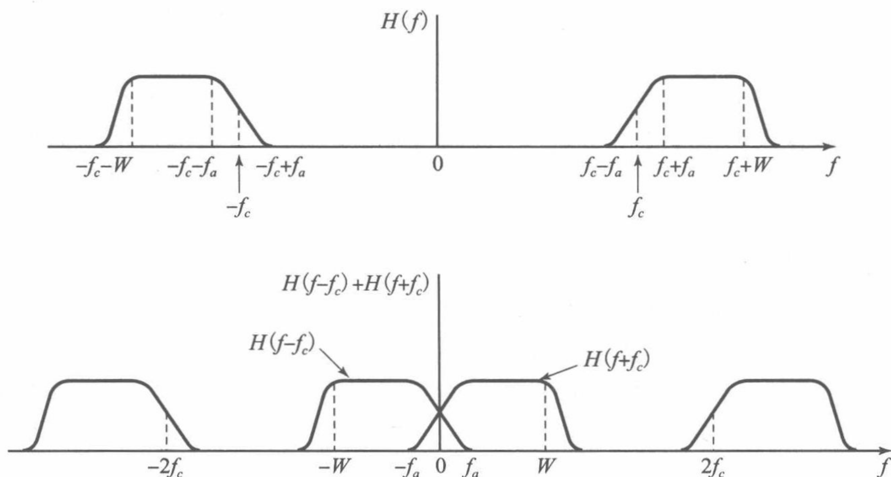


图 3-19 VSB 滤波器特性

注意，$H(f)$选择了上边带的全部和下边带的残留部分。在 $f_c-f_a<f<f_c+f_a$ 的频率范围内，$H(f)$关于载频 f_c 呈奇对称，其中 f_a 是一个方便取值的频率，仅占 W 的某一小部分，即 $f_a\ll W$。这样就得到了一个无失真的传输信号。也可以选择下边带的全部和上边带的残留部分，相应的 VSB 滤波器的频率响应如图 3-20 所示。

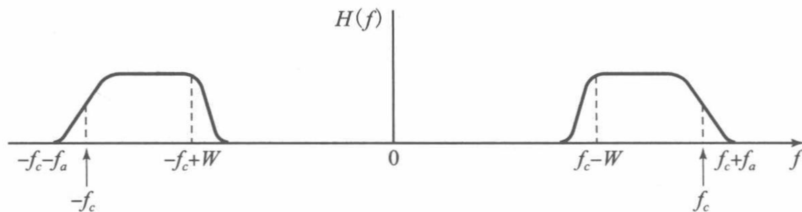


图 3-20 选择调制信号下边带的 VSB 滤波器的频率响应

在实际应用中，可将 VSB 滤波器设计成具有特定的相位特性。为了避免调制信号失真，VSB 滤波器在其通频带 $f_c-f_a\leqslant|f|\leqslant f_c+W$ 范围内应具有线性相位。

例 3.2.7 设调制信号为

$$m(t)=10+4\cos(2\pi t)+8\cos(4\pi t)+10\cos(20\pi t)$$

136

某 VSB 滤波器可以让整个上边带以及下边带的第一个频率分量通过，求该 VSB 滤波器的频率响应特性。

解：DSB-SC 调幅信号 $u(t)=m(t)\cos(2\pi f_c t)$的频谱为

$$\begin{aligned}U(f)=&5[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+2[\delta(f-f_c-1)+\delta(f+f_c+1)]\\&+4[\delta(f-f_c-2)+\delta(f+f_c+2)]+5[\delta(f-f_c-10)+\delta(f+f_c+10)]\end{aligned}$$

VSB 滤波器可以设计成：在频率范围 $2\leqslant|f-f_c|\leqslant10$ 内具有单位增益，在 $f=f_c$ 处增益为 1/2，在 $f=f_c+1$ 处增益为 $1/2+\alpha$，在 $f=f_c-1$ 处增益为 $1/2-\alpha$，其中 α 是一个方便取值的参数，且 $0<\alpha<1/2$。图 3-21 给出了该 VSB 滤波器的频率响应特性。

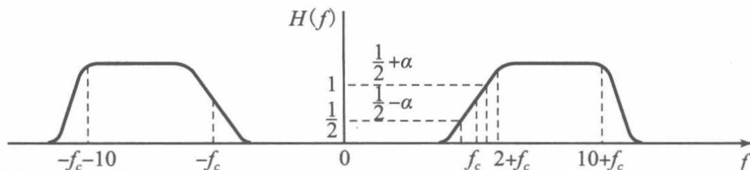


图 3-21 例 3.2.7 中 VSB 滤波器的频率响应特性

3.3 幅度调制器和解调器的实现

有许多方法都可以生成调幅信号。本节将介绍实际应用中最常用的几种。由于调制的过程会产生新的频率分量，因此调制器通常具有非线性和/或时变系统的特性。

幂律调制器。考虑使用诸如P-N二极管之类的非线性器件，其伏-安特性如图3-22所示。

若这样一种器件的输入电压是调制信号 $m(t)$ 与载波 $A_c\cos 2\pi f_c t$ 之和，如图3-23所示。由于非线性性质，输出端将产生调制信号 $m(t)$ 与载波的乘积以及其他附加项。只要让非线性器件的输出通过一个带通滤波器，就可以滤得需要的已调信号。

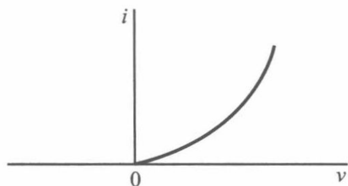


图3-22 P-N二极管的伏-安特性

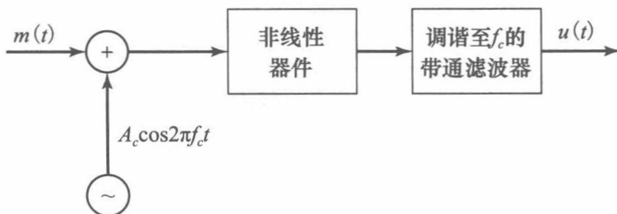


图3-23 幂律调制器的框图

为了详细说明上述过程，不妨设非线性器件具有如下形式的输入-输出(平方律)特性 137

$$v_0(t)=a_1 v_i(t)+a_2 v_i^2(t) \tag{3.3.1}$$

其中，$v_i(t)$为输入信号，$v_0(t)$为输出信号，且参数 a_1、a_2 是常数。若此非线性器件的输入为

$$v_i(t)=m(t)+A_c\cos(2\pi f_c t) \tag{3.3.2}$$

则其输出为

$$\begin{aligned}v_0(t)&=a_1[m(t)+A_c\cos(2\pi f_c t)]+a_2[m(t)+A_c\cos(2\pi f_c t)]^2\\&=a_1 m(t)+a_2 m^2(t)+a_2 A_c^2\cos^2(2\pi f_c t)+A_c a_1\left[1+\frac{2a_2}{a_1}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

带宽为 $2W$，中心频率在 $f=f_c$ 处的带通滤波器的输出为

$$u(t)=A_c a_1\left[1+\frac{2a_2}{a_1}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t) \tag{3.3.4}$$

调整参数 a_1 和 a_2，确保 $2a_2|m(t)|/a_1<1$。则通过此方法产生的信号为常规调幅信号。

开关调制器。另一种生成调幅信号的方法是利用开关调制器。此调制器可以通过如图3-24a所示的系统实现。将式(3.3.2)给定的调制信号与载波信号之和 $v_i(t)$，加载到输入-输出电压特性如图3-24b所示的二极管上，其中 $A_c \gg m(t)$。负载电阻两端的输出电压可简单表示为

$$v_0(t)=\begin{cases}v_i(t) & c(t)>0\\0 & c(t)<0\end{cases} \tag{3.3.5}$$

开关运算在数学上可以看作是输入 $v_i(t)$ 与如图3-24c所示开关函数 $s(t)$ 相乘，即

$$v_0(t)=[m(t)+A_c\cos(2\pi f_c t)]s(t) \tag{3.3.6}$$

138

由于 $s(t)$ 是周期函数，因此其傅里叶级数表示如下

$$s(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos[2\pi f_c(2n-1)t] \tag{3.3.7}$$

上式与式(2.2.11)相似，因此有

$$\begin{aligned}v_0(t)&=[m(t)+A_c\cos(2\pi f_c t)]s(t)\\&=\frac{A_c}{2}\left[1+\frac{4}{\pi A_c}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)+\text{其他项}\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

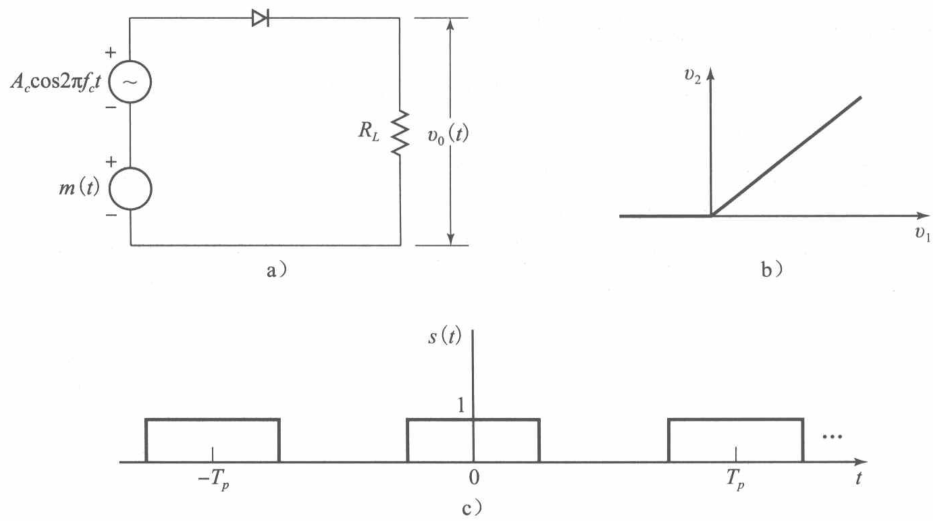


图 3-24 开关调制器和周期开关信号

让 $v_0(t)$通过一个中心频率在 $f=f_c$ 处，带宽为 $2W$ 的带通滤波器，即可得到需要的已调信号。滤波器的输出为常规调幅信号，即

139

$$u(t)=\frac{A_c}{2}\left[1+\frac{4}{\pi A_c}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t) \tag{3.3.9}$$

平衡调制器。有一种相对简单的方法可以生成 DSB-SC 调幅信号。该方法利用两个常规调幅信号调制器，按照如图 3-25 所示的结构进行组合。

例如，可以使用前面介绍的两个平方律 AM 调制器。一定要注意，两个调制器的特性要基本相同，这样就可以在叠加点上抵消载波分量。

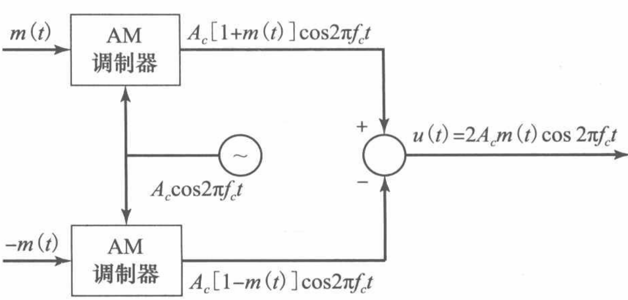


图 3-25 平衡调制器框图

环形调制器。另一种生成 DSB-SC 调幅信号的调制器是如图 3-26 所示的环形调制器。

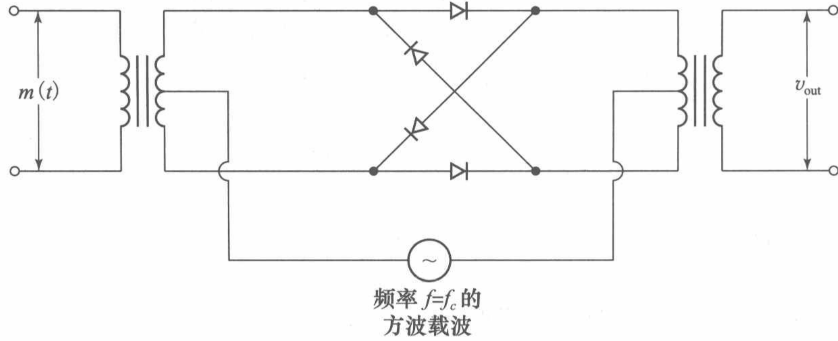


图 3-26 生成 DSB-SC 调幅信号的环形调制器

二极管的开关由一个频率为 f_c 的方波 $c(t)$控制，加载于两个变压器的中心抽头位置。当 $c(t)>0$ 时，顶部和底部的两个二极管导通，而位于交叉臂上的两个二极管截止，相当于调制信号$m(t)$乘以$+1$；当 $c(t)<0$ 时，位于交叉臂上的两个二极管导通，而顶部和底部的两个二极管截止，相当于调制信号 $m(t)$乘以-1。因此，环形调制器的运算在数学上

140

可以看作是 m(t)与方波载波 c(t)相乘，即

$$v_{out}(t) = m(t)c(t) \tag{3.3.10}$$

由于 $c(t)$是周期函数，因此其傅里叶级数表示如下

$$c(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos[2\pi f_c(2n-1)t] \tag{3.3.11}$$

上式也与式(2.2.11)相似，因此，让 $v_{out}(t)$通过一个中心频率在 f_c 处，带宽为 $2W$ 的带通滤波器，即可得到所需 DSB-SC 调幅信号 $u(t)$。

根据前面的讨论不难看出，平衡调制器和环形调制器都是将调制信号 $m(t)$与载波相乘，以生成 DSB-SC 调幅信号。$m(t)$与 $A_c\cos(2\pi f_c t)$的相乘称为混频运算。混频器从本质上讲是一种平衡调制器。

图 3-15 所示的生成 SSB 信号的方法，除了希尔伯特变换器以外，还需要两个混频器，即两个平衡调制器。而图 3-16 所示的生成 SSB 信号的方法只需要一个平衡调制器和一个边带滤波器。

下面开始讨论调幅信号的解调，首先介绍包络检波器。

包络检波器。如前所述，利用包络检波器可以很容易地实现常规 DSB 调幅信号的解调。包络检波器的电路图如图 3-27 所示，它由二极管和 RC 电路(本质上是一个简单的低通滤波器)组成。

在输入信号的正半周期内，二极管是导通的。电容充电至输入信号的峰值。当输入电压值降到低于电容电压时，二极管反向截止，输入与输出断开。在此期间，电容通过负载电阻 R 缓慢放电。在载波的下一个周期，当输入信号电压超过电容电压时，二极管再次导通，电容再次充电至输入信号的峰值。上述过程周而复始地进行着。

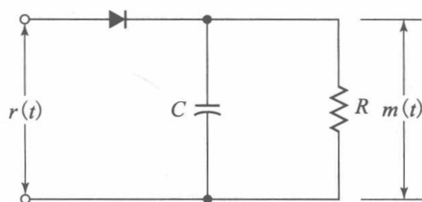


图 3-27 包络检波器

时间常数 RC 的选取以跟得上已调信号的包络变化为宜。如果 RC 太小，则滤波器的输出在每次峰值过后下降太快，不能紧跟已调信号的包络，相当于低通滤波器的带宽过大。如果 RC 太大，则电容放电太慢，输出也不能紧跟已调信号的包络，相当于低通滤波器的带宽太小。RC 值太大和太小的结果如图 3-28 所示。

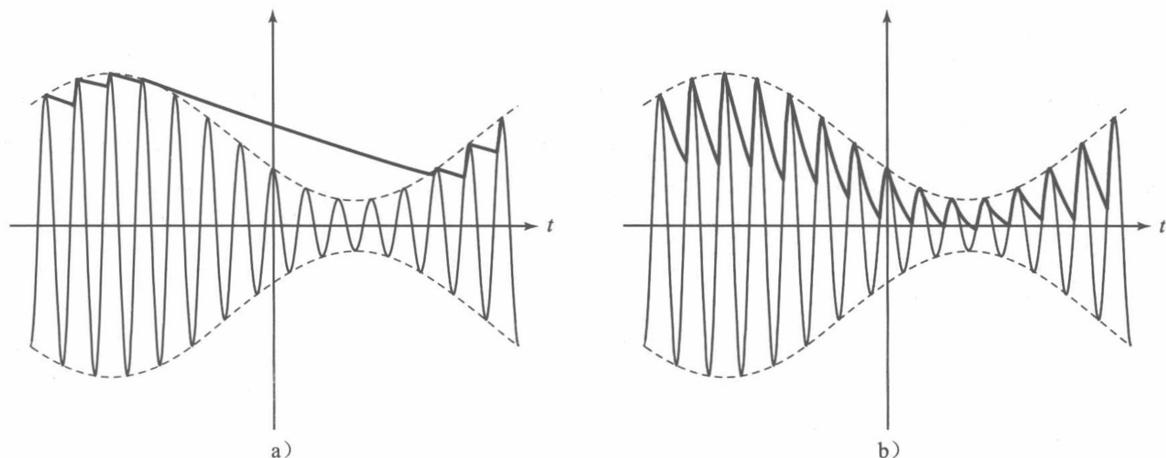


图 3-28 a)RC 值太大对包络检波器的影响；b)RC 值太小对包络检波器的影响

实际上，为了使包络检波器的性能达到要求，RC 的取值应当满足下式

142

$$\frac{1}{f_c} \ll RC \ll \frac{1}{W}$$

此时，电容通过电阻缓慢放电，包络检波器的输出$\widetilde{m}(t)$可以紧紧跟随调制信号的变化。

例 3.3.1 一个带宽 $W=5\text{kHz}$ 的音频信号，调制至频率 1MHz 的载波上，生成常规调幅信号。为了能够用包络检波器成功解调该信号，试求 RC 的取值范围。

解：必须使$\frac{1}{f_c}\ll RC\ll\frac{1}{W}$，因此有 $10^{-6}\ll RC\ll 2\times10^{-4}$。这样，$RC=10^{-5}$是个恰当的选择。◀

DSB-SC 调幅信号的解调。 如前所述，DSB-SC 调幅信号的解调需要同步解调器。换言之，为了解调接收信号，解调器必须使用相干相位参考信息，相干相位参考信息通常使用锁相环(PLL，见 8.8.1 节)的方法来生成。

解调器的一般结构如图 3-29 所示。PLL 用于生成相位相干载波信号，与接收信号在平衡调制器中进行混频。平衡调制器的输出再经过带宽为 W 的低通滤波器，滤除频率超过 WHz 的信号和噪声分量，得到需要的信号。PLL 的特性和工作原理参见 8.8.1 节。

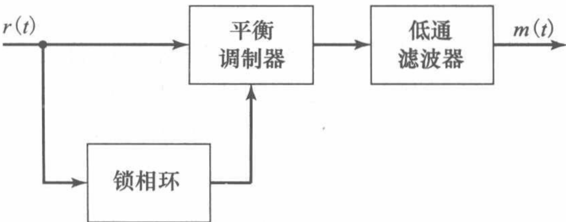


图 3-29 DSB-SC 调幅信号的解调器

SSB 信号的解调。 SSB 调幅信号的解调也需要相位相干参考信息。诸如语音之类的信号，由于含有的直流分量较少，甚至没有直流分量，利用如图 3-16 所示的方法，可以很容易生成 SSB 信号。然后在已调信号中插入一个很小的载波分量一起发射。这种情况下，可以采用如图 3-30 所示的结构来解调 SSB 信号。其中，平衡调制器用于将带通信号转换为低通或基带信号。

VSB 信号的解调。 在 VSB 中，载波分量通常与消息边带一起发送。由于载波分量的存在，使得平衡调制器可以提取出用于解调的相位相干参考信息，如图 3-30 所示。

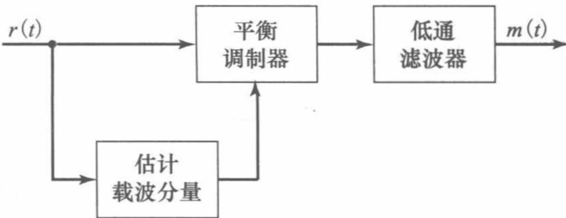


图 3-30 包含载波分量的 SSB 调幅信号的解调

在诸如广播电视之类的应用中，VSB 信号含有很大的载波分量。这种情况下，接收到的 VSB 信号通过一个包络检波器就可以恢复出调制信号。

143

3.4 信号多路复用

用调制信号 $m(t)$调制正弦载波的幅度，相当于将调制信号的频谱进行线性平移，平移量为载波频率 f_c。如果需要在通信信道上同时传输两路甚至更多的信号，可以让每路调制信号调制不同频率的载波。相邻载波的最小频率间隔为 $2W$(对于 DSB 调幅信号)或 W(对于 SSB 信号)，其中 W 是每路调制信号的带宽。这样，各路调制信号分别占用信道上不同的频段，在传输时互不干扰。

将多路独立的调制信号组成一个复合信号在公共信道上传输，称为*多路复用*。信号多路复用有两种常用的方法：(1)时分多路复用(TDM)；(2)频分多路复用(FDM)。时分多路复用通常用于传输数字信号，这部分内容将在 7.6 节介绍。频分多路复用既可用于传输数字信号，也可用于传输模拟信号。

3.4.1 频分多路复用

如前所述，在 FDM 中，各路信号所占频段是相互分离的。FDM 系统的典型结构如图 3-31所示。该图描述了 K 路调制信号在发射端进行频分多路复用，并在接收端进行解

复用的全过程。发射端的低通滤波器确保各调制信号的带宽限制在 WHz 以内。每路信号调制不同频率的载波，因此需要 K 个调制器。然后，K 个调制器的输出信号叠加在一起，并通过信道传输。

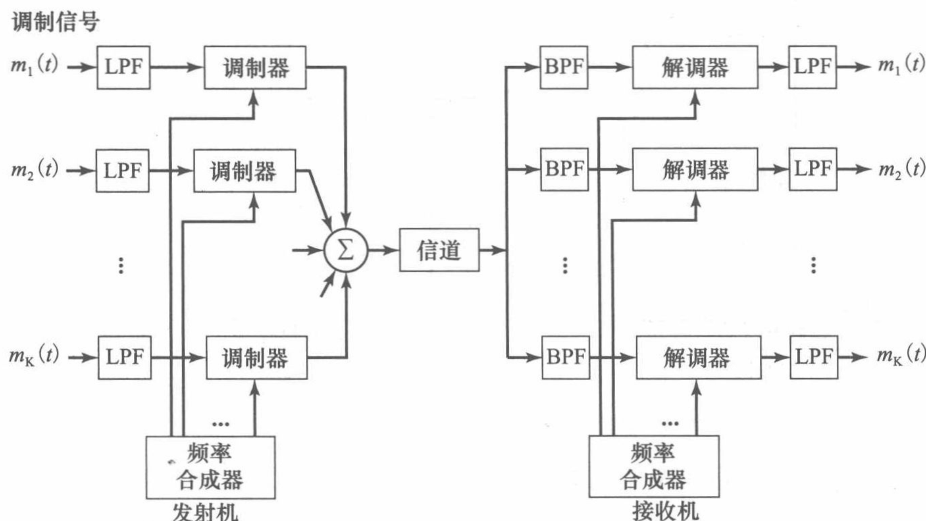


图 3-31 多路信号的频分多路复用

在 FDM 系统的接收端，接收信号通过一组并行的带通滤波器进行分离。各滤波器调谐至各载频处，滤波器的带宽仅让一路已调信号通过。每个带通滤波器的输出都需要解调，并且每路解调器的输出都需要通过低通滤波器，最终滤除双倍频项，得到基带信号。

FDM 被广泛应用于无线电广播和电话通信领域。在电话通信应用中，每路话音信号仅占 4kHz 的带宽，并采用单边带调制以提高带宽利用效率。在多路复用阶段的第一级，12 路信号在频域依次排开，相邻载波的频率间隔为 4kHz。因此，称为*群信道*的 48kHz 复合信道可同时传输 12 路话音信号。在 FDM 阶段的第二级，多个群信道(典型值为 5 个或 6 个)在频域依次排开，构成一个*超群信道*以供复合信号传输用。将多个超群信道合并就可以得到更高级别的多路复用，从而构成了电话通信系统中 FDM 的层级结构。

144

3.4.2 正交载波多路复用

还有一种多路复用技术可以在同一载频传输两路调制信号。这种复用方式使用两个相互正交的载波：$A_c\cos(2\pi f_c t)$和 $A_c\sin(2\pi f_c t)$。具体来说，设 $m_1(t)$和 $m_2(t)$是需要通过信道传输的两路独立调制信号，其中信号 $m_1(t)$对载波 $A_c\cos(2\pi f_c t)$进行幅度调制，信号 $m_2(t)$对载波 $A_c\sin(2\pi f_c t)$进行幅度调制。两路信号相加后再通过信道传输，则信道上输出的信号为

$$u(t) = A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{3.4.1}$$

因此，每路信号都是以 DSB-SC 幅度调制的形式传输。这种类型的信号多路复用称为*正交载波多路复用*。该复用形式可以达到与单边带幅度调制相近的频带利用率。图 3-32 给出了正交载波多路复用信号的调制和解调过程。如图 3-32 所示，在接收端需要一个同步解调器来分离和恢复正交载波已调信号。

145

将 $u(t)$乘以 $\cos(2\pi f_c t)$，然后乘积通过一个低通滤波器，即可解调出 $m_1(t)$。即

$$\begin{aligned} u(t)\cos(2\pi f_c t) &= A_c m_1(t)\cos^2(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\cos(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A_c}{2}m_1(t) + \frac{A_c}{2}m_1(t)\cos(4\pi f_c t) + \frac{A_c}{2}m_2(t)\sin(4\pi f_c t) \end{aligned}$$

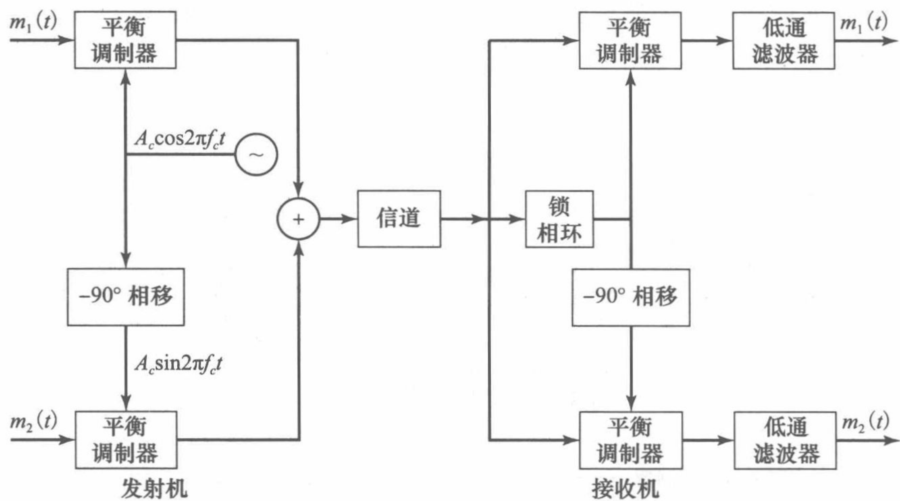


图 3-32 正交载波多路复用

$u(t)$含有低频分量$\frac{A_c}{2}m_1(t)$和两个高频分量。可使用低通滤波器将低频分量分离出来。同理，将 $u(t)$乘以 $\sin(2\pi f_c t)$，然后乘积通过一个低通滤波器，即可解调出 $m_2(t)$。

3.5 调幅无线电广播

无线电广播是一种广为人知的采用模拟信号传输的通信形式。商用调幅无线电广播利用 535～1605kHz 频段传输话音和音乐。载频的分配范围为 540～1600kHz，频率间隔为 10kHz。

广播电台采用常规调幅进行信号传输。基带调制信号的带宽限制在约为 5kHz 的范围内。由于收音机多达几十亿台，而无线电发射机则要少得多，从经济的角度考虑，采用常规调幅是合理的，可以降低接收机的成本。

146

在 AM 广播中最为常见的接收机叫做*超外差接收机*，如图 3-33 所示。它由射频(RF)调谐放大器、混频器、本地振荡器、中频(IF)放大器、包络检波器、音频放大器和扬声器组成。所需调谐频率由可变电容器提供，可同时对 RF 放大器和本地振荡器进行调谐。

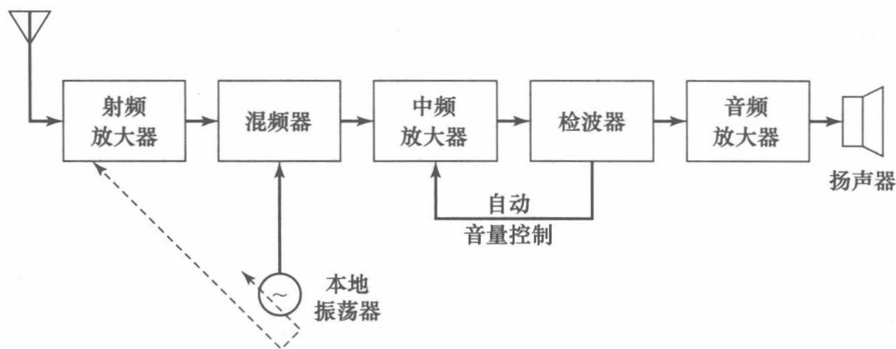


图 3-33 超外差接收机框图

利用超外差接收机，每路 AM 无线电信号都转换至公共中频 $f_{IF}=455\text{kHz}$ 上。这种转换仅仅利用一个单调谐 IF 放大器就可以放大频段内的任何无线电台信号。IF 放大器的设计带宽为 10kHz，与发射信号的带宽匹配。

将频率转换为 IF 的任务由 RF 放大器和混频器共同完成。本地振荡器的频率为

$$f_{LO}=f_c+f_{IF}$$

其中，f_c 是所需 AM 无线电信号的载波频率。本地振荡器的调谐范围是 995～2055kHz。将 RF 放大器调谐至频率 f_c，然后将其输出与本地振荡器的频率 $f_{LO}=f_c+f_{IF}$ 相混频，就可以得到两个信号分量。一个分量集中在差频 f_{IF} 左右，另一个分量集中在和频 $2f_c+f_{IF}$ 左右。但只有第一个分量可以通过 IF 放大器。

RF 放大器的输入端是天线收集到的所有无线电台信号。为了滤除无线电信号中位于所谓镜像频率 $f'_c=f_{LO}+f_{IF}$ 上的信号，需要将 RF 放大器的带宽限制在 $B_c<B_{RF}<2f_{IF}$ 范围内，其中 B_c 为 AM 无线电信号的带宽(10kHz)。若将本地振荡器的输出 $\cos(2\pi f_{LO}t)$ 与下列接收信号相混频

147

$$r_1(t)=A_c[1+m_1(t)]\cos(2\pi f_c t)$$
$$r_2(t)=A_c[1+m_2(t)]\cos(2\pi f'_c t)$$

其中，$f_c=f_{LO}-f_{IF}$，$f'_c=f_{LO}+f_{IF}$，则混频器的输出包含两部分：

$$y_1(t)=A_c[1+m_1(t)]\cos(2\pi f_{IF}t)+\text{双倍频项}$$
$$y_2(t)=A_c[1+m_2(t)]\cos(2\pi f_{IF}t)+\text{双倍频项}$$

其中，$m_1(t)$表示需要的信号，而 $m_2(t)$表示无线电台在载频 $f'_c=f_{LO}+f_{IF}$ 上发射的信号。为了避免信号 $r_2(t)$干扰信号$r_1(t)$的解调，RF 放大器的带宽要足够窄，以使镜像频率信号无法通过。因此，$B_{RF}<2f_{IF}$ 就成为 RF 放大器的带宽上限。尽管有此限制，RF 放大器的带宽仍然比 IF 放大器的带宽大得多。因此，带宽很窄的 IF 放大器就可以阻止邻近信道中的干扰信号，而 RF 放大器则用来阻止镜像信道中的干扰信号。图 3-34给出了 IF 放大器和 RF 放大器的带宽，以及阻止镜像频率信号所需满足的带宽要求。

IF 放大器的输出通过包络检波器，这可得到所需的音频调制信号 $m(t)$。最后，将包络检波器的输出放大，以驱动扬声器。反馈控制环用于提供自动音量控制，可以根据包络检波器的输出信号功率来调整 IF 放大器的增益。

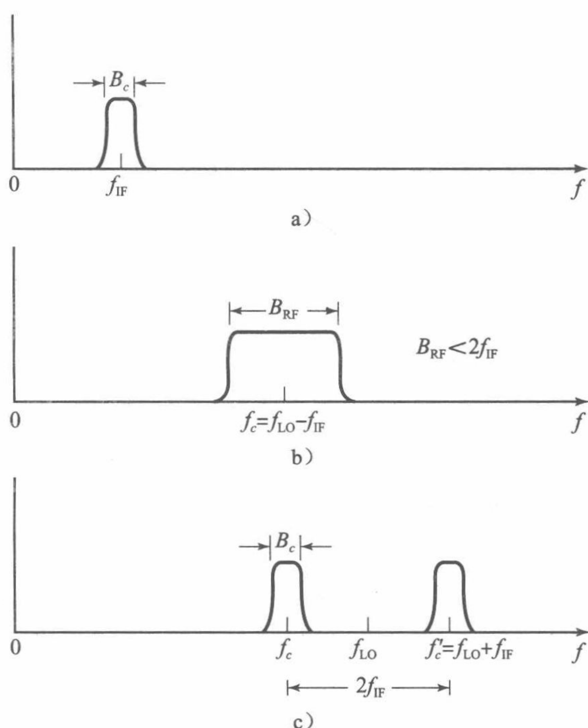


图 3-34 IF 和 RF 放大器的频率响应特性

148

3.6 小结及深入阅读

本章讲述了模拟信号的幅度调制(AM)，包括双边带抑制载波(DSB-SC)调幅、常规调幅和单边带(SSB)调幅。还给出了不同类型的 AM 调制器和解调器的实现方法。最后介绍了 AM 无线电广播的情况。

许多书籍都将幅度调制视为通信系统的基础，包括 Shanmugam(1979)、Carlson(1986)、Stremler(1990)、Couch(1993)、Gibson(1993)、Haykin(2000)、Ziemer 与 Tranter(2002)的著作。Clark 与 Hess(1971)的著作详细介绍了模拟通信系统的实现。

附录 3A：SSB 调幅信号表达式的推导

设信号 $m(t)$的傅里叶变换(频谱)为 $M(f)$。去除 DSB 调幅信号下边带，就得到上单边带

(USSB)调幅信号。按照图 3-16 所示方法去除 DSB 调幅信号 $u_{\mathrm{DSB}}(t)=2A_cm(t)\cos(2\pi f_ct)$的下边带，将其输入传递函数如下所示的高通滤波器

$$H(f)=\begin{cases}1 & |f|>f_c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

显然，$H(f)$可以写成

$$H(f)=u_{-1}(f-f_c)+u_{-1}(-f-f_c)$$

其中，$u_{-1}(\cdot)$表示单位阶跃函数。因此，USSB 调幅信号的频谱可表示为

$$U_u(f)=A_cM(f-f_c)u_{-1}(f-f_c)+A_cM(f+f_c)u_{-1}(-f-f_c)$$

或等价为

$$U_u(f)=A_cM(f)u_{-1}(f)\big|_{f=f-f_c}+A_cM(f)u_{-1}(-f)\big|_{f=f+f_c} \tag{3A.1}$$

对式(3A.1)两边求傅里叶反变换，同时利用傅里叶变换的调制定理和卷积定理，参见例 2.3.14 和式(2.3.26)，可得

149

$$u_u(t)=A_cm(t)*\mathscr{T}^{-1}[u_{-1}(f)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_ct}+A_cm(t)*\mathscr{T}^{-1}[u_{-1}(-f)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_ct} \tag{3A.2}$$

根据式(2.3.12)和傅里叶变换的对偶定理，可得

$$\mathscr{T}\left[\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{\mathrm{j}}{2\pi t}\right]=u_{-1}(f)$$

$$\mathscr{T}\left[\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{\mathrm{j}}{2\pi t}\right]=u_{-1}(-f) \tag{3A.3}$$

将式(3A.3)代入式(3A.2)，得

$$\begin{aligned}u_u(t)&=A_cm(t)*\left[\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{\mathrm{j}}{2\pi t}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_ct}+A_cm(t)*\left[\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{\mathrm{j}}{2\pi t}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_ct}\\&=\frac{A_c}{2}[m(t)+\mathrm{j}\,\hat{m}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_ct}+\frac{A_c}{2}[m(t)-\mathrm{j}\,\hat{m}(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_ct}\end{aligned} \tag{3A.4}$$

其中，用到了恒等式

$$m(t)*\delta(t)=m(t)$$

$$m(t)*\frac{1}{\pi t}=\hat{m}(t)$$

利用欧拉公式，式(3A.4)可写成

$$u_u(t)=A_cm(t)\cos(2\pi f_ct)-A_c\,\hat{m}(t)\sin(2\pi f_ct) \tag{3A.5}$$

上式即为 USSB 调幅信号的时域表达式。至于 LSSB 调幅信号的时域表达式，不要忘了

$$u_u(t)+u_\ell(t)=u_{\mathrm{DSB}}(t)$$

即

$$A_cm(t)\cos(2\pi f_ct)-A_c\,\hat{m}(t)\sin(2\pi f_ct)+u_l(t)=2A_cm(t)\cos2\pi f_ct$$

所以有

$$u_l(t)=A_cm(t)\cos(2\pi f_ct)+A_c\,\hat{m}(t)\sin(2\pi f_ct) \tag{3A.6}$$

因此，SSB 调幅信号的时域表达式可以统一表示为

$$u_{\mathrm{SSB}}(t)=A_cm(t)\cos(2\pi f_ct)\mp A_c\,\hat{m}(t)\sin(2\pi f_ct) \tag{3A.7}$$

150

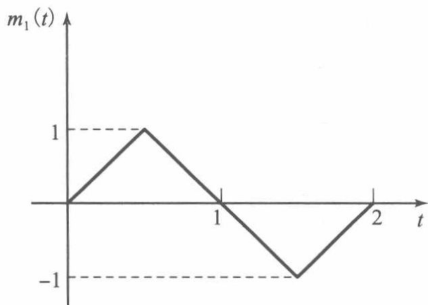
其中，负号对应 USSB 调幅信号，而正号对应 LSSB 调幅信号。

习题

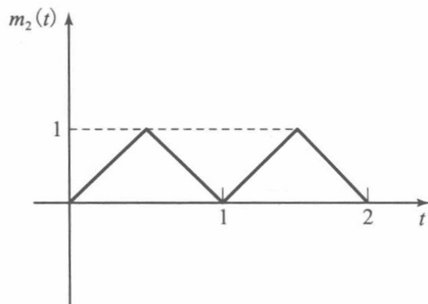
3.1 用调制信号 $m(t)=2\cos(400t)+4\sin(500t+\frac{\pi}{3})$对载波信号 $c(t)=A\cos(8000\pi t)$进行 DSB 幅度调制。求已调信号的功率，以及时域和频域表达式，并画出其频谱(傅里叶变换)。

3.2 某 DSB 系统中，载波 $c(t)=A\cos(2\pi f_ct)$，调制信号 $m(t)=\mathrm{sinc}(t)+\mathrm{sinc}^2(t)$。求已调信号的频域表达式和带宽。

3.3 习题3.3图所示两信号(a)和(b)分别对载波$c(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$进行DSB调制，精确画出两个已调信号的时域波形，并讨论它们之间的区别和共同点。



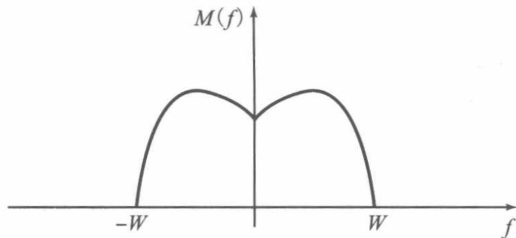
a)



b)

习题3.3图

3.4 设信号$x(t)=m(t)+\cos(2\pi f_c t)$加载至一个输出为$y(t)=x(t)+\frac{1}{2}x^2(t)$的非线性系统。若$M(f)$如习题3.4图所示，且$W\ll f_c$，求$y(t)$的频谱，并画出简图。



习题3.4图

3.5 调制信号

$$m(t)=2\cos(4000\pi t)+5\cos(6000\pi t)$$

乘以载波

$$c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$$

其中$f_c=50\text{kHz}$。求DSB信号的频谱，并画出简图。

3.6 DSB已调信号$u(t)=Am(t)\cos(2\pi f_c t)$与本地载波$x_L(t)=\cos(2\pi f_c t+\theta)$混频(相乘)，并将输出通过一个带宽与调制信号$m(t)$相同的低通滤波器。用$P_{out}$表示低通滤波器输出信号的功率，用$P_U$表示已调信号的功率，画出$\theta$的函数$\frac{P_{out}}{P_U}$的曲线，其中$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

3.7 某调幅信号的表达式如下

$$u(t)=[20+2\cos(3000\pi t)+10\cos(6000\pi t)]\cos(2\pi f_c t)$$

其中$f_c=10^5\text{kHz}$。

1. 画出$u(t)$的(电压)谱。
2. 求每个频率分量的功率。
3. 求调制指数。
4. 求边带功率、总功率以及边带功率与总功率之比。

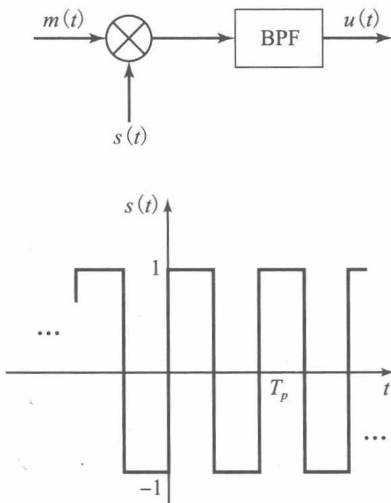
3.8 调制信号$m(t)=\cos(2000\pi t)+2\cos(4000\pi t)$对载波$c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$进行调制，生成DSB信号$m(t)c(t)$，其中$f_c=1\text{MHz}$。

1. 求上边带(USB)信号的时域表达式。
2. 求USB信号的频谱，并画出简图。

3.9 某DSB-SC信号由调制信号$m(t)$与周期方波相乘，并将乘积通过某带通滤波器后得到，如习题3.9图所示。带通滤波器调谐至频率为周期T_p的倒数处，带宽为$2W$，其中W为调制信号的带宽。试证带通滤波器(BPF)的输出$u(t)$就是所需DSB-SC调幅信号

$$u(t)=m(t)\sin(2\pi f_c t)$$

其中$f_c=1/T_p$。



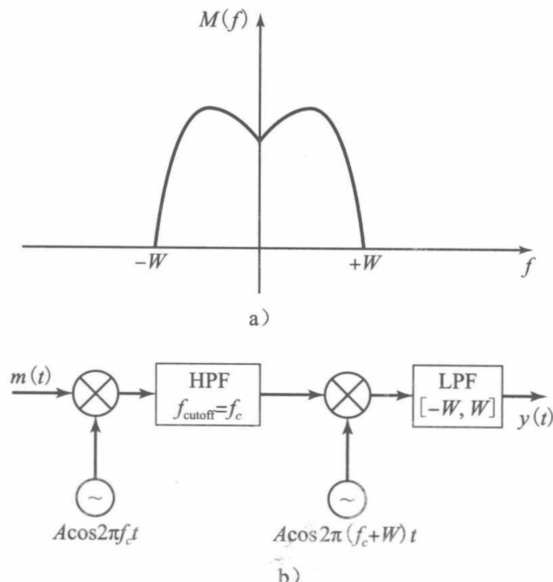
习题3.9图

3.10 试证：在习题3.9生成DSB-SC信号的过程中，周期信号不必是方波。或者说，任何周期为T_p的周期信号都可以代替习题3.9中的方波。

3.11 调制信号$m(t)$的傅里叶变换如习题3.11图a所示。将$m(t)$加载至如习题3.11图b所示的系统上，生成信号$y(t)$。

1. 画出$y(t)$的傅里叶变换$Y(f)$。

2. 试证：如果将 $y(t)$ 发射出去，在接收端再次通过如习题 3.11 图 b 所示的系统，就可以恢复出 $m(t)$。换言之，此系统可以作为一个简单的扰频器，以增强通信的私密性。



习题 3.11 图

3.12 试证：DSB 已调信号的包络正比于调制信号的绝对值。这说明，如果已知调制信号恒正，就可以将包络检波器作为 DSB 信号的解调器。

3.13 用如下所示调制信号

$$m(t) = \sin(2000\pi t) + 5\cos(4000\pi t)$$

对频率 $f_c = 800\text{kHz}$ 的载波进行调制，得到调幅信号

$$u(t) = 100[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

并送至 50Ω 的负载。

1. 求调幅信号 $u(t)$ 的频谱，并画出简图。
2. 求载波和边带的平均功率。
3. 求调制指数。
4. 求传送至负载的峰值功率。

3.14 某 AM 调制器的输出信号为

$$u(t) = 5\cos(1800\pi t) + 20\cos(2000\pi t) + 5\cos(2200\pi t)$$

1. 求调制信号 $m(t)$ 和载波 $c(t)$。
2. 求调制指数。
3. 求边带功率和载波功率之比。

3.15 已知调制信号为

$$m(t) = 2\cos(2000\pi t) + \cos(6000\pi t)$$

已调信号为

$$u(t) = 100m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

其中 $f_c = 1\text{MHz}$。

1. 求调幅信号的频谱，并画出简图。
2. 求各频率分量的平均功率。

3.16 某 SSB 调幅信号由调制信号 $m(t) = \cos(2000\pi t) + 2\sin(2000\pi t)$ 调制 800kHz 的载波得到，载波的幅度 $A_c = 100$。

1. 求信号 $\hat{m}(t)$。
2. 求 SSB 下边带的时域表达式。
3. 求 SSB 下边带的幅度谱。

3.17 维弗(Weaver)单边带调制器如习题 3.17 图所示。设输入信号 $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$，其中 $f_m < W$。证明：恰当地选择 f_1 和 f_2，则输出为 SSB 信号。

3.18 调制信号 $m(t)$，其频谱如习题 3.18 图所示。通过图中的系统，其带通滤波器的中心频率为 f_0，带宽为 $2W$，低通滤波器的带宽为 W。画出信号 $x(t)$、$y_1(t)$、$y_2(t)$、$y_3(t)$ 和 $y_4(t)$ 的频谱，并求这些信号的带宽。

3.19 习题 3.19 图所示的系统用于生成 AM 信号。调制信号 $m(t)$ 的均值为 0，最大(绝对)值为 $A_m = \max|m(t)|$。非线性器件具有如下输入-输出特性

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t)$$

1. 用调制信号 $m(t)$ 和载波 $c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ 表示 $y(t)$。
2. 求调制指数。
3. 求输出为 AM 信号的滤波器的特性。

3.20 信号 $m(t)$ 要从 A 点传输至 B 点，其傅里叶变换 $M(f)$ 如习题 3.20 图所示。信号已经归一化，即 $-1 \leqslant m(t) \leqslant 1$。

1. 如果采用 USSB，求已调信号的带宽。
2. 如果采用 DSB，求已调信号的带宽。
3. 如果采用 $a = 0.8$ 的常规调幅，求已调信号的带宽。

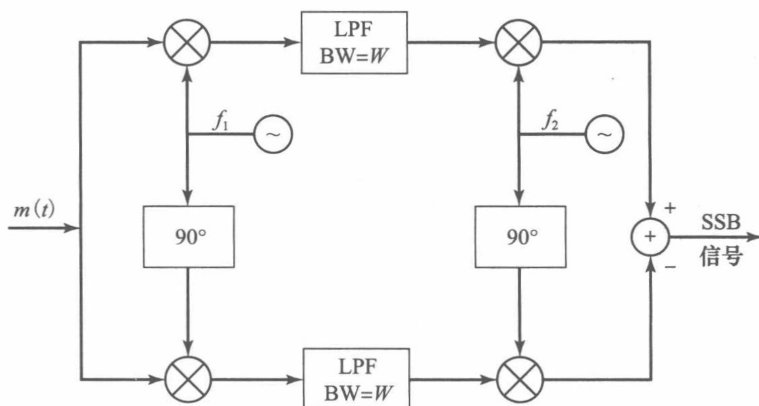
3.21 某残留边带调制系统和带通滤波器的传递函数如习题 3.21 图所示，调制信号 $m(t)$ 的带宽为 W。

1. 求带通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 的等效低通 $h_l(t)$。
2. 推导已调信号 $u(t)$ 的表达式。

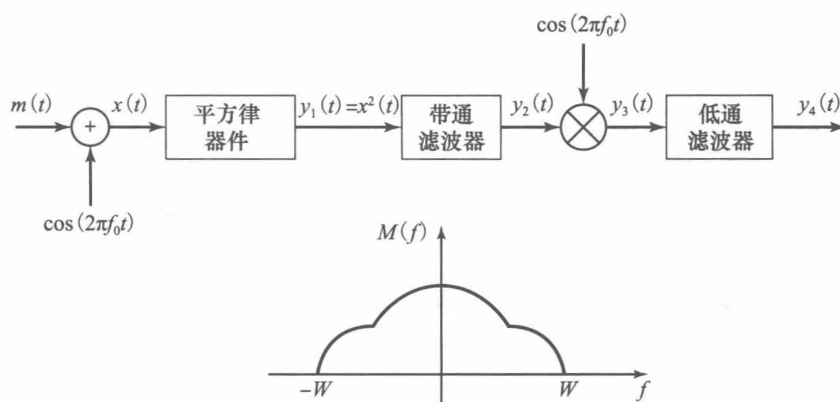
3.22 写出 DSB、SSB、常规调幅、USSB 和 LSSB 的同相分量 $x_c(t)$ 和正交分量 $x_s(t)$ 以及包络 $V(t)$ 和相位 $\Theta(t)$ 的表达式。

3.23 归一化信号 $m_n(t)$ 的带宽为 10 000Hz，功率为 0.5W。载波 $A\cos(2\pi f_0 t)$ 的功率为 200W。

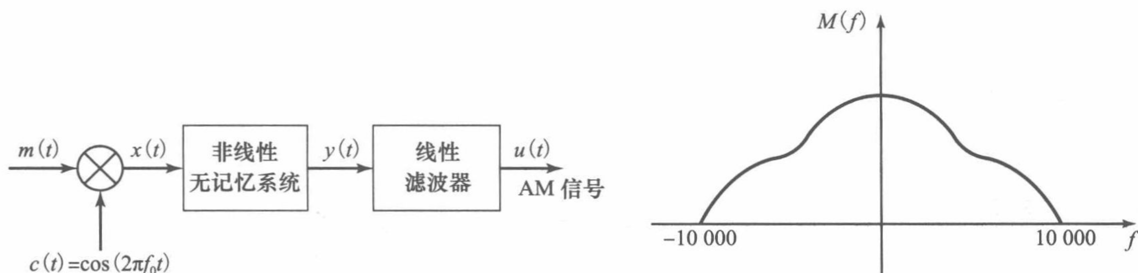
1. 若 $m_n(t)$ 对载波进行 SSB 幅度调制，求已调信号的带宽和功率。
2. 若 $m_n(t)$ 对载波进行 DSB SC 幅度调制，求已调信号的带宽和功率。
3. 若 $m_n(t)$ 对载波进行调制指数为 0.6 的常规幅度调制，求已调信号的带宽和功率。



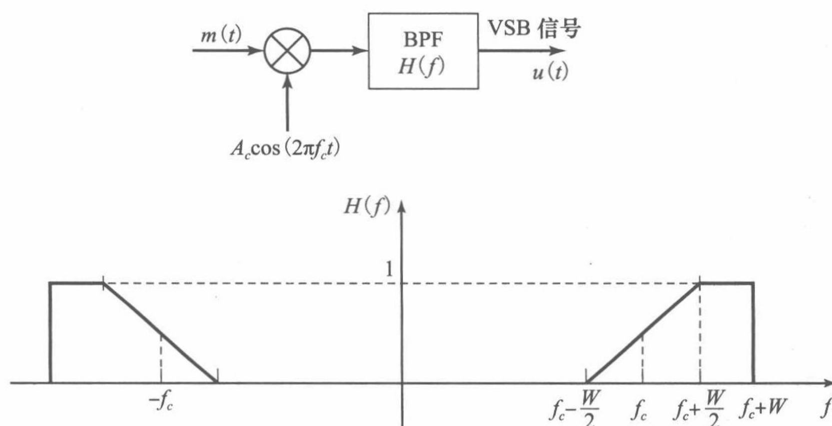
习题 3.17 图



习题 3.18 图



习题 3.19 图　　习题 3.20 图

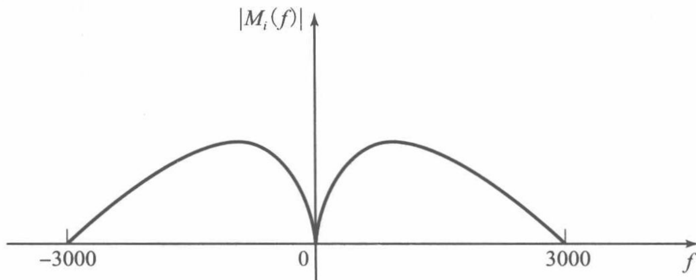


习题 3.21 图

3.24 现欲采用SSB调制和频分复用(FDM)传送60路话音信号，每路话音信号的频谱如习题3.24图所示，即话音信号的带宽限制在3kHz。如果每路信号的频率是单独变换的，那么需要产生60路载波的频率合成器，才能进行FDM。而如果将信道划分为L组，每组K个子信道，且$LK=60$，则频率合成器所需产生的载波路数降至$L+K$。

1. 描述一组K个子信道上的SSB信号的组合频谱。假设相邻频率子信道间有1kHz的保护带，载波频率为$f_{c1}=10\text{kHz}$，$f_{c2}=14\text{kHz}$，…
2. 求L和K的值，使得$LK=60$且$L+K$最小。
3. 如果60路FDM信号占用300～540kHz频段，每组K路信号占用10～$(10+4K)$kHz的频带，求各路信号的载频。

151～158



习题3.24图

上机习题

3.1 双边带(DSB)AM

调制信号

$$m(t)=\begin{cases}\text{sinc}(100t) & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中$t_0=0.1$。调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行调制，其中$f_c=250\text{Hz}$，生成DSB调幅信号$u(t)$。

1. 在$0\leqslant t\leqslant t_0$区间对$m(t)$和$u(t)$进行间隔$t_s=0.0001$的均匀抽样，画出抽样图形。
2. 求$m(t)$和$u(t)$的频谱，并画图。
3. 设$t_0=0.4$，重复第1问和第2问，并比较$t_0=0.1$和$t_0=0.4$情形下的结果。

3.2 常规调幅

上机习题3.1中的调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行常规幅度调制，载频$f_c=250\text{Hz}$，调制指数$a=0.80$。

1. 对$m(t)$和$u(t)$进行间隔$t_s=0.0001$的均匀抽样，画出抽样图形。
2. 求$m(t)$和$u(t)$的频谱，并画图。
3. 设$t_0=0.4$，重复第1问和第2问，并比较$t_0=0.1$和$t_0=0.4$情形下的结果。

3.3 单边带(SSB)AM

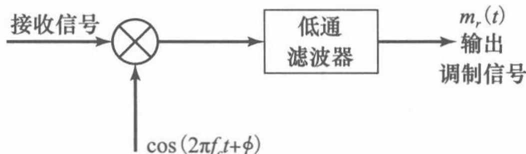
上机习题3.1中的调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行调制，生成下单边带信号$u(t)$，载频$f_c=250\text{Hz}$。

1. 画出调制信号$m(t)$、其希尔伯特变换$\hat{m}(t)$以及LSSB信号$u(t)$。
2. 求调制信号$m(t)$和LSSB信号$u(t)$的频谱，并画图。
3. 设$t_0=0.4$，重复第1问和第2问，并比较$t_0=0.1$和$t_0=0.4$情形下的结果。

3.4 DSB调幅信号的解调

上机习题3.1中的调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行调制，生成DSB调幅信号$u(t)=m(t)c(t)$。载频$f_c=250\text{Hz}$，$t_0=0.1$。

1. 对调制信号$m(t)$和已调信号$u(t)$进行间隔$t_s=0.0001$的均匀抽样，各生成1000个抽样值，并画图。
2. 使用如上机习题3.4图所示的解调器对第1问生成的抽样DSB调幅信号$u(t)$进行解调。对于$\phi=0$，$\pi/8$，$\pi/4$，$\pi/2$等不同情形，画出解调输出信号$m_r(t)$的图形。已知低通滤波器是31抽头的线性相位FIR滤波器，截止频率(−3dB)为100Hz，阻频带衰减至少30dB。
3. 解释第2问得到的结果。
4. 如果不使用时域低通滤波器滤除中心频率为$2f_c$的频率分量，而是对混频器输出的1000个抽样值进行离散傅里叶变换(DFT)，再将中心频率为$2f_c$的频率分量设置为零，然后再进行DFT逆变换以获得时域信号。比较此频域滤波与第2问中的时域滤波的结果。



上机习题3.4图 DSM-SC调幅信号解调示意

3.5 SSB调幅信号的解调

上机习题3.1中的调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行调制，生成下单边带信号$u(t)$，载频$f_c=250\text{Hz}$。

1. 对调制信号$m(t)$、其希尔波特变换$\hat{m}(t)$和已调LSSB信号$u(t)$进行间隔$t_s=0.0001$的均匀抽样，各生成1000个抽样值，并画图。
2. 使用如上机习题3.4图所示的解调器对第1问中生成的抽样LSSB信号$u(t)$进行解调。对于$\phi=0$，$\pi/8$，$\pi/4$，$\pi/2$等不同情形，画出解调输出信号$m_r(t)$的图形。低通滤波器按照上机习题3.4第2问中给出的特性参数进行设计。
3. 解释第2问得到的结果。
4. 如果不使用第2问中的时域低通滤波器，而是采用上机习题3.4第4问中的DFT频域滤波法，滤除中心频率为$2f_c$的频率分量。比较此频域滤波与第2问中的时域滤波的结果。

3.6 常规调幅的解调

上机习题3.1中的调制信号$m(t)$对载波$c(t)=\cos(2\pi f_c t)$进行常规幅度调制，载频$f_c=250\text{Hz}$，调制指数$a=0.80$。

1. 对调制信号$m(t)$和已调常规调幅信号$u(t)$进行间隔$t_s=0.0001$的均匀抽样，各生成1000个抽样值，并画图。
2. 通过计算常规调幅信号$u(t)$的包络

$$e(t)=\sqrt{[1+am(t)]^2}=|1+am(t)|$$

并减去DC值，对第1问中生成的$u(t)$进行解调，画出解调输出信号$m_r(t)$的图形。
3. 解释第2问得到的结果。

159
~
160

第4章

角度调制

第 3 章采用对载波进行幅度调制的方式传输信号。幅度调制又称为线性调制，尽管常规调幅并非严格意义上的线性。

本章要介绍的是另一类调制方法，包括频率调制(FM)和相位调制(PM)。在 FM 系统中，载波的频率 f_c 随调制信号的变化而变化；在 PM 系统中，载波的相位随调制信号的变化而变化。FM 和 PM 都是非线性的，经常将两者合在一起，称为角度调制。随后的各节会指出，由于自身的非线性特质，角度调制实现起来非常复杂，分析起来也很困难。在许多情形下，只能进行近似分析。角度调制的另一个性质是它的带宽展宽特性。FM 和 PM 系统一般都会造成带宽展宽，这使得已调信号的有效带宽通常数倍于调制信号的带宽[⊖]。由于更高的实现复杂性和更多的带宽占用，自然要质疑这两个系统的使用价值何在。第 6 章的分析将会解释这两个系统的主要优点是它们具有更高的抗噪性能。事实上，这两个系统通过牺牲带宽占用来换取更高的抗噪性能。这正是 FM 系统广泛应用于高保真音乐广播，以及发射功率相对受限的点到点通信系统的原因。角度调制信号的另一个优点是恒包络，这样信号可以利用非线性放大器进行放大。

4.1 FM 信号和 PM 信号的表示形式

调角信号可以写成下列通式

$$u(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \tag{4.1.1}$$

其中 f_c 表示载波频率，$\phi(t)$表示时变相位。则信号的瞬时频率为

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \tag{4.1.2}$$

若调制信号记作 $m(t)$，在 PM 系统中，相位与调制信号成正比，即

$$\phi(t) = k_p m(t) \tag{4.1.3}$$

而在 FM 系统中，瞬时频率与载波频率的频偏与调制信号成正比，即

$$f_i(t) - f_c = k_f m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \tag{4.1.4}$$

其中 k_p 和 k_f 分别是相位和频率偏移常数。根据上述关系，可以得到

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.5}$$

上式表明 FM 和 PM 系统之间存在密切且有趣的联系，因此可以并行分析这两种系统，仅在必要的时候强调两者的主要差别即可。首先要注意，用调制信号的积分对载波进行相位调制等效于用原调制信号对载波进行频率调制。另一方面，两者的关系可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) = \begin{cases} k_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f m(t) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

这表明用调制信号的导数对载波进行频率调制等效于用原调制信号对载波进行相位调

⊖ 严格说来，已调信号的带宽是无穷的，因此要使用“有效带宽”这一概念。

制。图4-1给出了FM和PM系统之间的上述关系。而图4-2展示了方波信号及其积分——锯齿信号，以及它们相应的FM和PM信号。

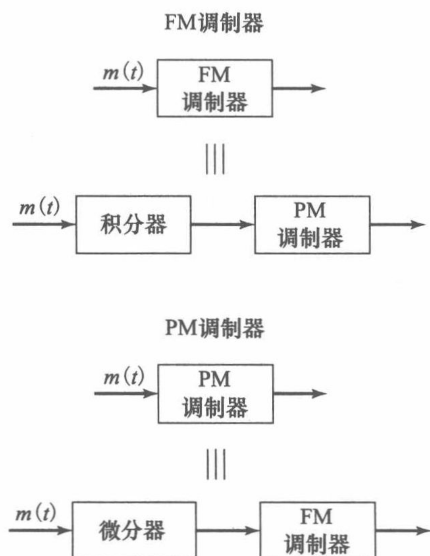


图4-1 频率调制器和相位调制器的关系

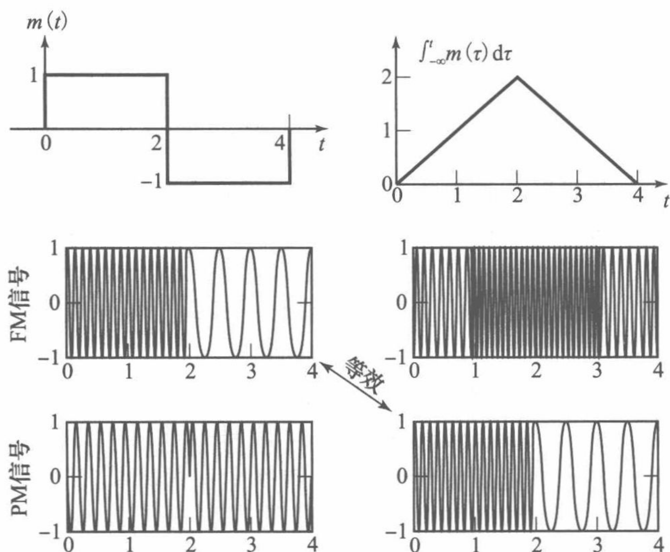


图4-2 方波及锯齿波的频率调制和相位调制

FM信号的解调需要确定已调信号的瞬时频率，然后减去载频。而PM信号的解调需要确定已调信号的相位，然后再恢复$m(t)$。PM系统的最大相位偏移为

$$\Delta\phi_{\max} = k_p \max[\,|m(t)|\,] \tag{4.1.7}$$

而FM系统的最大频率偏移为

$$\Delta f_{\max} = k_f \max[\,|m(t)|\,] \tag{4.1.8}$$

162~163

例4.1.1 调制信号

$$m(t) = a\cos(2\pi f_m t)$$

分别对载波$A_c\cos(2\pi f_c t)$进行频率调制和相位调制，求两种情形下的已调信号。

解：在PM中有

$$\phi(t) = k_p m(t) = k_p a(\cos 2\pi f_m t) \tag{4.1.9}$$

在FM中有

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\,d\tau = \frac{k_f a}{f_m}\sin(2\pi f_m t) \tag{4.1.10}$$

因此，已调信号为

$$u(t) = \begin{cases} A_c\cos[2\pi f_c t + k_p a\cos(2\pi f_m t)] & \text{PM} \\ A_c\cos\left[2\pi f_c t + \dfrac{k_f a}{f_m}\sin(2\pi f_m t)\right] & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.11}$$

定义

$$\beta_p = k_p a \tag{4.1.12}$$

和

$$\beta_f = \frac{k_f a}{f_m} \tag{4.1.13}$$

则有

$$u(t) = \begin{cases} A_c\cos[2\pi f_c t + \beta_p\cos(2\pi f_m t)] & \text{PM} \\ A_c\cos[2\pi f_c t + \beta_f\sin(2\pi f_m t)] & \text{FM} \end{cases} \tag{4.1.14}$$

参数β_p和β_f分别称为PM系统和FM系统的调制指数。 ◀

可以将调制指数的定义扩展至一般非正弦信号$m(t)$，如下

$$\beta_p = k_p \max[\,|m(t)|\,] \tag{4.1.15}$$

$$\beta_f = \frac{k_f \max[|m(t)|]}{W} \tag{4.1.16}$$

其中 W 表示调制信号 $m(t)$ 的带宽。用最大相位偏移 $\Delta\phi_{\max}$ 和最大频率偏移 $\Delta f_{\max}$ 来表示，有

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} \tag{4.1.17}$$

164

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\max}}{W} \tag{4.1.18}$$

窄带角度调制[⊖]。如果在一个偏移常数为 k_p 和 k_f，调制信号为 $m(t)$ 的角度调制系统，对于所有 t 都有 $\phi(t) \ll 1$。则可以将式(4.1.1)中的 $u(t)$ 近似简化为

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c\cos(2\pi f_c t)\cos\phi(t) - A_c\sin(2\pi f_c t)\sin\phi(t) \\ &\approx A_c\cos(2\pi f_c t) - A_c\phi(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

其中，在 $\phi(t) \ll 1$ 的条件下，利用了近似关系 $\cos\phi(t) \approx 1$ 和 $\sin\phi(t) \approx \phi(t)$。式(4.1.19)表明，在上述条件下，已调信号与由式(3.2.5)给出的常规调幅信号非常相似。唯一的区别是调制信号 $m(t)$ 调制于正弦载波之上，而非余弦载波。已调信号的带宽也与常规调幅信号的带宽相同，都是调制信号带宽的两倍。当然，此带宽只是 FM 信号真实带宽的近似值。已调信号的相量图以及与常规调幅信号的对比如图 4-3 所示。相对于常规调幅，窄带角度调制方案的幅度变化很小。当然，从理论上讲，角度调制系统的幅度恒定，在系统的相量图表示中不应该出现幅度的变化。而此时幅度的微小变化是由于对 $\sin\phi(t)$ 和 $\cos\phi(t)$ 的展开采用了一阶近似的缘故。随后的章节会说明，窄带角度调制系统的抗噪性能并不优于常规调幅系统，因此窄带角度调制很少用于实际的通信应用。然而，窄带角度调制可以作为生成宽带调角信号的中间阶段使用，有关此方面的详细内容将在 4.3 节展开讨论。

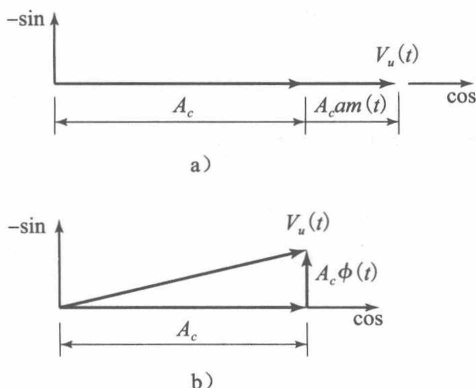


图 4-3 常规调幅和窄带角度调制的相量图

165

4.2 调角信号的频谱特征

由于角度调制系统固有的非线性，即便对于简单的调制信号，其已调信号的频谱特征都难以用数学表达式给出清晰的描述。因此，关于调角信号频谱特征的推导，需要从学习简单信号的调制开始，并引入某种程度的近似。下面开始学习正弦信号作为调制信号对载波进行角度调制。

4.2.1 正弦信号的角度调制

考虑正弦信号作为调制信号的情形(确切地说，PM 中为正弦信号，FM 中为余弦信号)。正如例 4.1.1 所示，不论 FM，还是 PM，都有

$$u(t) = A_c\cos[2\pi f_c t + \beta\sin(2\pi f_m t)] \tag{4.2.1}$$

其中 β 为调制指数，既可以是 β_p 也可以是 β_f，只是在 PM 中，$\sin(2\pi f_m t)$ 要用 $\cos(2\pi f_m t)$ 代替。根据欧拉公式，已调信号可以写成

$$u(t) = Re[A_c e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta\sin(2\pi f_m t)}] \tag{4.2.2}$$

由于 $\sin(2\pi f_m t)$ 是周期信号，周期为 $T_m = \frac{1}{f_m}$，同样复指数信号

⊖ 也称为低指数角度调制。

$$e^{j\beta\sin(2\pi f_m t)}$$

亦是如此，因此可以傅里叶级数展开。傅里叶级数的系数为

$$c_n = f_m\int_0^{\frac{1}{f_m}} e^{j\beta\sin(2\pi f_m t)} e^{-jn2\pi f_m t}\,dt \overset{u=2\pi f_m t}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j(\beta\sin u - nu)}\,du \tag{4.2.3}$$

上式中后一个积分式即为著名的第Ⅰ类 n 阶贝塞尔(Bessel)函数，记作 $J_n(\beta)$。因此，复指数信号的傅里叶级数为

$$e^{j\beta\sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn2\pi f_m t} \tag{4.2.4}$$

将式(4.2.4)代入式(4.2.2)，得

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn2\pi f_m t} e^{j2\pi f_c t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta)\cos[2\pi(f_c + nf_m)t] \tag{4.2.5}$$

166

上式表明，即便调制信号是频率为 f_m 的正弦信号这种非常简单的情况，已调信号也包含了形如 $f_c+nf_m(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$的所有频率成分。因此，调制信号的实际带宽是有限的。然而，当 n 很大时，频率为 f_c+nf_m 的正弦频率分量的幅度非常小。那么，可以为已调信号定义一个取有限值的有效带宽。若 β 取值很小，可以使用近似式

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!} \tag{4.2.6}$$

因此，对于小的调制指数 β，只有与 $n=1$ 相对应的第一个边带比较显著。而且，很容易验证贝塞尔函数具有如下对称性质：

$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & n\text{ 为偶数} \\ -J_n(\beta) & n\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

不同 n 值的 $J_n(\beta)$曲线如图4-4所示。表4-1分别列出了包含80%、90%和98%的FM信号总功率所需谐波的数量。

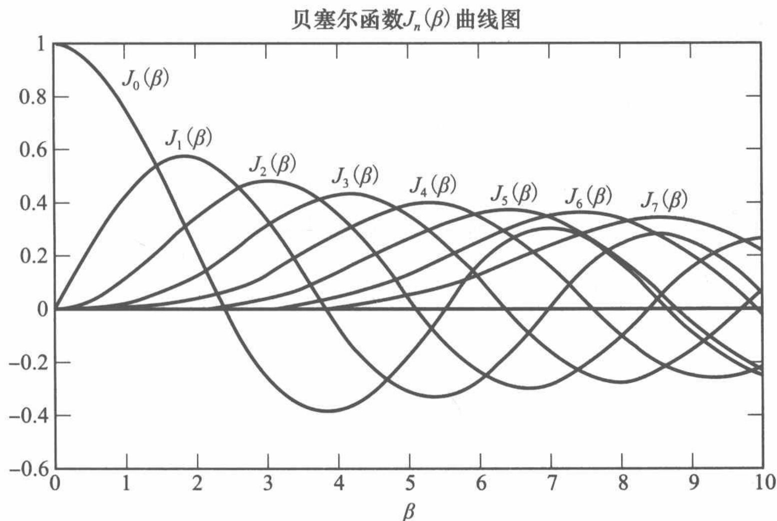


图4-4　不同 n 值的贝塞尔函数

表4-1　FM信号所需谐波数量

功率(%)	$\beta=0.5$	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=5$	$\beta=8$	$\beta=10$	$\beta=15$
80	—	1	2	4	7	9	14
90	1	1	2	5	8	10	15
98	1	2	3	6	9	11	16

167

例 4.2.1 设调制信号 $m(t)=\cos(20\pi t)$ 对载波 $c(t)=10\cos(2\pi f_c t)$ 进行频率调制，调制指数 $k_f=50$。求已调信号的表达式，并确定包含已调信号 99%功率所需的谐波数量。

解：载波信号的功率为

$$P_c=\frac{A_c^2}{2}=\frac{100}{2}=50 \tag{4.2.8}$$

已调信号可表示为

$$\begin{aligned}u(t)&=10\cos\left[2\pi f_c t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}\cos(20\pi\tau)\mathrm{d}\tau\right]=10\cos\left[2\pi f_c t+\frac{50}{10}\sin(20\pi t)\right]\\&=10\cos[2\pi f_c t+5\sin(20\pi t)]\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

根据式(4.1.16)，调制指数为

$$\beta_f=\frac{k_f\max[\,|m(t)|\,]}{f_m}=5 \tag{4.2.10}$$

因此，FM 已调信号为

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_c J_n(\beta)\cos[2\pi(f_c+nf_m)t]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}10J_n(5)\cos[2\pi(f_c+10n)t] \tag{4.2.11}$$

已调信号的频率分量位于 n 取不同值的各频率 f_c+10n 处。为了确保信号总功率的 99%都落在有效带宽内，必须选择足够大的 k 值，使得

$$\sum_{n=-k}^{k}\frac{100J_n^2(5)}{2}\geqslant 0.99\times 50 \tag{4.2.12}$$

这是一个非线性方程，查找贝塞尔函数表并通过累试法可以求其(k 的)解。在求解的过程中，可以利用式(4.2.7)给出的贝塞尔函数的对称性质，得

$$50\left[J_0^2(5)+2\sum_{n=1}^{k}J_n^2(5)\right]\geqslant 49.5 \tag{4.2.13}$$

先从较小的值开始，逐步增大 k 的取值，得到使上式的左侧大于右侧的最小 k 值为 $k=6$。因此，取 $0\leqslant k\leqslant 6$ 范围内的所有频率 f_c+10k 就可以涵盖已调信号功率的 99%，仅有 1%的功率没有包括在内。这意味着如果让已调信号通过一个中心频率为 f_c，带宽至少为 120Hz 的带通滤波器，则仅有 1%的信号功率会被滤除。这是一种定义调角信号的有效带宽的实用方法。图 4-5 展示了上述已调信号的有效带宽内的各频率成分。

168

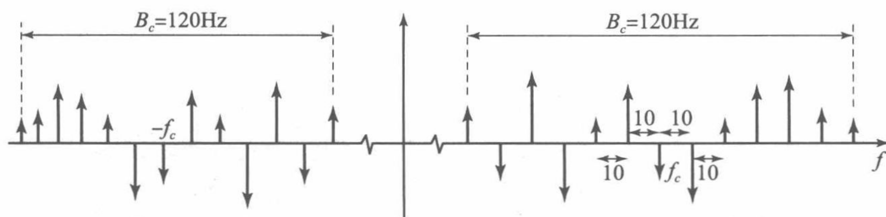


图 4-5 例 4.2.1 中出现在有效带宽范围内的谐波

一般情况下，调角信号的有效带宽涵盖 98%的信号功率，其值可由下式给定

$$B_c=2(\beta+1)f_m \tag{4.2.14}$$

其中 β 为调制指数，f_m 为正弦调制信号的频率。研究正弦调制信号的幅度和频率对于已调信号的谐波数量和带宽的影响是有指导意义的。设调制信号为

$$m(t)=a\cos(2\pi f_m t) \tag{4.2.15}$$

根据式(4.2.14)、式(4.1.12)和式(4.1.13)，已调信号的带宽[⊖]为

$$B_c=2(\beta+1)f_m=\begin{cases}2(k_p a+1)f_m & \text{PM}\\ 2\left(\dfrac{k_f a}{f_m}+1\right)f_m & \text{FM}\end{cases} \tag{4.2.16}$$

⊖ 在本书的剩余部分中，带宽指的就是有效带宽，除非特别做出说明。

或

$$B_c = \begin{cases} 2(k_p a + 1) f_m & \text{PM} \\ 2(k_f a + f_m) & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.17}$$

上式表明，从增加调制信号的幅度 a 从而增加带宽 B_c 的效果来看，PM 和 FM 几乎是相同的。然而，增加调制信号的频率 f_m 对于增加 PM 信号带宽的效果要远大于 FM 信号。虽然 FM 和 PM 信号的带宽 B_c 都会随着 f_m 的增加而增加，但是对于 PM，带宽增加与 f_m 的增加成正比，而对于 FM，只是线性增加，而且(当 β 取值较大时)通常增加并不显著。如果将带宽内的谐波数量(包括载波)记作 M_c，则有 169

$$M_c = 2(\lfloor \beta \rfloor + 1) + 1 = 2\lfloor \beta \rfloor + 3 = \begin{cases} 2\lfloor k_p a \rfloor + 3 & \text{PM} \\ 2\left\lfloor \dfrac{k_f a}{f_m} \right\rfloor + 3 & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.18}$$

上式两种情形中，幅度 a 增加都会引起已调信号带宽内的谐波数量增加。但是，f_m 的增加对于 PM 信号带宽内的谐波数量没有影响，而 FM 信号带宽内的谐波数量却线性减少。这就解释了为何 FM 信号带宽对调制信号频率的敏感度相对较低。f_m 增加会导致带宽内的谐波数量减少，但同时也会增大谐波之间的间隔，结果是带宽略微增加。而对于 PM 信号，谐波数量仍然保持不变，只是谐波之间的间隔增加。因此，结果是带宽线性增加。图 4-6 展示了调制信号频率增加对于 FM 和 PM 信号带宽的影响。

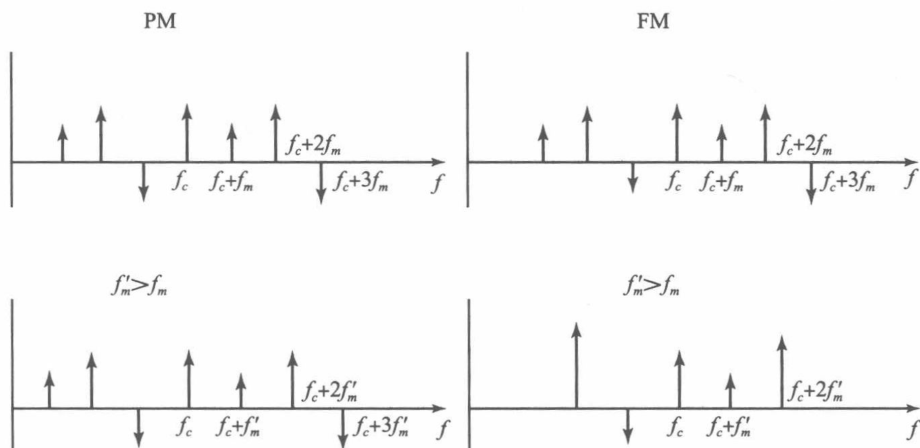


图 4-6 调制信号带宽(频率)加倍对于 PM 和 FM 信号的影响

4.2.2 任意调制信号的角度调制

由于调制过程固有的非线性，对于一般的调制信号 $m(t)$，分析其角度调制信号的频谱特征颇为麻烦。然而，有一个已调信号有效带宽的近似公式，称为卡森(Carson)公式，即 170

$$B_c = 2(\beta + 1)W \tag{4.2.19}$$

其中 β 为调制指数，定义为

$$\beta = \begin{cases} k_p \max[|m(t)|] & \text{PM} \\ \dfrac{k_f \max[|m(t)|]}{W} & \text{FM} \end{cases} \tag{4.2.20}$$

W 是调制信号 $m(t)$ 的带宽。由于宽带 FM 的 β 值通常为 5 左右，甚至更高，因此角度调制信号的带宽远大于各种调幅信号的带宽。包括带宽为 W 的 SSB 调幅，和带宽为 $2W$ 的 DSB 调幅或常规调幅。

例 4.2.2 设 $m(t)=10\text{sinc}(10^4 t)$，求 $k_f=4000$ 的 FM 已调信号的传输带宽。

解：对于 FM，有 $B_c=2(\beta+1)W$。为了求 W，必须求 $m(t)$的频谱。由于 $M(f)=10^{-3}\Pi(10^{-4}f)$，则 $m(t)$的带宽为 5000Hz。由于 $m(t)$的最大幅度为 10，有

$$\beta=\frac{k_f\max[|m(t)|]}{W}=\frac{4000\times 10}{5000}=8$$

且

$$B_c=2(8+1)\times 5000=90\text{kHz}$$

◀

4.3 角度调制器和解调器的实现

任何调制和解调过程都会导致输入信号本来没有的新频率成分的产生，无论幅度调制还是角度调制，都是如此。那么，调制器作为一个系统，输入调制信号 $m(t)$，输出已调信号 $u(t)$，输出信号中含有输入信号本没有的频率成分。因此，调制器(和解调器)不是线性时不变(LTI)系统，因为 LTI 系统不会输出任何未出现在输入信号中的频率成分。

角度调制器。角度调制器通常是时变非线性系统。一种直接生成 FM 信号的方法是设计一种频率随输入电压变化而变化的振荡器。当输入电压为零时，振荡器生成频率为 f_c 的正弦波；当输入电压变化时，正弦波的频率随之改变。这种振荡器通常称为压控振荡器(VCO)，实现它主要有两种方法。一种是使用变容二极管。这是一种容量随外加电压变化而变化的电容。如果将此电容用于振荡器的调谐电路，并加载调制信号，则调谐电路和振荡器的频率就会随调制信号同步变化。若设如图 4-7 所示调谐电路中电感的大小为 L_0，则变容二极管的容量为

171

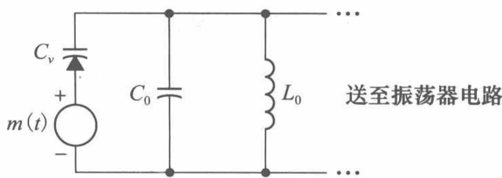


图 4-7 变容二极管实现角度调制器

$$C(t)=C_0+k_0m(t) \tag{4.3.1}$$

当 $m(t)=0$ 时，调谐电路的频率为 $f_c=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}}$。对于非零 $m(t)$，一般有

$$f_i(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{L_0[C_0+k_0m(t)]}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_0C_0}\sqrt{1+\frac{k_0}{C_0}m(t)}}$$

$$=f_c\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k_0}{C_0}m(t)}} \tag{4.3.2}$$

设

$$\varepsilon=\frac{k_0}{C_0}m(t)\ll 1$$

并利用近似式

$$\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3.3}$$

和

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\approx 1-\varepsilon \tag{4.3.4}$$

得

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\approx 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$f_i(t) \approx f_c\left[1 - \frac{k_0}{2C_0}m(t)\right] \tag{4.3.5}$$

显然，得到的就是 FM 信号。

第二种生成 FM 信号的方法是使用电抗管。电抗管电感器的电感量随外加电压的变化而变化。这种方法的分析过程非常类似于变容二极管的分析过程。虽然以上两种方法讲的是如何生成 FM 信号，但由于 FM 信号与 PM 信号之间的密切关系（见图 4-1），同样的方法也可以用于生成 PM 信号。

172

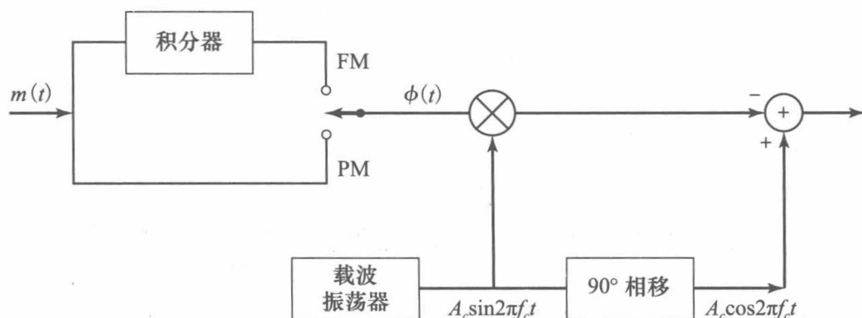


图 4-8 窄带调角信号的生成框图

另一种生成调角信号的方法是，先生成窄带调角信号，然后再将其转换成宽带信号。此方法通常称为生成 FM 和 PM 信号的间接方法。由于窄带调角信号与常规调幅信号相似，因此可以直接生成窄带调角信号。实际上，任何用于生成常规调幅信号的调制器经过简单改造之后都可以用于生成窄带调角信号。图 4-8 给出了窄带角度调制器的框图。接下来，就要用窄带调角信号生成宽带调角信号，系统框图如图 4-9 所示。该系统的第一步是生成一个如图 4-8 所示的窄带调角信号。然后将窄带调角信号输入倍频器，使输入的瞬时频率乘以某个常数 n。这部分通常是通过将输入信号加载于一个非线性器件上，再让器件的输出经过一个调谐至所需中心频率上的带通滤波器过滤而实现。设窄带调角信号可以表示成

$$u_n(t) = A_c\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \tag{4.3.6}$$

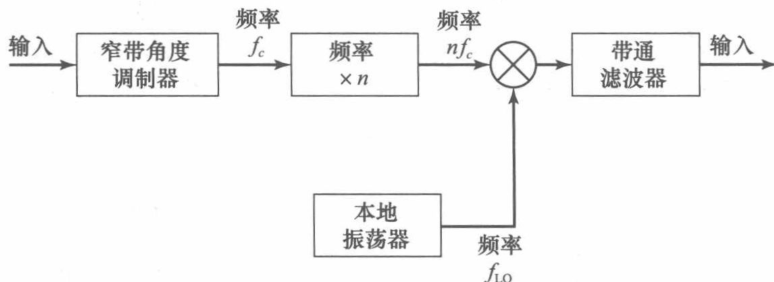


图 4-9 调角信号的间接生成框图

173

则倍频器的输出（也就是带通滤波器的输出）为

$$y(t) = A_c\cos[2\pi n f_c t + n\phi(t)] \tag{4.3.7}$$

一般来说，这就是一个宽带调角信号。但是，该信号的载频 nf_c 未必就是所需的载波频率。因此，通常在调制器的最后一级，通过上下变频将已调信号的频率成分平移至所需的载频处。这一级由一个混频器和一个带通滤波器组成。如果混频器的本地振荡器频率为 f_{LO}，且使用下变频，则最后的宽带调角信号为

$$u(t) = A_c\cos[2\pi(nf_c - f_{LO})t + n\phi(t)] \tag{4.3.8}$$

由于 n 和 f_{LO} 可以自由取值，使用上述方法就可以生成载频和调制指数都满足要求的宽带调角信号。

角度解调器。FM 解调器可以按照如下方法实现：首先生成一个幅度与 FM 信号的频率成正比的 AM 信号，然后利用 AM 解调器恢复调制信号。为了实现第一步，即把 FM 信号转换为 AM 信号，只需要将 FM 信号通过一个频率响应在 FM 信号频带范围内近似为直线的 LTI 系统。若此系统的频率响应为

$$|H(f)| = V_0 + k(f - f_c) \quad |f - f_c| < \frac{B_c}{2} \tag{4.3.9}$$

且系统的输入为

$$u(t) = A_c\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f\int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.3.10}$$

则系统的输出为

$$v_o(t) = A_c[V_0 + kk_f m(t)]\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f\int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.3.11}$$

下一步就是解调此信号以获得 $A_c[V_0 + kk_f m(t)]$，并最终恢复出调制信号 $m(t)$，如图 4-10 所示。



图 4-10 通用 FM 解调器

许多电路都可用于实现 FM 解调器的第一级功能，即 FM 至 AM 的转换。其中一种就是使用极为简单的微分器，即

174

$$|H(f)| = 2\pi f \tag{4.3.12}$$

另一种是使用具有如图 4-11 所示升余弦频率特性的调谐电路。该电路易于实现，但其频率特性的线性区域通常不够宽阔。为了在更宽的频率范围内具有线性特性，通常把调谐频率分别为 f_1 和 f_2 的两组电路连接在一起，称为平衡鉴频器。平衡鉴频器的结构及其频率特性如图 4-12 所示。

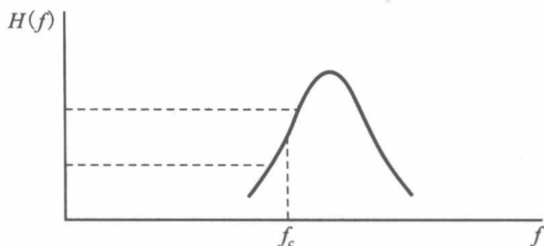
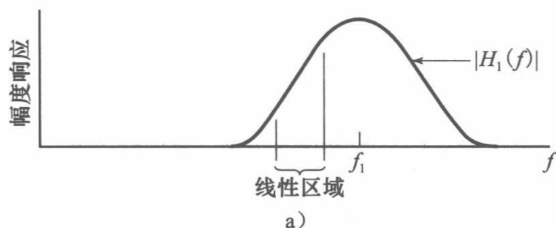
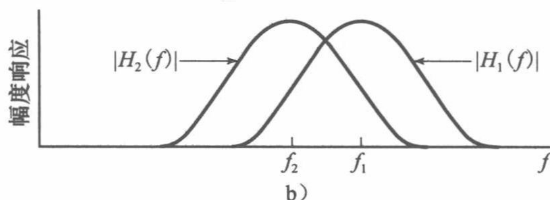
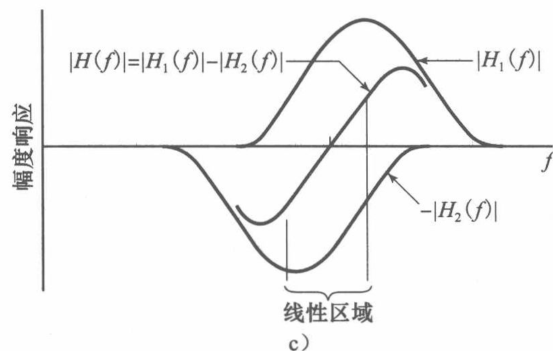


图 4-11 一种 FM 解调器中调谐电路的频率响应







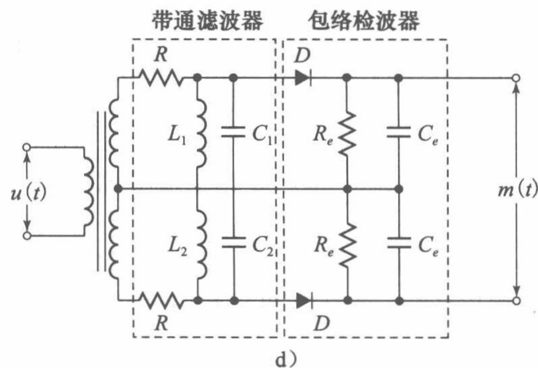


图 4-12 平衡鉴频器及其频率响应

这些将 FM 信号转换成 AM 信号的 FM 解调器的带宽等于 FM 信号占用的信号带宽 B_c。因此，位于 B_c 内的噪声都能够通过这类解调器。

还有一种截然不同的 FM 解调方法，是在 FM 解调器中使用反馈电路(第 6 章将会介绍这种方法)。这种方法可使 FM 解调器的带宽变窄，从而降低解调器输出的噪声功率。图 4-13 展示的就是这样一种系统，鉴频器放置在反馈系统的反馈支路中，反馈系统还有一条 VCO 路径。

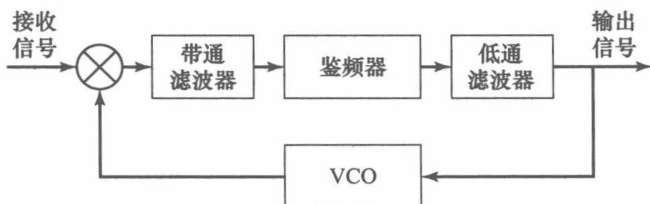


图 4-13 FMFB 解调器的框图

鉴频器和低通滤波器的带宽设计成与调制信号 $m(t)$ 带宽相匹配。低通滤波器的输出即为解调后的信号。这种类型的 FM 解调器称为带反馈的 FM 解调器(FMFB)。FMFB 解调器的另外一种形式使用了锁相环(PLL)，如图 4-14 所示(锁相环将在 8.8.1 节详细介绍)。

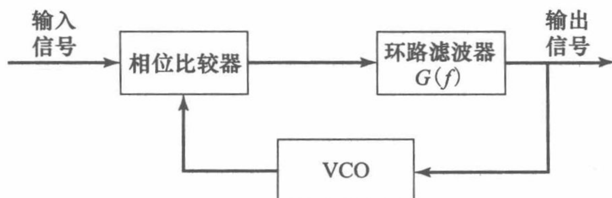


图 4-14 PLL-FM 解调器的框图

PLL 的输入为调角信号(本部分的讨论将忽略噪声的影响)，即

$$u(t) = A_c\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \tag{4.3.13}$$

其中，对于 FM 有

$$\phi(t) = 2\pi k_f\int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.14}$$

当没有输入控制电压时，VCO 生成固定频率的正弦波，频率为载频 f_c。

现在，假设 VCO 的控制电压是环路滤波器的输出，记作 $v(t)$。那么，VCO 的瞬时频率为

175~176

$$f_v(t) = f_c + k_v v(t) \tag{4.3.15}$$

其中 k_v 是偏移常数，单位是 Hz/V。则 VCO 的输出为

$$y_v(t) = A_v\sin[2\pi f_c t + \phi_v(t)] \tag{4.3.16}$$

其中

$$\phi_v(t) = 2\pi k_v\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.17}$$

相位比较器的基本构造是一个乘法器和一个可以滤除中心频率在 $2f_c$ 的频率成分的滤波器。因此，其输出为

$$e(t) = \frac{1}{2}A_v A_c\sin[\phi(t) - \phi_v(t)] \tag{4.3.18}$$

其中，差值 $\phi(t)-\phi_v(t)\equiv\phi_e(t)$ 即为相位误差，信号 $e(t)$ 输入环路滤波器。

假设 PLL 进入锁定状态，故相位误差很小，那么

$$\sin[\phi(t) - \phi_v(t)] \approx \phi(t) - \phi_v(t) = \phi_e(t) \tag{4.3.19}$$

在此条件下，可以用如图 4-15 所示的线性化模型表示 PLL。

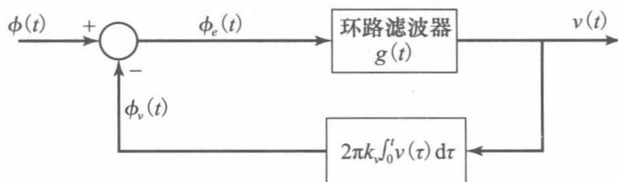


图 4-15　线性化的 PLL

相位误差可以表示为

$$\phi_e(t)=\phi(t)-2\pi k_v\int_{-\infty}^{t}v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.20}$$

或等价地表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_e(t)+2\pi k_v v(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \tag{4.3.21}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_e(t)+2\pi k_v\int_0^{\infty}\phi_e(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \tag{4.3.22}$$

式(4.3.22)是一个微积分方程，其傅里叶变换为

$$(\mathrm{j}2\pi f)\Phi_e(f)+2\pi k_v\Phi_e(f)G(f)=(\mathrm{j}2\pi f)\Phi(f) \tag{4.3.23}$$

因此有

$$\Phi_e(f)=\frac{1}{1+\left(\frac{k_v}{\mathrm{j}f}\right)G(f)}\Phi(f) \tag{4.3.24}$$

相应地，VCO 的控制电压为

$$\begin{aligned}V(f)&=\Phi_e(f)G(f)\\&=\frac{G(f)}{1+\left(\frac{k_v}{\mathrm{j}f}\right)G(f)}\Phi(f)\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

现在，假设设计 $G(f)$，使其在调制信号的频带范围 $|f|<W$ 满足

$$\left|k_v\frac{G(f)}{\mathrm{j}f}\right|\gg 1 \tag{4.3.26}$$

那么，由式(4.3.25)，得

$$V(f)=\frac{\mathrm{j}2\pi f}{2\pi k_v}\Phi(f) \tag{4.3.27}$$

或等效于

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{1}{2\pi k_v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\\&=\frac{k_f}{k_v}m(t)\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

177～178

由于 VCO 的控制电压正比于调制信号，则 $v(t)$即为解调出的信号。

可见，频率响应为 $G(f)$的环路滤波器的输出就是所需的调制信号。因此，$G(f)$的带宽应与调制信号的带宽 W 相同。这样，环路滤波器输出端的噪声也限制在带宽 W 内。另一方面，VCO 的输出是宽带 FM 信号，其瞬时频率随接收到的 FM 信号的瞬时频率变化而变化。在 FM 信号的解调过程中使用反馈电路的主要优点是降低了门限效应。当 FM 解调器的输入信噪比降到临界值以下时会出现门限效应，第 6 章将对此进行讨论。

4.4　调频无线电广播

商用 FM 无线电广播使用 88～108MHz 频段传送话音和音乐信号。载波频率间隔 200kHz，峰值频偏固定为 75kHz。FM 无线电广播通常要使用在第 6 章介绍的预加重技术，目的是在接收信号有噪条件下改善解调器的性能。

FM 无线电广播中最常用的接收机是超外差式接收机，其框图如图 4-16 所示。

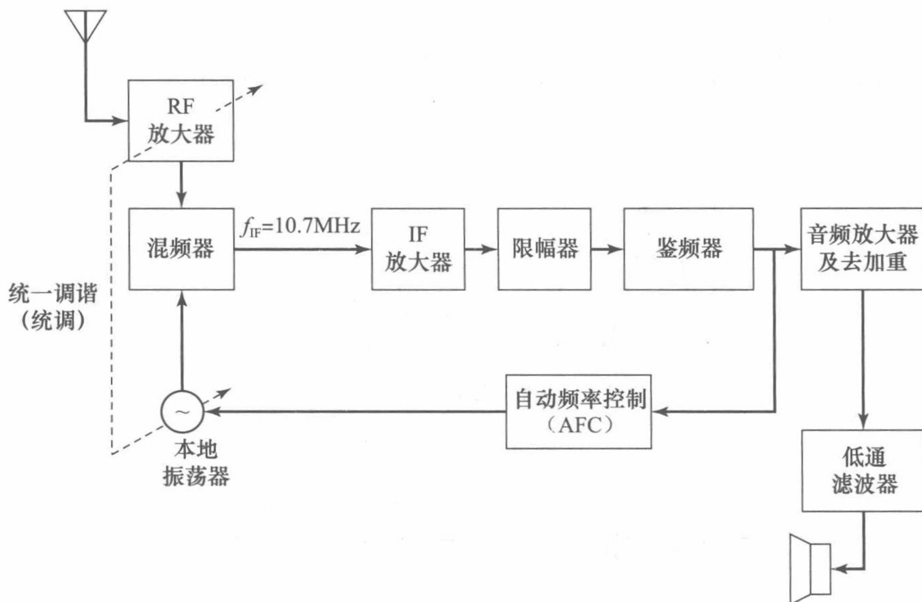


图 4-16　超外差式 FM 无线电接收机框图

与 AM 射频接收一样，RF 放大器和本地振荡器统一调谐，使混频器将全部 FM 射频信号搬进带宽为 200kHz，中心频率在 $f_{IF}=10.7$MHz 的公共 IF 带。由于调制信号$m(t)$嵌入已调信号的频率中，接收信号幅度上的任何变化都会产生加性噪声和干扰。限幅器置于 IF 放大器的输出端，通过限制信号幅度来移除接收信号中的任何幅度变化。限幅器内置有中心频率 $f_{IF}=10.7$MHz，带宽为 200kHz 的带通滤波器，用于消除由于限幅器内部固有的非线性而引入的高阶频率分量。

179

解调使用平衡鉴频器，输出的调制信号再送入音频放大器，完成放大信号和去加重两项功能。音频放大器的输出进一步通过低通滤波器滤除带外噪声，最后用于驱动扬声器。

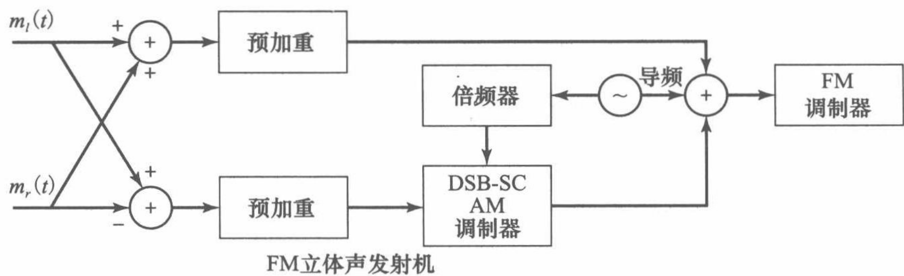
FM 立体声广播。许多 FM 无线电台都播放立体声音乐广播。这是利用放置在不同位置的两个话筒输出两路不同的信号，产生立体声效果。图 4-17 给出了 FM 立体声发射机的框图。分别来自左右两个话筒的信号 $m_l(t)$和 $m_r(t)$相互加减。和信号 $m_l(t)+m_r(t)$保持不变并占用频带 0～15kHz。差信号 $m_l(t)-m_r(t)$对 19kHz 振荡器生成的 38kHz 载波进行 AM 调制(DSB-SC)。为了便于解调此 DSB-SC 信号，一个 19kHz 的导频音被加入合成信号中。导频频率为 19kHz 而不是 38kHz 的原因是，19kHz 的导频更容易从接收到的合成信号中分离出来。最后，对上述合成信号进行频率调制。

通过将基带信号配置成 FDM 信号，单声道 FM 接收机就可以使用常规 FM 解调器来恢复和信号 $m_l(t)+m_r(t)$。因此，FM 立体声广播与常规 FM 兼容。此外，最后得到的 FM 信号也不会超过预先分配的 200kHz 带宽。

180

FM 立体声的解调器在限幅器/鉴频器及其前面的各个部分与常规 FM 解调器基本相同。在鉴频器之后，基带调制信号分为两路信号：$m_l(t)+m_r(t)$和 $m_l(t)-m_r(t)$，通过去加重滤波器，如图 4-18 所示。同步解调器利用导频音从 DSB-SC 信号中解调出差信号。利

用和信号和差信号恢复出 $m_l(t)$ 和 $m_r(t)$。这两路音频信号经音频放大器放大后，驱动双声道扬声器。而不具备立体声功能的常规 FM 接收机只能得到频率范围在 0～15kHz 的基带信号 $m_l(t)+m_r(t)$。因此，只能输出两个话筒信号之和的单声道信号。



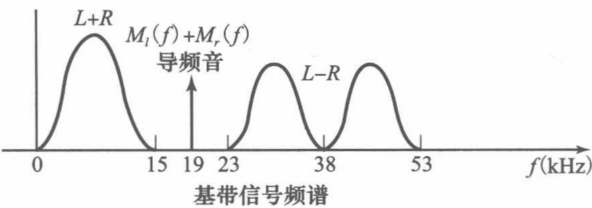


图 4-17 FM 立体声发射机和信号间距

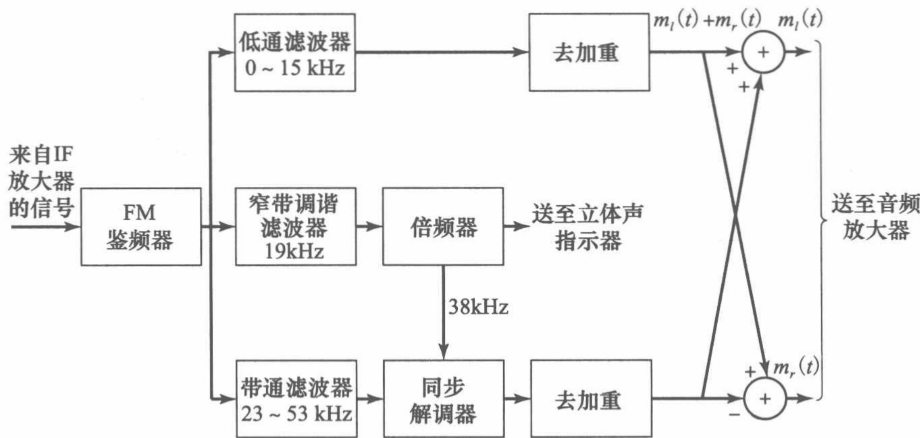


图 4-18 FM 立体声接收机

4.5 小结及深入阅读

本章讲述了传输模拟信号使用的频率调制(FM)和相位调制(PM)，分析了 FM 和 PM 信号的频谱特性及带宽占用，还讨论了 FM 和 PM 的调制器及解调器的实现。在本章的最后一部分，简要介绍了 FM 无线电广播的内容。

同幅度调制一样，角度调制(FM 和 PM)的详细内容出现在许多关于通信的著作中，包括之前在 3.6 节提到的一些著作。

181

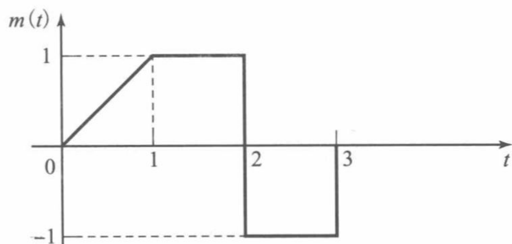
习题

4.1 调制信号 $m(t)=10\text{sinc}(400t)$ 对载波 $c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$ 进行调制指数为 6 的频率调制。

1. 写出已调信号的表达式。
2. 求已调信号的最大频偏。
3. 求已调信号的功率。
4. 求已调信号的带宽。

4.2 信号 $m(t)$ 如习题 4.2 图所示，该信号对同一载波分别进行频率调制和相位调制。

1. 为了使两种已调信号的最大相位相同，求 k_p 与 k_f 之间的关系。
2. 若 $k_p=k_f=1$，求两种已调信号的最大瞬时频率。



习题 4.2 图

4.3　求 FM 信号和 PM 信号的同相和正交分量以及包络和相位。

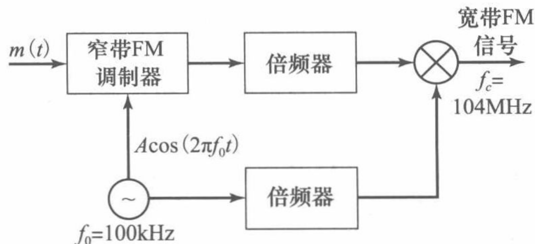
4.4　某调角信号为

$$u(t)=100\cos[2\pi f_c t+4\sin(2000\pi t)]$$

其中 $f_c=10\text{MHz}$。
1. 求平均发射功率。
2. 求峰值相位偏移。
3. 求峰值频率偏移。
4. 此为 FM 信号还是 PM 信号？请解释。

4.5　一个 FM 系统，设调制信号为正弦波，求能够保证所有已调信号功率均位于边带上，且载波发射功率为零的调制指数的最小值。

4.6　为了生成宽带 FM 信号，可以首先生成一个窄带调频信号，然后通过倍频来扩展信号带宽。习题 4.6 图描述的就是这样一种方案，称为阿姆斯特朗(Armstrong)型 FM 调制器。为了保证失真在可控的范围之内，窄带 FM 信号的最大相位偏移为 0.10 弧度。
1. 如果调制信号的带宽为 15kHz，振荡器的输出频率为 100kHz，为了能够生成载频 $f_c=104\text{MHz}$，频偏 $\Delta f=75\text{kHz}$ 的宽带 FM 信号，求各倍频器的倍数。
2. 若宽带 FM 信号的载频误差在 $\pm 2\text{Hz}$ 之内，求 100kHz 振荡器所允许的最大频率漂移。



习题 4.6 图　阿姆斯特朗型 FM 调制器

4.7　已知调制信号 $m(t)$ 为周期信号，其在一个周期内的表达式为

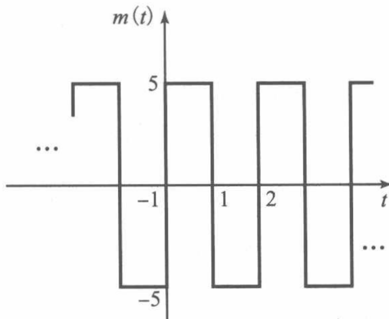
$$m(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T_m}{2}\\ -1 & \dfrac{T_m}{2}\leqslant t\leqslant T_m\end{cases}$$

$m(t)$ 对载波进行调制，生成 $k_p=1$ 的 PM 信号，求此 PM 信号各频率分量的幅度和相位。

4.8　某 FM 信号为

$$u(t)=100\cos\left[2\pi f_c t+100\int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

其中 $m(t)$ 如习题 4.8 图所示。
1. 画出以时间为自变量的瞬时频率函数曲线。
2. 求峰值频偏。



习题 4.8 图

4.9　信号 $m(t)=5\cos(20\,000\pi t)$ 对载波 $c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$ 进行频率调制，$f_c=10^8\text{Hz}$，峰值频偏为 20kHz。
1. 求功率大于未调制载波功率的 10% 的所有信号分量的幅度和频率。
2. 利用卡森公式，求 FM 信号的近似带宽。

4.10　正弦信号 $m(t)=2\cos(2000\pi t)$ 对载波 $c(t)=A\cos(2\pi 10^6 t)$ 分别进行相位调制和频率调制，偏移常数分别为 $k_p=1.5\text{rad/V}$ 和 $k_f=3000\text{Hz/V}$。
1. 求 β_p 和 β_f。
2. 利用卡森公式，求两种已调信号的带宽。
3. 画出两种已调信号的频谱(仅需画出位于问题 2 求得的带宽范围内的频率分量)。
4. 如果 $m(t)$ 的幅度减半，重做问题 1～3。
5. 如果 $m(t)$ 的频率加倍，重做问题 1～3。

4.11　信号 $m(t)=5\cos(2000\pi t)$ 对载波 $c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$ 进行相位调制，所得 PM 信号的峰值相偏为 $\pi/2$，载频 $f_c=10^8\text{Hz}$。
1. 求正弦波分量的幅度谱，并画出简图。
2. 利用卡森公式，求 PM 信号的近似带宽，并与第 1 问中的分析结果进行比较。

4.12　某调角信号为

$$u(t)=100\cos[2\pi f_c t+4\sin(2\pi f_m t)]$$

其中 $f_c=10\text{MHz}$，$f_m=1000\text{Hz}$。
1. 若 $u(t)$ 是一个 FM 信号，求调制指数和传输

带宽。

2. 若 f_m 加倍，重复第1问。

3. 若 $u(t)$是一个 PM 信号，求调制指数和传输带宽。

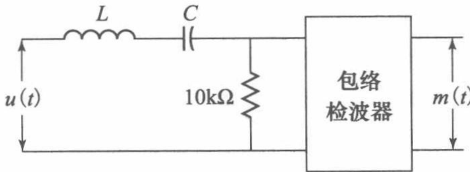
4. 若 f_m 加倍，重复第3问。

4.13 易证幅度调制满足叠加性，而角度调制不满足叠加性。为了详细说明，用 $m_1(t)$和 $m_2(t)$表示两调制信号，用 $u_1(t)$和 $u_2(t)$表示相应的已调信号。

1. 证明当合成调制信号 $m_1(t)+m_2(t)$对载波 $A_c\cos(2\pi f_c t)$进行 DSB 调制时，所得已调信号是两个 DSB 幅度调制信号之和，即$u_1(t)+u_2(t)$。

2. 证明当合成调制信号 $m_1(t)+m_2(t)$对载波 $A_c\cos(2\pi f_c t)$进行 FM 调制时，所得已调信号不等于 $u_1(t)+u_2(t)$。

4.14 某 FM 鉴频器如习题 4.14 图所示。假设包络检波器是理想的，且输入阻抗无穷大。若鉴频器用于解调一个载频 $f_c=80$MHz，峰值频偏为 6MHz 的 FM 信号，求 L 和 C 的大小。



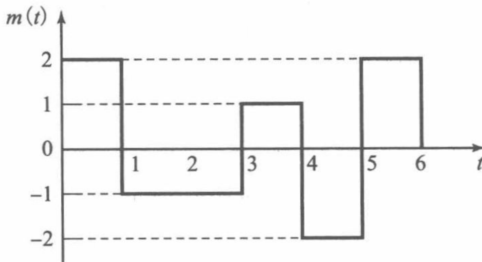
习题 4.14 图

4.15 某调角信号为

$$u(t)=100\cos[2000\pi t+\phi(t)]$$

其中：(a) $\phi(t)=5\sin(20\pi t)$；(b) $\phi(t)=5\cos(20\pi t)$。求并画出(a)和(b)情形下 $u(t)$的幅度谱和相位谱。

4.16 如习题 4.16 图所示的调制信号 $m(t)$输入 $f_d=25$Hz/V 的 FM 调制器。画出以 Hz 为单位的频率偏移和以弧度为单位的相位偏移。



习题 4.16 图

182
≀
187

4.17 调制信号 $m(t)$的带宽为 10kHz，峰值幅度 $\max[|m(t)|]$为 1V。若用此调制信号对载波进行峰值频偏分别为 10Hz/V、100Hz/V 和 1000Hz/V 的频率调制，求已调信号 $u(t)$的带宽。

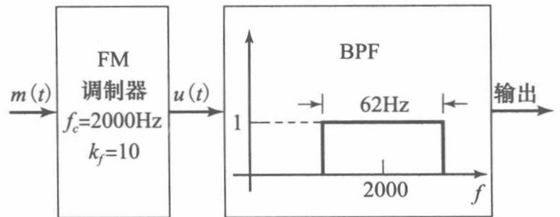
4.18 输入 FM 调制器的调制信号为

$$m(t)=10\cos(16\pi t)$$

FM 调制器的输出为

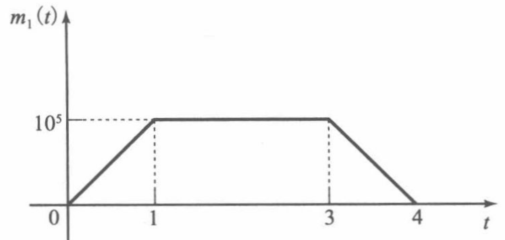
$$u(t)=10\cos\left[4000\pi t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

其中 $k_f=10$(参见习题 4.18 图)。若 FM 调制器的输出通过一个中心频率 $f_c=2000$Hz，带宽为 62Hz 的理想带通滤波器，求滤波器输出信号的各频率分量的功率以及滤波器输出信号功率占发射功率的百分比。



习题 4.18 图

4.19 调制信号 $m_1(t)$如习题 4.19 图所示，调制信号 $m_2(t)=\mathrm{sinc}(2\times10^4 t)$，单位为 V。



习题 4.19 图

1. 如果 $m_1(t)$对频率为 10^6Hz 的载波进行频率调制，频率偏移常数 k_f 为 5Hz/V，求已调信号的最大瞬时频率。

2. 如果 $m_1(t)$用于相位调制，求已调信号的最大和最小瞬时频率。

3. 如果 $m_2(t)$用于相位调制，求已调信号的最大瞬时频率和带宽。

4.20 某超外差 FM 接收机工作在 88～108MHz 频段。IF 和本地振荡器的频率满足 $f_{IF}<f_{LO}$。若要使镜像频率 f_c'落在 88～108MHz 频段之外，求 f_{IF}的最小值和 f_{LO}的变化范围。

上机习题

4.1 频率调制

调制信号

$$m(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<t_0/3\\ -2 & t_0/3\leqslant t<2t_0/3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对载波 $c(t)=\cos(2\pi f_c t)$ 进行频率调制，其中 $f_c=200\text{Hz}$，$t_0=0.15s$，频率偏移常数 $k_f=50\text{Hz/V}$。因此，已调信号为

$$u(t)=\cos\left[2\pi f_c t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

1. 将调制信号 $m(t)$ 及其积分画在不同图中。抽样间隔 $t_s=0.0001$。
2. 画出 FM 信号 $u(t)$ 的图形。
3. 用 MATLAB 傅里叶变换程序计算 $m(t)$ 和 $u(t)$ 的频谱，并画在不同图中。
4. 若定义 $m(t)$ 的带宽 W 为其频谱主瓣的宽度，利用卡森公式，求调制指数 β 以及已调信号的带宽 B_c。

4.2 频率调制

调制信号

$$m(t)=\begin{cases}\operatorname{sinc}(100t) & |t|\leqslant t_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对载波 $c(t)=\cos(2\pi f_c t)$ 进行频率调制，其中 $f_c=250\text{Hz}$，$t_0=0.1\text{s}$，频率偏移常数 $k_f=100\text{Hz/V}$。因此，已调信号为

$$u(t)=\cos\left[2\pi f_c t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

1. 将调制信号 $m(t)$ 及其积分画在不同图中。抽样间隔 $t_s=0.0001$。
2. 画出 FM 信号 $u(t)$ 的图形。
3. 用 MATLAB 傅里叶变换程序计算 $m(t)$ 和 $u(t)$ 的频谱，并画在不同图中。
4. 对 $u(t)$ 进行解调，并将解调结果与原调制信号进行比较。FM 信号的解调过程如下：首先求 $u(t)$ 的相位，即 $m(t)$ 的积分，然后对其进行微分并除以 $2\pi k_f$，从而得到 $m(t)$。利用 MATLAB 函数 unwrap.m 来消除 2π 相位折叠的影响。评价解调结果与原调制信号 $m(t)$ 的匹配程度。

4.3 频率调制

调制信号

$$m(t)=\begin{cases}t & 0\leqslant t<1\\ -t+2 & 1\leqslant t<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对载波 $c(t)=\cos(2\pi f_c t)$ 进行频率调制，其中 $f_c=1000\text{Hz}$，频率偏移常数 $k_f=25\text{Hz/V}$。因此，已调信号为

$$u(t)=\cos\left[2\pi f_c t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

1. 将调制信号 $m(t)$ 及其积分画在不同图中。
2. 画出 FM 信号 $u(t)$ 的图形。
3. 用 MATLAB 傅里叶变换程序计算 $m(t)$ 和 $u(t)$ 的频谱，并画在不同图中。
4. 求调制指数以及 $u(t)$ 的带宽和瞬时频率变化范围。
5. 对 $u(t)$ 进行解调，并将解调结果与原调制信号进行比较。FM 信号的解调过程如下：首先求 $u(t)$ 的相位，即 $m(t)$ 的积分，然后对其进行微分并除以 $2\pi k_f$，从而得到 $m(t)$。利用 MATLAB 函数 unwrap.m 来消除 2π 相位折叠的影响。评价解调结果与原调制信号 $m(t)$ 的匹配程度。

188～189

第5章

概率论与随机过程

本章简要复习概率论的基础，并研究随机过程及其性质。随机过程为刻画信源和噪声提供了很好的模型。当信号通过信道传输时，有两类干扰导致接收到的信号不同于原发送信号。一类是自然界的确知干扰，诸如线性或非线性失真、码间干扰等。另一类是随机干扰，例如加性噪声、多径衰落等。为了对这些现象进行定量研究，需要利用随机过程模型来描述其性质。

随机过程模型是描述待传输信息的最好模型，因为任何携带信息的信号必然具有一定的不确定性，否则就没有传输的意义。第12章将对此话题进行深入探讨。本章先简要回顾概率论及随机变量的基础知识，然后介绍随机过程的概念以及分析随机过程时需要使用的数学工具。

5.1 概率与随机变量回顾

本书假定读者已经学过概率论的基本知识，本节仅对一些学习随机过程必须要用到的概率论的基础知识进行简要复习。

5.1.1 样本空间、事件及概率

随机实验是任何概率模型中都有的一个基本概念，指的是实验结果无法预测(确定)的任何实验。抛硬币、掷骰子、从一组卡片中任取一张都是随机实验的例子。这些实验的共同点是一次实验的结果(或输出)是不确定的，但可能的输出(结果)是一定的，即实验的基本结果。在抛硬币实验中，“正面”和“反面”是所有可能的结果。在掷骰子实验中，1～6点是所有可能的输出。所有可能的输出(结果)构成的集合称为样本空间，记作Ω。而输出用ω表示，每个ω都是Ω的一个元素，即$\omega\in\Omega$。

如果样本空间的元素数量是有限的或者*可数无穷的*[⊖]，则称样本空间是*离散的*。否则就是*非离散的*。上述随机实验的样本空间都是离散的。如果在0～1之间随机选取一个数，则该实验对应的样本空间是0～1之间的所有数，是无穷多且不可数的，这样的样本空间是非离散的。

事件是样本空间的一个子集，换言之，事件是输出结果的集合。例如，在掷骰子实验中，事件“结果为奇数点”包括结果1点、3点和5点；事件“结果点数大于3”包括结果4点、5点和6点；事件“结果点数可以被4整除”只包含结果4点。对于0～1之间随机取数的实验，可以定义事件“结果小于0.7”，或者事件“结果在0.2～0.5之间”，或者事件“结果为0.5”。两事件之间的交集为空集，则称事件*互斥*。例如，在掷骰子实验中，事件“结果为奇数点”和事件“结果点数可以被4整除”就是互斥的。

定义*概率* P 为一个集合函数，该集合函数把所有事件 E 与非负数值建立起对应关系，以满足下列条件：

1. 对于所有事件，有 $0\leqslant P(E)\leqslant 1$。
2. $P(\Omega)=1$。
3. 若事件 E_1，E_2，E_3，…互斥(即对于所有的 $i\neq j$，都有 $E_i\cap E_j=\varnothing$，其中$\varnothing$为空

⊖ 可数无穷指的是个数无穷但可列，即输出结果的数量无穷多，但可与自然数集合中的元素一一对应，即可数。

集)，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$。

由事件集合理论及概率的上述三个条件，易得概率的基本性质，其中几条重要性质如下：

1. $P(E^c)=1-P(E)$，其中 E^c 是 E 的补集。
2. $P(\varnothing)=0$。
3. $P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)$。
4. 如果 $E_1 \subset E_2$，那么 $P(E_1) \leqslant P(E_2)$。

5.1.2 条件概率

设有两个事件 E_1 和 E_2，概率分别为 $P(E_1)$和 $P(E_2)$。对于观察者而言，在事件 E_2 已经发生的情况下，事件 E_1 发生的概率就不再是 $P(E_1)$。实际上，观察者接收到的信息改变了不同事件发生的概率。为此，定义新的概率，称为条件概率。在事件 E_2 发生的条件下，事件 E_1 发生的条件概率定义为

191

$$P(E_1 \mid E_2)=\begin{cases}\dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} & P(E_2) \neq 0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.1.1}$$

如果恰好有 $P(E_1 \mid E_2)=P(E_1)$，那么关于事件 E_2 发生的信息并不影响事件 E_1 发生的概率。这种情况下，称事件 E_1 和 E_2 是独立的。对于相互独立的事件，有 $P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)P(E_2)$。

例 5.1.1 在掷骰子试验中，事件 $A=\{$结果点数大于 3$\}$的概率为

$$P(A)=P(4)+P(5)+P(6)=\frac{1}{2}$$

而事件 $B=\{$结果为偶数点$\}$的概率为

$$P(B)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{2}$$

所以有

$$P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{P(4)+P(6)}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$ ◀

如果事件$\{E_i\}_{i=1}^{n}$互斥，且它们的合集构成整个样本空间，则它们完成了对样本空间 Ω 的划分。那么，对于事件 A，如果已知条件概率$\{P(A \mid E_i)\}_{i=1}^{n}$，就可以利用全概定理求解 $P(A)$，即

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A \mid E_i) \tag{5.1.2}$$

而贝叶斯(Bayes)公式给出了求解条件概率 $P(E_i \mid A)$的方法，即

$$P(E_i \mid A)=\frac{P(E_i) P(A \mid E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A \mid E_j)} \tag{5.1.3}$$

例 5.1.2 在某城市，50%的人开车去上班，30%的人乘坐地铁，20%的人乘坐公共汽车。开车去上班的人迟到的概率为 10%，乘坐地铁的人迟到的概率为 3%，乘坐公共汽车的人迟到的概率为 5%。

1. 此城市中的某个人上班迟到的概率是多少？
2. 若某个人上班迟到了，他开车去上班的概率是多少？

192

解： 用 D、S 和 B 分别表示事件“开车”“乘坐地铁”和“乘坐公共汽车”，则 $P(D)=0.5$，$P(S)=0.3$，$P(B)=0.2$。用 L 表示事件“上班迟到”，则由题设条件可得

$$P(L \mid D)=0.1$$
$$P(L \mid S)=0.03$$
$$P(L \mid B)=0.05$$

1. 利用全概定理，有

$$
\begin{aligned}
P(L) &= P(D)P(L|D)+P(S)P(L|S)+P(B)P(L|B) \\
&= 0.5\times 0.1+0.3\times 0.03+0.2\times 0.05 \\
&= 0.069
\end{aligned}
$$

2. 利用贝叶斯公式，有

$$
\begin{aligned}
P(D|L) &= \frac{P(D)P(L|D)}{P(D)P(L|D)+P(S)P(L|S)+P(B)P(L|B)} \\
&= \frac{0.05}{0.069} \\
&\approx 0.725
\end{aligned}
$$

◀

例 5.1.3 在某二进制通信系统中，0 和 1 在信道中传输的概率分别为 0.3 和 0.7，(由于信道噪声)当通过信道传输一个比特数据时，接收可能正确，也可能错误。假设发送端发 0 而接收端接收错误(即收到 1)的概率为 0.01，发送端发 1 而接收端接收错误(即收到 0)的概率为 0.1。

1. 接收端收到 1 的概率是多少？
2. 若已知接收端收到的 1，那么发送端发的是 1 的概率是多少？

解：设 X 代表输入，Y 代表输出，由题设可得

$$
\begin{aligned}
&P(X=0)=0.3 && P(X=1)=0.7 \\
&P(Y=0|X=0)=0.99 && P(Y=1|X=0)=0.01 \\
&P(Y=0|X=1)=0.1 && P(Y=1|X=1)=0.9
\end{aligned}
$$

1. 利用全概定理，有

193

$$
\begin{aligned}
P(Y=1) &= P(Y=1,X=0)+P(Y=1,X=1) \\
&= P(X=0)P(Y=1|X=0)+P(X=1)P(Y=1|X=1) \\
&= 0.3\times 0.01+0.7\times 0.9 \\
&= 0.003+0.63 \\
&= 0.633
\end{aligned}
$$

2. 利用贝叶斯公式，有

$$
\begin{aligned}
P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1)P(Y=1|X=1)}{P(X=0)P(Y=1|X=0)+P(X=1)P(Y=1|X=1)} \\
&= \frac{0.7\times 0.9}{0.3\times 0.01+0.7\times 0.9} \\
&= \frac{0.63}{0.633} \\
&\approx 0.995
\end{aligned}
$$

◀

5.1.3 随机变量

随机变量是样本空间 Ω 到实数集的映射。换言之，随机变量是对随机实验的结果赋予实数值。随机变量的示意图如图 5-1 所示。

例 5.1.4 在掷骰子试验中，如果结果是偶数点，则玩家赢得此点数；如果结果是奇数点，则玩家输掉此点数。那么，表示玩家收益的随机变量为

$$
X(\omega)=\begin{cases} \omega & \omega=2,4,6 \\ -\omega & \omega=1,3,5 \end{cases}
$$

◀

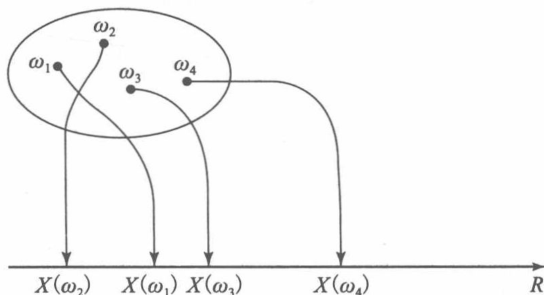


图 5-1 随机变量是 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的一种映射

随机变量用诸如 X、Y 等大写字母表示，随机变量 X 的各取值用 $X(\omega)$表示。如果随机变量的取值范围是有限的或可数无穷的，则为离散随机变量，其取值范围通常用 $\{x_i\}$表示。若随机变量的取值范围是连续的，则为连续随机变量。

随机变量 X 的累积分布函数(CDF)定义为

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$$

上式可简写为

$$F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

194

CDF 具有下列性质：

1. $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$。
2. $F_X(x)$是非降的。
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ 且 $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$。
4. $F_X(x)$是右连续的，即 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_X(x+\varepsilon)=F_X(x)$。
5. $P(a<X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a)$。
6. $P(X=a)=F_X(a)-F_X(a^-)$。

对于离散随机变量，$F_X(x)$是梯形函数。如果一个随机变量的 $F_X(x)$是连续函数，则该随机变量是连续随机变量。若一个随机变量既非离散，也非连续，则称为混合随机变量。离散、连续和混合随机变量的 CDF 示例分别如图 5-2、图 5-3 和图 5-4 所示。

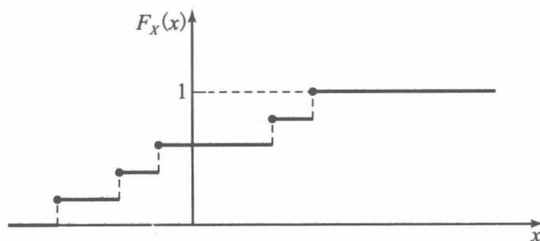


图 5-2　离散随机变量的 CDF

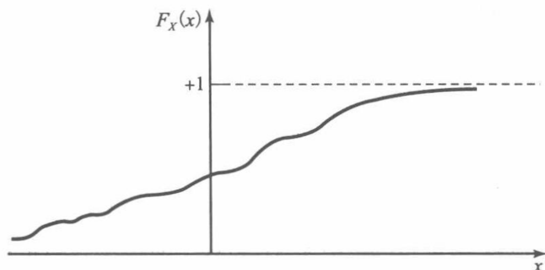


图 5-3　连续随机变量的 CDF

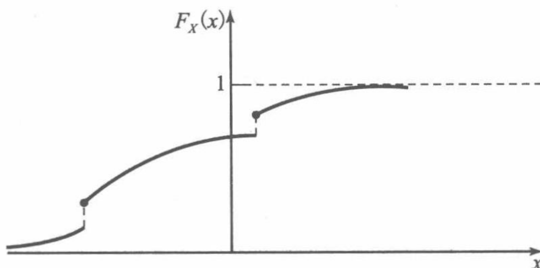


图 5-4　混合随机变量的 CDF

连续随机变量 X 的概率密度函数(PDF)定义为其累积分布函数的导数，记作$f_X(x)$，即

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x) \tag{5.1.4}$$

195

PDF 的基本性质如下：

1. $f_X(x)\geqslant 0$。
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$。
3. $\int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = P(a < X \leqslant b)$。
4. 一般情况下，$P(X\in A)=\int_A f_X(x)\mathrm{d}x$。
5. $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)\mathrm{d}u$。

对于离散随机变量，一般定义概率质量函数(PMF)为$\{p_i\}$，其中 $p_i=P(X=x_i)$。显然，对于所有 i，有 $p_i\geqslant 0$ 且 $\sum_i p_i = 1$。

重要的随机变量。通信中最常用的随机变量有以下几种：

伯努利(Bernoulli)随机变量。这是一种离散随机变量，只有 0 和 1 两种取值，分别对应概率 p 和 $1-p$。伯努利随机变量是描述二进制数据发生器的恰当模型。当二进制数据

通过通信信道传输时，某些比特会出错。此错误可以描述成输入比特“模 2 加”1，这样操作使得 0 变成 1，而 1 变成 0。因此，信道传输错误可以用伯努利随机变量描述。

二项随机变量。这是一种离散随机变量，表示 n 次独立伯努利试验中，1 出现的次数。其 PMF 为

$$P(X=k)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.1.5}$$

该随机变量可以用来描述在一个误比特率为 p 的信道上传输 n 比特序列时出错的总比特数。

196

例 5.1.5 设有 10 000 比特数据在误比特率为 10^{-3} 的信道上传输，求总错误比特数小于 3 的概率。

解：在本例中，$n=10000$，$p=0.001$，求 $P(X<3)$，有

$$\begin{aligned}P(X<3)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=\binom{10000}{0}0.001^0(1-0.001)^{10000}+\binom{10000}{1}0.001^1(1-0.001)^{10000-1}\\&\quad+\binom{10000}{2}0.001^2(1-0.001)^{10000-2}\\&\approx 0.0028\end{aligned}$$

◀

均匀随机变量。这是一种连续随机变量，在区间(a,b)的等长间隔内等概率取值。其概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

有些连续随机变量，除了取值范围已知，对于各取值的可能性大小一无所知。这样的随机变量就适用于均匀随机变量模型。例如，如果正弦波的相位是随机的，通常将其描述为 $0\sim 2\pi$ 之间取值的均匀随机变量。

高斯(Gaussian)或正态随机变量。这是一种连续随机变量，其概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.1.6}$$

在高斯随机变量的定义中，有两个参数。参数 m 称为均值，取任意有限值。参数 σ 称为标准差，取任意有限正值。标准差的平方 σ^2，称为方差。均值为 m，方差为 σ^2 的高斯随机变量记作$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$。随机变量$\mathcal{N}(0,1)$通常称为标准正态。

高斯随机变量是通信中最重要也是最常遇到的随机变量，这是因为作为通信系统主要噪声源的热噪声服从高斯分布。本章随后部分将详细介绍高斯噪声的性质。

图 5-5～图 5-8 给出了上述各种随机变量的 PDF 和 PMF。

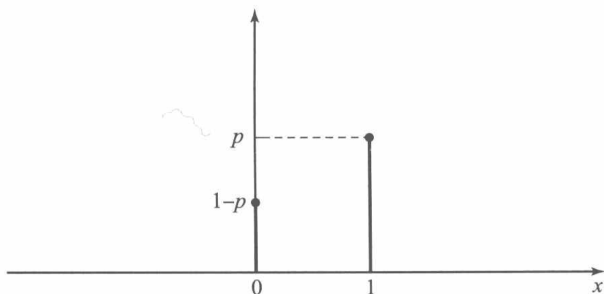


图 5-5 伯努利随机变量的 PMF

若 X 为标准正态随机变量，定义函数 $Q(x)=P(X>x)$。Q 函数的表达式为

197

$$Q(x)=P(X>x)=\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \tag{5.1.7}$$

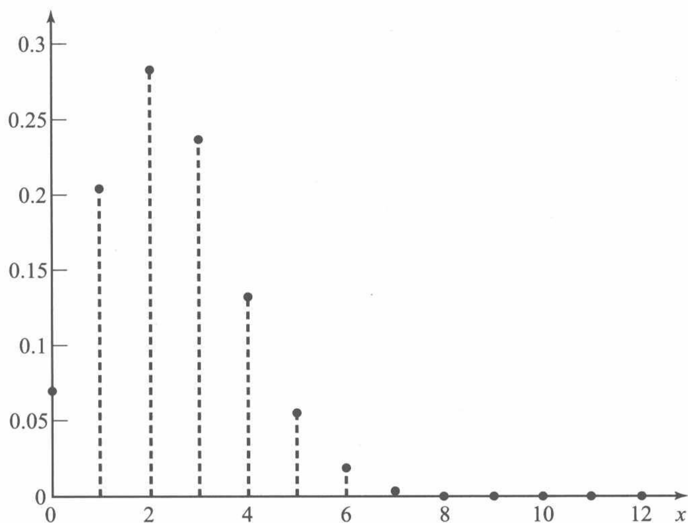


图 5-6　二项随机变量的 PMF

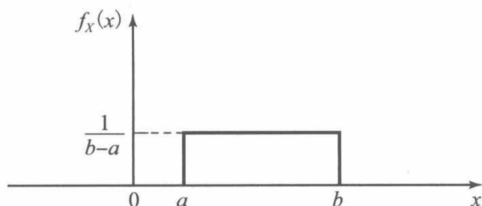


图 5-7　均匀随机变量的 PDF

此函数表示的是一个正态随机变量的拖尾曲线下的面积，如图 5-9 所示。显然，Q 函数是减函数。此函数可以通过查表求函数值，并经常用于分析通信系统的性能。易知，$Q(x)$满足下列关系：

$$Q(-x)=1-Q(x)$$

$$Q(0)=\frac{1}{2}$$

$$Q(\infty)=0$$

198～199

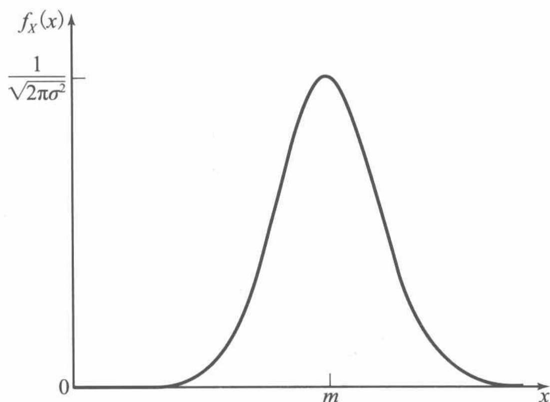


图 5-8　高斯随机变量的 PDF

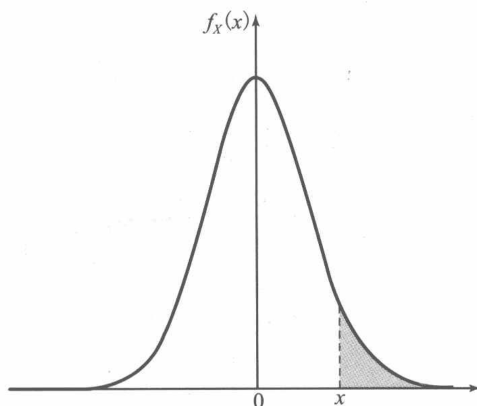


图 5-9　Q 函数表示标准正态随机变量拖尾曲线下的面积

表 5-1 给出了该函数对于不同 x 值下的函数值。

表 5-1 Q 函数表

0	5.000000e-01	2.4	8.197534e−03	4.8	7.933274e−07
0.1	4.601722e-01	2.5	6.209665e-03	4.9	4.791830e-07
0.2	4.207403e-01	2.6	4.661189e-03	5.0	2.866516e-07
0.3	3.820886e-01	2.7	3.466973e-03	5.1	1.698268e-07
0.4	3.445783e-01	2.8	2.555231e-03	5.2	9.964437e-08
0.5	3.085375e-01	2.9	1.865812e-03	5.3	5.790128e-08
0.6	2.742531e-01	3.0	1.349898e-03	5.4	3.332043e-08
0.7	2.419637e-01	3.1	9.676035e-04	5.5	1.898956e-08
0.8	2.118554e-01	3.2	6.871378e-04	5.6	1.071760e-08
0.9	1.840601e-01	3.3	4.834242e-04	5.7	5.990378e-09
1.0	1.586553e-01	3.4	3.369291e-04	5.8	3.315742e-09
1.1	1.356661e-01	3.5	2.326291e-04	5.9	1.817507e-09
1.2	1.150697e-01	3.6	1.591086e-04	6.0	9.865876e-10
1.3	9.680049e-02	3.7	1.077997e-04	6.1	5.303426e-10
1.4	8.075666e-02	3.8	7.234806e-05	6.2	2.823161e-10
1.5	6.680720e-02	3.9	4.809633e-05	6.3	1.488226e-10
1.6	5.479929e-02	4.0	3.167124e-05	6.4	7.768843e-11
1.7	4.456546e-02	4.1	2.065752e-05	6.5	4.016001e-11
1.8	3.593032e-02	4.2	1.334576e-05	6.6	2.055790e-11
1.9	2.871656e-02	4.3	8.539898e-06	6.7	1.042099e-11
2.0	2.275013e-02	4.4	5.412542e-06	6.8	5.230951e-12
2.1	1.786442e-02	4.5	3.397673e-06	6.9	2.600125e-12
2.2	1.390345e-02	4.6	2.112456e-06	7.0	1.279813e-12
2.3	1.072411e-02	4.7	1.300809e-06		

Q 函数的两个重要上界广泛用于求解各类通信系统的错误概率界限。这两个上界为

$$Q(x) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geqslant 0 \tag{5.1.8}$$

和

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geqslant 0 \tag{5.1.9}$$

一个常用的下界为

$$Q(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad x > 1 \tag{5.1.10}$$

$Q(x)$的函数图以及上述边界如图 5-10 所示。

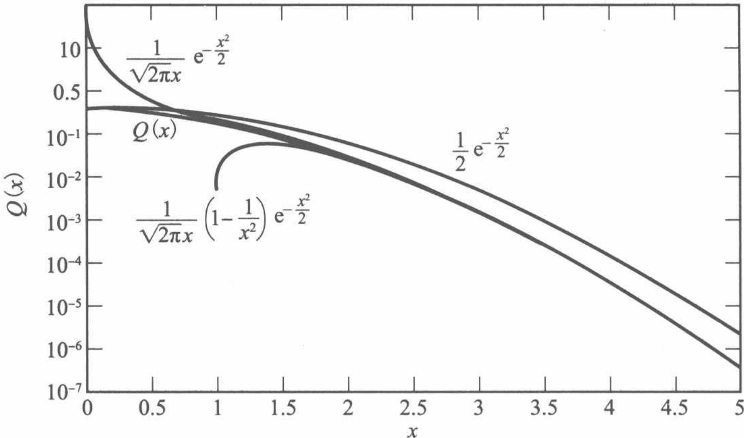


图 5-10 Q 函数的边界

对于一个$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$随机变量，计算$P(X>x)$的积分经过简单的变量变换，可得

$$P(X>x)=Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

200

此即为高斯随机变量的尾部概率。

例 5.1.6 X是均值为1，方差为4的高斯随机变量，求$P(5<X<7)$。

解：已知$m=1$，$\sigma=\sqrt{4}=2$。则有

$$\begin{aligned}P(5<X<7)&=P(X>5)-P(X>7)=Q\left(\frac{5-1}{2}\right)-Q\left(\frac{7-1}{2}\right)\\&=Q(2)-Q(3)\approx 0.0214\end{aligned}$$

◀

5.1.4 随机变量的函数

随机变量的函数$Y=g(X)$本身也是一个随机变量。一般来说，可以根据CDF的定义，求得随机变量$Y=g(X)$的CDF为

$$F_Y(y)=P\{\omega\in\Omega:g[X(\omega)]\leqslant x\}$$

特别地，如果对于所有y，方程$g(x)=y$存在可数的若干解$\{x_i\}$，并且对于所有这些解，$g'(x_i)$存在且为非零值，则随机变量$Y=g(X)$的PDF可由下式求得，即

$$f_Y(y)=\sum_i\frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\tag{5.1.11}$$

例 5.1.7 设X是$m=0$，$\sigma=1$的高斯随机变量，求随机变量$Y=aX+b$的概率密度函数。

201

解：本例中，$g(x)=ax+b$，因此$g'(x)=a$。方程$ax+b=y$有唯一解$x_1=\frac{y-b}{a}$。所以有

$$f_Y(y)=\frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}\tag{5.1.12}$$

此结果表明，Y是高斯随机变量$\mathcal{N}(b,a^2)$。 ◀

采用与上例类似的方法可以证明，如果X为服从$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$的高斯随机变量，则$Y=aX+b$也是高斯随机变量，服从$\mathcal{N}(am+b,a^2\sigma^2)$。

例 5.1.8 设X是服从$\mathcal{N}(3,6)$的随机变量，求$Y=-2X+3$的概率密度函数。

解：易知Y是一个均值$m=-2\times3+3=-3$，方差$\sigma^2=4\times6=24$的高斯随机变量。因此，Y是服从$\mathcal{N}(-3,24)$的高斯随机变量，其概率密度函数为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{48\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y+3)^2}{48}}$$

◀

由上面的例子可以得到一个重要结论：高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量。

统计平均。随机变量X的均值，或者说数学期望定义为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\tag{5.1.13}$$

也可记作m_X。数学期望是随机变量经过大量试验所得的平均值的一种度量。注意，$E(X)$只是一个实数。一般情况下，随机变量X的n阶矩定义为

$$m_X^{(n)}\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x^nf_X(x)\mathrm{d}x\tag{5.1.14}$$

$Y=g(X)$的数学期望为

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)\mathrm{d}x\tag{5.1.15}$$

对于离散随机变量，则有

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \tag{5.1.16}$$

和

202

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(X = x_i) \tag{5.1.17}$$

特别地，当 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 时，$E[g(X)]$称为 X 的*方差*，是 X 的概率密度函数的分散程度的一种度量。如果方差比较小，表明随机变量的取值集中在均值附近，在某种意义上讲是“随机程度弱”。如果方差比较大，则随机变量分布比较分散，因此可预测的难度增加。方差记作 σ_X^2，其平方根 σ_X 称为*标准差*。方差还可以写成

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

对于任意常数 c，下列等式成立：

1. $E(cX)=cE(X)$。
2. $E(c)=c$。
3. $E(X+c)=E(X)+c$。

易证，方差具有下列性质：

1. $\mathrm{VAR}(cX)=c^2\mathrm{VAR}(X)$。
2. $\mathrm{VAR}(c)=0$。
3. $\mathrm{VAR}(X+c)=\mathrm{VAR}(X)$。

对于前面介绍的重要随机变量，其均值和方差分别为：

伯努利随机变量： $E(X) = p \qquad \mathrm{VAR}(X) = p(1-p)$

二项随机变量： $E(X) = np \qquad \mathrm{VAR}(X) = np(1-p)$

均匀随机变量： $E(X) = \dfrac{a+b}{2} \qquad \mathrm{VAR}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

高斯随机变量： $E(X) = m \qquad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2$

5.1.5 二维随机变量

设 X 和 Y 是定义在同一样本空间 Ω 上的两个随机变量。对于这两个随机变量，定义其*联合累积分布函数*(CDF)为

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leqslant x, Y(\omega) \leqslant y\}$$

或简写为

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

其*联合概率密度函数*(PDF)$f_{X,Y}=(x, y)$定义为

203

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) \tag{5.1.18}$$

列出联合及边界 CDF 和 PDF 的基本性质如下：

1. $F_X(x)=F_{X,Y}(x, \infty)$。
2. $F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty, y)$。
3. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$。
4. $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$。
5. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$。
6. $P[(X, Y)\in A]=\iint_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

7. $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

在随机变量 X 取值为 x 的条件下，随机变量 Y 的条件概率密度函数记作 $f_{Y|X}(y|x)$，定义为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} & f_X(x)\neq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{5.1.19}$$

若知道随机变量 X 的取值与否对条件概率密度函数无影响，则称随机变量 X 和 Y 统计独立。对于统计独立的随机变量 X 和 Y，有

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\tag{5.1.20}$$

例 5.1.9 设 X 和 Y 是分别服从 $\mathcal{N}(3,\ 4)$ 和 $\mathcal{N}(-2,\ 6)$ 的高斯随机变量，求 $f_{X,Y}(x,\ y)$。

解：根据已知，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-3)^2}{8}}\times\frac{1}{\sqrt{12\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y+2)^2}{12}}=\frac{1}{4\pi\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-3)^2}{8}-\frac{(y+2)^2}{12}}$$ ◀

设 $g(X,\ Y)$ 为随机变量 X 和 Y 的任意函数，其数学期望可表示为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{5.1.21}$$

$E(XY)$ 称为随机变量 X 和 Y 的互相关。若 X 和 Y 是相互独立的，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$。X 和 Y 的协方差定义为

204

$$\mathrm{COV}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

如果 $\mathrm{COV}(X,\ Y)=0$，即 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则称 X 和 Y 是不相关的。协方差的归一化版本称为相关系数，记作 $\rho_{X,Y}$，定义为

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{COV}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

利用柯西-施瓦兹不等式(参见习题 2.37)，可以证明 $|\rho_{X,Y}|\leqslant 1$。$\rho=\pm 1$ 表明 X 和 Y 之间满足一阶线性关系，即形如 $Y=aX+b$ 的关系。$\rho=1$ 对应正数 a，$\rho=-1$ 对应负数 a。

显然，如果 X 和 Y 互相独立，则 $\mathrm{COV}(X,\ Y)=0$，且 X 和 Y 不相关。换言之，独立意味着不相关。但一般来说，不相关并不一定独立。也就是说，即便协方差(或 ρ)为零，随机变量之间仍然可能不是统计独立的。

二维随机变量的数学期望和协方差的一些性质如下：

1. $E\left(\sum_i c_iX_i\right)=\sum_i c_iE(X_i)$。
2. $\mathrm{VAR}\left(\sum_i c_iX_i\right)=\sum_i c_i^2\mathrm{VAR}(X_i)+\sum_i\sum_{j\neq i}c_ic_j\mathrm{COV}(X_i,X_j)$。
3. 如果当 $i\neq j$ 时，X_i 和 X_j 不相关，则 $\mathrm{VAR}\left(\sum_i c_iX_i\right)=\sum_i c_i^2\mathrm{VAR}(X_i)$。

例 5.1.10 设 X 和 Y 是相互独立，且分别服从 $\mathcal{N}(3,\ 4)$ 和 $\mathcal{N}(-1,\ 2)$ 的高斯随机变量，求两随机变量 $Z=X-Y$ 和 $W=2X+3Y$ 的协方差。

解：因为

$$\begin{aligned}E(Z)&=E(X)-E(Y)=3+1=4\\E(W)&=2E(X)+3E(Y)=6-3=3\\E(X^2)&=\mathrm{VAR}(X)+E^2(X)=4+9=13\\E(Y^2)&=\mathrm{VAR}(Y)+E^2(Y)=2+1=3\end{aligned}$$

且

$$E(XY)=E(X)E(Y)=-3$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}(W,Z) &= E(WZ)-E(W)E(Z)\\ &= E(2X^2-3Y^2+XY)-E(Z)E(W)\\ &= 2\times 13-3\times 3-3-4\times 3\\ &= 2\end{aligned}$$

205

◀

二维随机变量的二元函数。如果定义关于随机变量 X 和 Y 的两个函数为

$$\begin{cases}Z=g(X,Y)\\ W=h(X,Y)\end{cases}$$

那么，Z 和 W 的联合 CDF 和 PDF 可以直接根据 CDF 的定义写出。然而，对于所有的 z 和 w，方程组

$$\begin{cases}g(x,y)=z\\ h(x,y)=w\end{cases}$$

经常会有多个解$\{(x_i,\ y_i)\}$，如果雅可比(Jacobian)矩阵

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}$$

的行列式在这些点上都是非零的，则有

$$f_{Z,W}(z,w)=\sum_i \frac{f(x_i,y_i)}{|\det\boldsymbol{J}(x_i,y_i)|} \tag{5.1.22}$$

其中 $\det\boldsymbol{J}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行列式。

例 5.1.11 两随机变量 X 和 Y 是独立同分布的高斯随机变量，均值为零，方差为 σ^2。如果上述两随机变量表示平面内一点的坐标，求此点在极坐标系中的幅度和相位的 PDF。

解：首先要求 X 和 Y 的联合 PDF。由于 X 和 Y 是相互独立的，因此它们的联合 PDF 是各自边界 PDF 的乘积，即

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{5.1.23}$$

极坐标系中的点$(X,\ Y)$的幅度为

$$V=\sqrt{X^2+Y^2}$$

相位为

$$\Theta=\arctan\frac{Y}{X}$$

下面开始推导 V 和 Θ 的联合 PDF。此时有

$$g(X,Y)=\sqrt{X^2+Y^2}$$

和

$$h(X,Y)=\arctan\frac{Y}{X}$$

则雅可比矩阵为

206

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix} \tag{5.1.24}$$

可得雅可比矩阵的行列式为

$$|\det\boldsymbol{J}(x,y)|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{v} \tag{5.1.25}$$

方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=v\\ \arctan\dfrac{y}{x}=\theta\end{cases}\tag{5.1.26}$$

有唯一解

$$\begin{cases}x=v\cos\theta\\ y=v\sin\theta\end{cases}\tag{5.1.27}$$

将上述解代入式(5.1.22)，得幅度和相位的联合 PDF

$$f_{V,\Theta}(v,\theta)=vf_{X,Y}(v\cos\theta,v\sin\theta)=\frac{v}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\tag{5.1.28}$$

为了求得幅度和相位的边界 PDF，需要对联合 PDF 进行积分。则相位的边界 PDF 为

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^\infty f_{V,\Theta}(v,\theta)\mathrm{d}v=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{v}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v=\frac{1}{2\pi}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\right]_0^\infty=\frac{1}{2\pi}\tag{5.1.29}$$

因此，相位服从$[0,2\pi]$上的均匀分布。而幅度的边界 PDF 为

$$f_V(v)=\int_0^{2\pi}f_{V,\Theta}(v,\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{v}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\tag{5.1.30}$$

上式仅在 $v\geqslant0$ 时成立。对于 $v<0$，$f_V(v)=0$。因此

$$f_V(v)=\begin{cases}\dfrac{v}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} & v\geqslant0\\ 0 & v<0\end{cases}\tag{5.1.31}$$

207

此分布即为瑞利分布，已在衰落信道的研究中得到了广泛应用。通过本例还可看出

$$f_{V,\Theta}(v,\theta)=f_V(v)f_\Theta(\theta)\tag{5.1.32}$$

因此，幅度和相位是相互独立的随机变量。 ◀

联合高斯随机变量。联合高斯(或正态)随机变量 X 和 Y 的联合 PDF 形如

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

其中 m_1、m_2、σ_1^2 和 σ_2^2 分别是 X 和 Y 的均值和方差，而 ρ 是 X 和 Y 的相关系数。当两随机变量 X 和 Y 服从联合高斯分布时，可证 X 和 Y 都是高斯随机变量，并且它们的条件概率密度函数 $f(x|y)$和 $f(y|x)$也是高斯的。这一特性指出了联合高斯随机变量与两个独立高斯随机变量的主要区别。

二维联合高斯随机变量可以扩展至多维联合高斯随机变量。例如，如果随机变量 X_1、X_2 和 X_3 中的任意两个都是联合高斯随机变量，且任意两个以第三个为条件的条件概率密度函数也是高斯的，则称 X_1、X_2 和 X_3 为联合高斯随机变量。

下面列出联合高斯随机变量的主要性质：

1. 如果 n 个随机变量是联合高斯的，那么这 n 个随机变量的任意子集也是联合高斯的。特别地，所有的一维随机变量也是高斯的。

2. 联合高斯随机变量可以由其所有随机变量的均值 m_1，m_2，…，m_n 以及协方差矩阵 $\mathrm{COV}(X_i,X_j)$完全表征，其中 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$。这些所谓的二阶属性完全可以描述联合高斯随机变量。

3. 高斯随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的任意线性组合是联合高斯随机变量。特别地，X_i' 的任意线性组合是高斯随机变量。

4. 构成二维联合高斯随机变量的两个一维高斯随机变量如果是不相关的，则它们是相互独立的。也就是说，对于构成联合高斯随机变量的各一维随机变量来说，不相关和独立是等价的。而如前所述，这对于一般的随机变量来说是不成立的。

5.1.6 随机变量的和

208

一组具有基本相同的分布特征的随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的平均值$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 较之每个 X_i 有更弱的随机性，大数定律和中心极限定理正是对此直观事实的阐述。

大数定律(LLN)表明，如果随机变量 X_1，X_2，…，X_n 不相关，且具有相同的均值 m_X 和方差 σ_X^2(均值和方差均为有限值)，那么对于任意 $\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}P(|Y-m_X|>\varepsilon)=0$，其中 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。这意味着，这些平均值以某种概率收敛于数学期望。

中心极限定理不仅表明平均值收敛于均值，而且还指出了平均值的分布规律。该定理指出，如果随机变量 X_1，X_2，…，X_n 独立同分布(i. i. d.)，都是均值为 m，方差为 σ^2 的随机变量，那么随机变量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 收敛于$\mathcal{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$。一般说来，中心极限定理表明一些 i. i. d. 的随机变量的和收敛于高斯随机变量。以后的章节会解释，为什么热噪声服从高斯分布。

对于概率论基础的复习到此为止，本章最后列举了一些可供深入学习的资料。

5.2 随机过程的基本概念

随机过程是为了处理信号而对随机变量概念进行的自然延伸。分析通信系统主要是分析时变信号。到目前为止，本书一直假设所有信号都是确知的。但在许多情况下，时变信号的确知假设是不成立的，用随机过程而不是确知函数来描述时变信号更加合适。电路中的热噪声就是这样一个例子。这种噪声源自电子因热扰动产生的随机运动。因此，由电子随机运动产生的电流和电压只能用统计的方法进行描述。另一个例子是无线电波经不同层面的电离层反射，这使得长距离的短波无线电广播成为可能。由于这些反射的随机性，接收信号也成了随机信号。上述两个例子说明随机信号可以用来描述信号传输中的某些现象。

随机过程还可以用来刻画信源的特征。一个信源(例如语音源)产生时变信号，其内容无法事先知道，否则也就没有传输的必要了。因此，随机过程是描述信源的一种很自然的方式。

随机过程(或随机信号)可以视为所有可能出现的信号波形的集合。每种集合中出现的可能的波形都遵循某种概率准则。这一点类似于随机变量的定义。对于随机变量，每种集合中的可能值的取得都遵循某种概率准则。不同之处在于，随机过程得到的是信号(函数)，而随机变量得到的数值。

例 5.2.1 设有一个信号发生器，可以产生 6 种可能的正弦信号。所有正弦信号的幅度都是 1，相位都是零，但频率依次为 100，200，…，600Hz。现在用掷骰子的方法来决定信号发生器的输出，掷骰子的结果用随机变量 F 表示，信号发生器的输出为频率是掷骰子结果 100 倍($100F$)的正弦信号。这意味着所有六种可能的信号的出现概率是相同的。此随机过程可以定义为 $X(t)=\cos(2\pi\times100Ft)$。 ◀

209

例 5.2.2 假设在 0 到 2π 之间均匀地选择相位 Θ，用于生成一个具有固定幅度和频率，但相位为随机变量 Θ 的正弦信号。该正弦信号可用随机过程 $X(t)=A\cos(2\pi f_0t+\Theta)$表示，其中 A 和 f_0 表示固定的幅度和频率，Θ 表示随机相位。该随机过程的一些样本函数如图 5-11 所示。 ◀

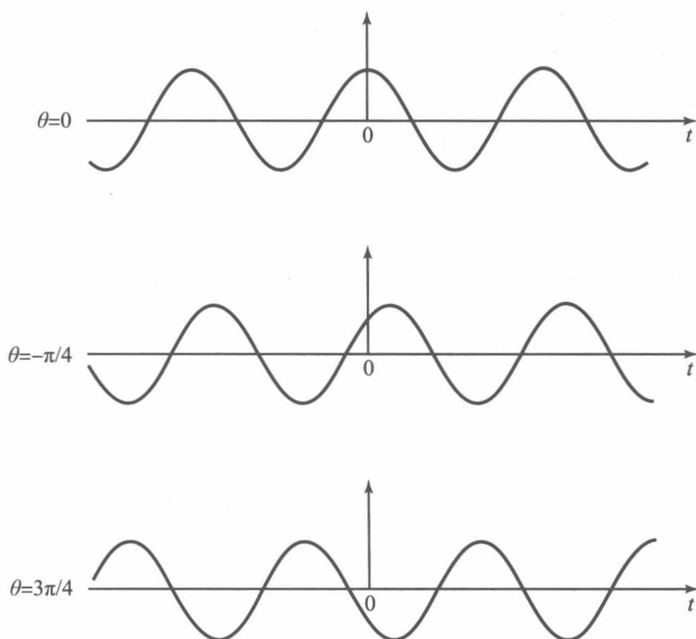


图 5-11　例 5.2.2 中随机过程的某些样本函数

例 5.2.3　定义随机过程 $X(t)=X$，其中 X 是在$[-1,1]$上均匀分布的随机变量。这样可给出此随机过程的解析描述。该随机过程的每一个样本函数都是直流信号，其中几个样本函数如图 5-12 所示。◀

通过上述例子可以看出，对应于样本空间 Ω 的每个结果 ω_i，都存在一个信号 $x(t;\ \omega_i)$。这种描述与随机变量的描述非常相似，后者将数值赋给每个结果 ω_i。图 5-13 描述了一个一般意义上的随机过程。可以说，与每个 ω_i 相对应的是一个确知的时间函数 $x(t;\ \omega_i)$，称为样本函数或者随机过程的实现。在每个时刻 t_0，每个 $\omega_i\in\Omega$ 都有数值 $x(t_0;\ \omega_i)$。在给定时刻 t_0，不同 ω_i 的所有数值 $x(t_0;\ \omega_i)$构成了一个随机变量，记作$X(t_0)$。

210

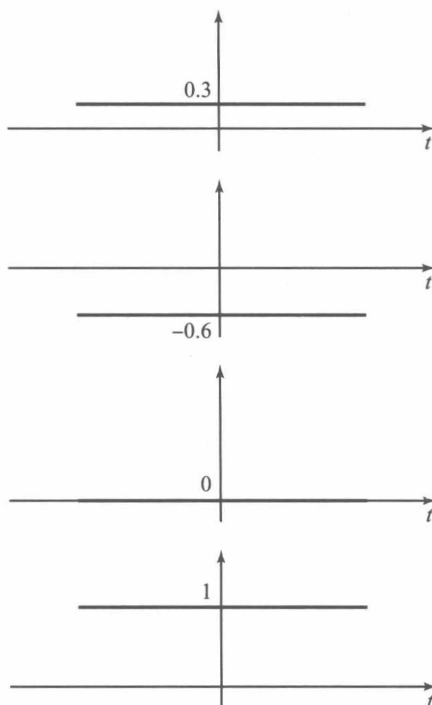


图 5-12　例 5.2.3 中随机过程的一些样本函数

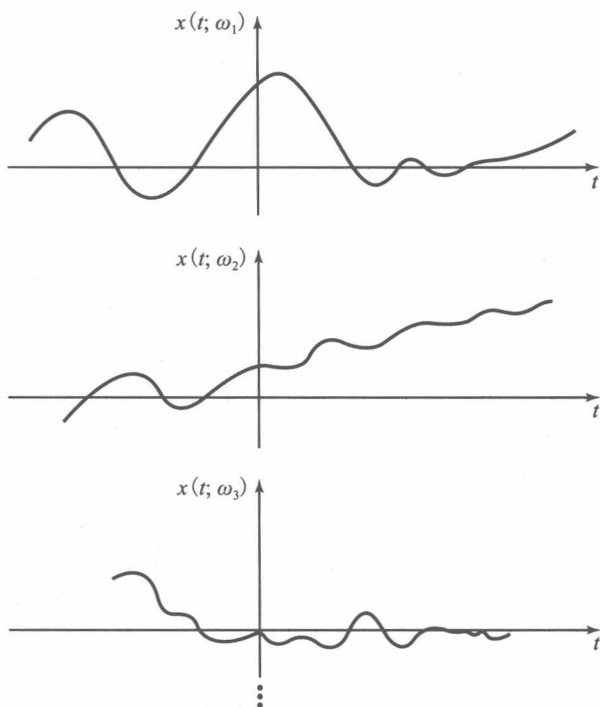


图 5-13　某随机过程的一些样本函数

随机变量仅仅是随机实验输出结果的实数表示。但这仍是一个非常重要的观点，因为它把随机过程的概念与更为熟悉的随机变量的概念联系起来了。换言之，随机过程在任意时刻的值构成了一个随机变量。

例 5.2.4 求例 5.2.1 中随机变量 $X(0.001)$ 的值。

解：可能的取值为 $\cos(0.2\pi)$，$\cos(0.4\pi)$，…，$\cos(1.2\pi)$，对应的概率均为 1/6。◀

211

例 5.2.5 设 Ω 为掷骰子随机试验的样本空间。显然，$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。对于所有 ω_i，令 $x(t;\ \omega_i)=e^{-t}u_{-1}(t)$，表示一个随机过程，则 $X(1)$ 是一个随机变量，以等概率 1/6 取值 e^{-1}，e^{-2}，…，e^{-6}。此随机过程的一些样本函数如图 5-14 所示。◀

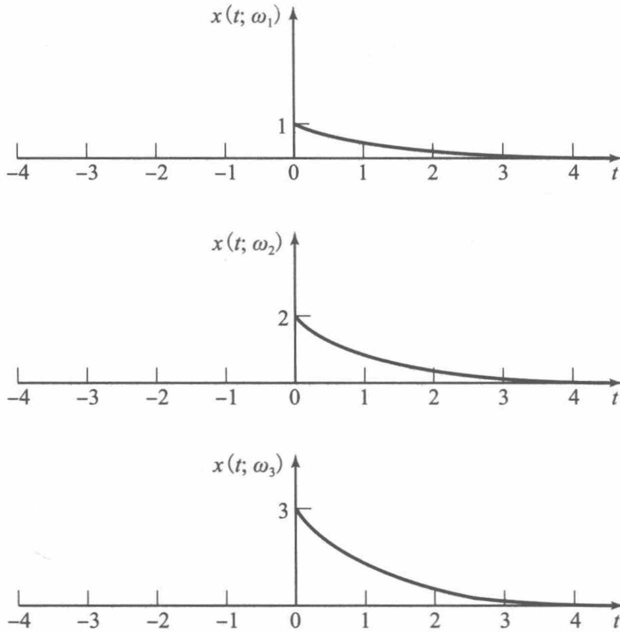


图 5-14　例 5.2.5 中随机过程的一些样本函数

例 5.2.6 与连续时间随机过程相似，也可以有离散时间随机过程。设某随机实验是对分布服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的高斯随机变量独立抽样，令 ω_i 表示此随机试验的结果。定义某离散时间随机过程 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $X_0=0$，以及对于所有 $n\geqslant 1$，有 $X_n=X_{n-1}+\omega_n$。此即为一个离散时间随机过程，即一个随机变量序列。◀

5.2.1 统计平均

在任意给定时刻，随机过程对应一个随机变量。对于任意给定时间集合，随机过程对应一个随机向量。因此，可以利用相应的随机变量的统计平均来定义随机过程的各种统计平均。例如，已知随机过程在给定时刻 t_0，即 $X(t_0)$，是一个普通的随机变量，有概率密度函数，可以求其(在此时刻的)均值和方差。显然，均值和方差都是一般的确定数值，但都取决于时刻 t_0。换言之，在时刻 t_1，随机变量为 $X(t_1)$，其概率密度函数，均值和方差通常会与 $X(t_0)$ 的有所不同。

212

定义 5.2.1 随机过程 $X(t)$ 的均值和期望是确知的时间函数，记作 $m_X(t)$，其在每个时刻 t_0 的函数值等于随机变量 $X(t_0)$ 的均值。即对于所有 t，有 $m_X(t)=E[X(t)]$。■

在任意时刻 t_0，随机变量 $X(t_0)$ 由概率密度函数 $f_{X(t_0)}(x)$ 完全定义，所以有

$$E[X(t_0)]=m_X(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X(t_0)}(x)\mathrm{d}x \tag{5.2.1}$$

图 5-15 给出了上述定义的图示。

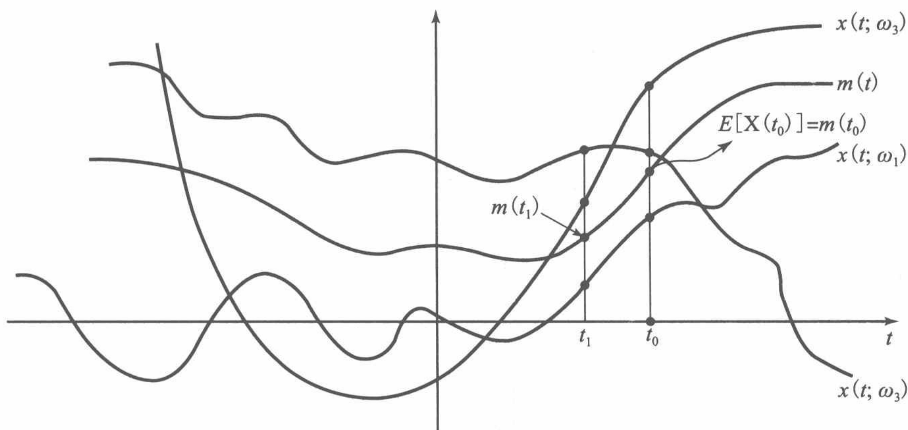


图 5-15　随机过程的均值

例 5.2.7 例 5.2.2 中随机过程的概率密度函数为

$$f_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\leqslant\theta<2\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此，其均值为

$$E[X(t)]=\int_0^{2\pi}A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

不难看出，在本例中，$m_X(t)$与时间 t 无关。 ◀ 213

随机过程的另一个重要的统计平均是自相关函数，它可以用来计算一大类随机过程的功率谱密度和功率，因此非常重要。

定义 5.2.2 随机过程 $X(t)$的自相关函数记作 $R_X(t_1, t_2)$，定义为 $R_X(t_1, t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$。 ■

显然，$R_X(t_1, t_2)$是 t_1 和 t_2 的确定函数，即

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{5.2.2}$$

例 5.2.8 例 5.2.2 中随机过程的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[A\cos(2\pi f_0t_1+\Theta)A\cos(2\pi f_0t_2+\Theta)]\\&=A^2E\left\{\frac{1}{2}\cos2\pi f_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta]\right\}\\&=\frac{A^2}{2}\cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]\end{aligned}$$

其中利用了

$$E\{\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta]\}=\int_0^{2\pi}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta]\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

◀ 214

例 5.2.9 对于例 5.2.3 中的随机过程，有

$$R_X(t_1,t_2)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

◀

5.2.2 广义平稳随机过程

通过前面的学习可知，在任意给定时刻，随机过程仅仅是一个随机变量，其统计特征由随机过程的观察时刻决定。但有时候，随机变量的某些统计特征与观察时刻无关。根据与观察时刻无关的统计特征的不同，平稳这一概念可以有不同的定义。一种最常用的平稳是广义平稳(WSS)随机过程。如果一个随机过程的均值和自相关函数与时间原点的选取无

关，则该随机过程是广义平稳随机过程。正式的定义由定义 5.2.3 给出。

定义 5.2.3 如果一个随机过程满足下列条件，则该过程是广义平稳随机过程：

1. $m_X(t)=E[X(t)]$与 t 无关。

2. $R_X(t_1, t_2)$仅仅是时间差 $\tau=t_1-t_2$ 的函数，而不直接取决于 t_1 和 t_2。 ■

简便起见，在本书后面部分，术语“平稳”指的就是广义平稳。平稳随机过程的均值和自相关函数分别用 m_X 和 $R_X(\tau)$表示。

例 5.2.10 对于例 5.2.2 中的随机过程，已知 $m_X=0$，$R_X(t_1, t_2)=\frac{A^2}{2}\cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]$。因此，该过程是广义平稳的。 ◀

例 5.2.11 设随机过程 $Y(t)$与例 5.2.2 中的随机过程 $X(t)$相似，不同之处在于 Θ 是$[0, \pi]$上均匀分布的随机变量，因此有

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[A\cos(2\pi f_0 t+\Theta)] = A\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos(2\pi f_0 t+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{A}{\pi}[\sin(2\pi f_0 t+\theta)]_0^{\pi} = \frac{A}{\pi}[-2\sin(2\pi f_0 t)] \\ &= -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

由于 $m_Y(t)$与 t 有关，所以随机过程 $Y(t)$不是平稳的。 ◀

由自相关函数的定义可得 $R_X(t_1, t_2)=R_X(t_2, t_1)$。这表明，如果随机过程是平稳的，则有 $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$，即平稳随机过程的自相关函数是偶函数。

215

还有一类与平稳随机过程密切相关的随机过程称为循环平稳随机过程，其统计特征是时间的周期函数。下面将给出循环平稳随机过程的正式定义，但它对于分析通信系统的重要性要到第 10 章才能显现出来。

定义 5.2.4 若随机过程 $X(t)$的均值 $m_X(t)$和自相关 $R_X(t+\tau, t)$都是周期为 T_0 的时间函数，即如果对于所有 t 和 τ，满足

$$m_X(t+T_0) = m_X(t) \tag{5.2.3}$$

和

$$R_X(t+\tau+T_0, t+T_0) = R_X(t+\tau, t) \tag{5.2.4}$$

则称 $X(t)$为循环平稳随机过程。 ■

例 5.2.12 设 $X(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$，其中 A 是在$[0, 1]$上均匀分布的随机变量。则有

$$m_X(t) = 0.5\cos(2\pi f_0 t)$$

和

$$R_X(t+\tau, t) = \frac{1}{6}\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{6}\cos[2\pi f_0(2t+\tau)]$$

可见，$m_X(t)$和 $R_X(t+\tau, t)$都是周期 $T_0=1/f_0$ 的周期函数。因此，该随机过程是循环平稳随机过程。 ◀

例 5.2.13 设 $Y(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)$，其中 $X(t)$是一个均值为 m，自相关为 $R_X(\tau)$的平稳随机过程，则有

$$m_Y(t) = E[X(t)\cos(2\pi f_0 t)] = m_X\cos(2\pi f_0 t) \tag{5.2.5}$$

和

$$\begin{aligned} R_Y(t+\tau, t) &= E\{X(t+\tau)\cos[2\pi f_0(t+\tau)]X(t)\cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= R_X(\tau)\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)\right] \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

可见，$m_Y(t)$和 $R_Y(t+\tau, t)$都是周期 $T_0=1/f_0$ 的周期函数。因此，该随机过程是循环平稳随机过程。 ◀

对于循环平稳随机过程 $X(t)$，定义其平均自相关函数为 $R_X(t+\tau, t)$在一个周期内的

平均，记作 $\overline{R}_X(\tau)$，即

$$\overline{R}_X(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}R_X(t+\tau,t)\mathrm{d}t \tag{5.2.7}$$

216

例 5.2.14 求例5.2.13中的随机过程的平均自相关函数。

解： 由式(5.2.7)，得

$$\begin{aligned}\overline{R}_X(\tau)&=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}R_X(\tau)\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{T_0}R_X(\tau)\int_0^{T_0}\cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau)\mathrm{d}t\\&=\frac{R_X(\tau)}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

◀

5.2.3 联合随机过程

当需要处理两个甚至更多随机过程之间的关系的时候，自然要用到联合随机过程。例如，让一个随机过程 $X(t)$ 通过线性时不变系统(LTI)。对于每个输入样本函数 $x(t;\ \omega_i)$，都有一个输出样本函数 $y(t;\ \omega_i)=x(t;\ \omega_i)*h(t)$ 与之对应，其中 $h(t)$ 表示系统的冲激响应。可见，对于每个 $\omega_i\in\Omega$，都有两个信号 $x(t;\ \omega_i)$ 和 $y(t;\ \omega_i)$ 与之对应。因此，要处理两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间的关系，两者之间的关联程度是自然而然要考虑的问题。作为解答，不妨给出两随机过程相互独立的定义。

定义 5.2.5 两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，如果对于所有正整数 n 和 m，以及所有 t_1，t_2，…，t_n 和 τ_1，τ_2，…，τ_m，随机向量 $[X(t_1),\ X(t_2),\ \cdots,\ X(t_n)]$ 和 $[Y(\tau_1),\ Y(\tau_2),\ \cdots,\ Y(\tau_m)]$ 相互独立，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互独立。类似地，如果上述两个随机向量不相关，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关。■

由随机变量的性质可知，随机过程相互独立意味着不相关，而不相关并不意味着相互独立。只有重要的高斯随机过程(将在5.3节给出定义)，不相关才与独立等价。接下来，给出两个随机过程的互相关函数定义。

定义 5.2.6 两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{5.2.9}$$

■

根据上述定义，一般有

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1) \tag{5.2.10}$$

217

可以把平稳的概念推广到两个随机过程的联合平稳。

定义 5.2.7 如果两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自都是平稳随机过程，且两者的互相关 $R_{XY}(t_1,\ t_2)$ 仅是 $\tau=t_1-t_2$ 的函数，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合广义平稳的，或简称联合平稳的。■

由上述定义以及式(5.2.10)可知，联合平稳随机过程满足

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau) \tag{5.2.11}$$

例 5.2.15 设两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳的，求随机过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关。

解： 根据定义，有

$$\begin{aligned}R_Z(t+\tau,t)&=E[Z(t+\tau)Z(t)]=E\{[X(t+\tau)+Y(t+\tau)][X(t)+Y(t)]\}\\&=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)\end{aligned}$$

◀

5.2.4 随机过程和线性系统

在联合随机过程的学习中已知，随机过程通过LTI系统，输出还是一个定义在原概率空间上的随机过程。本节将在输入随机过程已知的基础上讨论输出随机过程的性质。假设

平稳随机过程$X(t)$输入冲激响应为$h(t)$的 LTI 系统，输出随机过程记作 $Y(t)$，如图 5-16 所示。

有必要了解下列问题：什么条件下输出的随机过程是平稳的？什么条件下，输入和输出随机过程是联合平稳的？如何求得输出随机过程的均值和自相关函数，以及输入和输出随机过程的互相关？

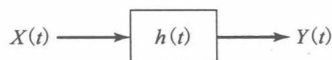


图 5-16 随机过程通过 LTI 系统

接下来要证明，如果均值为 m_X，自相关函数为 $R_X(\tau)$的平稳随机过程 $X(t)$通过一个冲激响应为 $h(t)$的 LTI 系统，输出随机过程为 $Y(t)$，那么 $X(t)$和 $Y(t)$是联合平稳的，并且有

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.12}$$

218

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) \tag{5.2.13}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \tag{5.2.14}$$

利用输入与输出间的卷积关系，即 $Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，有

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &\overset{u=t-\tau}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\mathrm{d}u \equiv m_Y \end{aligned}$$

上式证明 m_Y 与 t 无关。

输入与输出的互相关函数为

$$\begin{aligned} E[X(t_1)Y(t_2)] &= E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X(s)h(t_2-s)\mathrm{d}s\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)X(s)]h(t_2-s)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-s)h(t_2-s)\mathrm{d}s \\ &\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-t_2-u)h(-u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u)h(-u)\mathrm{d}u \\ &= R_X(\tau) * h(-\tau) \equiv R_{XY}(\tau) \end{aligned}$$

上式表明 $R_{XY}(t_1, t_2)$仅是 $\tau=t_1-t_2$ 的函数。

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned} E[Y(t_1)Y(t_2)] &= E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s)h(t_1-s)\mathrm{d}s\right]Y(t_2)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(s-t_2)h(t_1-s)\mathrm{d}s \\ &\overset{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(u)h(t_1-t_2-u)\mathrm{d}u \\ &= R_{XY}(\tau) * h(\tau) \\ &= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \equiv R_Y(\tau) \end{aligned}$$

219

上式的最后一步利用了前面的结论。这表明，R_Y 和 R_{XY}都仅是 $\tau=t_1-t_2$ 的函数。因

此，输出随机过程是平稳的，输入和输出也是联合平稳的。

例 5.2.16 某平稳随机过程通过一个微分器。求输出随机过程的均值和自相关函数，以及输入和输出过程的互相关函数。

解：微分器的冲激响应 $h(t)=\delta'(t)$。由于 $\delta'(t)$ 是奇函数，所以有

$$m_Y = m_X\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t = 0$$

输入和输出的互相关函数为

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * \delta'(-\tau) = -R_X(\tau) * \delta'(\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_X(\tau)$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_X(\tau) * \delta'(\tau) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}R_X(\tau)$$

上式利用了式(2.1.34)的内容。◀

例 5.2.17 将上例中的微分器换成正交滤波器，其冲激响应 $h(t)=\frac{1}{\pi t}$，即 $H(f)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(f)$。这样，滤波器的输出是输入的希尔伯特变换(参见2.6节)。

解：由于 $\frac{1}{\pi t}$ 是奇函数，得

$$m_Y = m_X\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi t}\mathrm{d}t = 0$$

输入和输出的互相关函数为

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{-\pi\tau} = -\hat{R}_X(\tau)$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{\hat{R}}_X(\tau) = R_X(\tau)$$

上式利用了性质 $\hat{\hat{x}}(t)=-x(t)$，并且假设 $R_X(\tau)$ 没有直流分量。◀

5.2.5 平稳随机过程的功率谱密度

随机过程是信号的集合，这些信号的谱特征决定了随机过程的谱特征。如果随机过程的信号是缓慢变化的，则该随机过程主要包含低频成分，其功率主要集中在低频。相反，如果随机过程的信号是快速变化的，则该随机过程的功率主要集中在高频。 220

随机过程的功率谱密度(或简称功率谱)决定了随机过程在不同频率的功率分布情况，是一个非常重要的函数。随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度记作 $S_X(f)$，表征随机过程随频率变化的功率强度，单位是 W/Hz。

有一个非常重要的定理指明了平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数的关系，这就是著名的维纳-辛钦(Wiener-Khinchin)定理。

维纳-辛钦定理。对于平稳随机过程 $X(t)$，其功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换，即

$$\boldsymbol{S}_X(f) = \mathscr{T}[R_X(\tau)] \tag{5.2.15}$$

对于循环平稳随机过程 $X(t)$，其功率谱密度是平均自相关函数的傅里叶变换，即

$$\boldsymbol{S}_X(f) = \mathscr{T}[\overline{R}_X(\tau)] \tag{5.2.16}$$

例 5.2.18 对于例5.2.2中的平稳随机过程，有

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

因此有

$$\boldsymbol{S}_X(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

功率谱密度如图5-17所示。随机过程的所有功率都分布在 f_0 和 $-f_0$ 两个频率上。这与想象的是一致的，

221 因为此随机过程的所有样本函数都是功率分布在上述两个频率上的正弦信号。◀

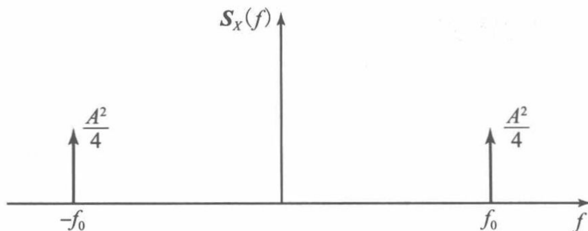


图 5-17 例 5.2.18 中随机过程的功率谱密度

例 5.2.19 例 5.2.3 中的随机过程是平稳的，此时

$$R_X(\tau)=E[X(t+\tau)X(t)]=E[X^2]=\frac{1}{3}$$

因此有

$$\boldsymbol{S}_X(f)=\mathscr{T}\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\delta(f)$$

显然，在本例中，对于此随机过程的每一个实现，功率谱都是不同的。◀

例 5.2.20 求例 5.2.13 中的随机过程的功率谱。

解： 由例 5.2.14 可知，此随机过程是循环平稳的，其平均自相关函数为

$$\overline{R}_X(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

进行傅里叶变换，得

$$\boldsymbol{S}_X(f)=\mathscr{T}\left[\frac{R_X(\tau)}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]=\frac{1}{4}\boldsymbol{S}_X(f-f_0)+\frac{1}{4}\boldsymbol{S}_X(f+f_0) \tag{5.2.17}$$

上式表明，已调 DSB 随机过程的功率谱是原信号的功率谱平移$\pm f_0$，且幅度压缩至原来的 1/4。◀

一个随机过程的功率是此随机过程中所有频率成分的功率之和。对整个频率范围内的功率谱密度进行积分，就得到随机过程的总功率。这表明，随机过程的功率，记作 P_X，可利用下式求得

$$P_X=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f \tag{5.2.18}$$

由于 $\boldsymbol{S}_X(f)$是 $R_X(\tau)$的傅里叶变换，那么 $R_X(\tau)$是 $\boldsymbol{S}_X(f)$的傅里叶反变换。因此有

$$R_X(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}f \tag{5.2.19}$$

将 $\tau=0$ 代入上式，得

$$R_X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f \tag{5.2.20}$$

将上式与式(5.2.18)比较后，可得

$$P_X=R_X(0) \tag{5.2.21}$$

222 由式(5.2.18)和式(5.2.21)可知，为了求平稳随机过程的功率，既可以对功率谱密度进行积分(所有频率分量的功率求和)，也可以将 $\tau=0$ 代入随机过程的自相关函数。

例 5.2.21 求例 5.2.18 中随机过程的功率。

解： 既可利用

$$P_X=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\mathrm{d}f=2\times\frac{A^2}{4}=\frac{A^2}{2}$$

亦可利用

$$P_X=R_X(0)=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{A^2}{2}$$ ◀

LTI 系统中的功率谱。 已知均值为 m_X，自相关函数为 $R_X(\tau)$的平稳随机过程通过冲激响应为 $h(t)$的 LTI 系统，输出依然是平稳随机过程，且均值为

$$m_Y=m_X\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{d}t$$

自相关为

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

此外，$X(t)$和 $Y(t)$还是联合平稳的，互相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)$$

可以直接将上述各式转换到频域。利用$\mathscr{T}[h(-\tau)]=H^*(f)$和$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{d}t=H(0)$，对上述各式两端进行傅里叶变换，得

$$m_Y=m_XH(0) \tag{5.2.22}$$

$$\boldsymbol{S}_Y(f)=\boldsymbol{S}_X(f)|H(f)|^2 \tag{5.2.23}$$

223

式(5.2.22)表明，由于均值表示的是随机过程的直流大小，所以系统响应的均值仅取决于$H(f)$在$f=0$点的值(直流响应)。式(5.2.23)表明，输出功率谱与$H(f)$的相位无关，只有$H(f)$的幅度会影响输出功率谱。这个结论显而易见，因为信号的功率仅取决于幅度，而与相位无关。例如，某平稳随机过程通过微分器，由于$H(f)=\mathrm{j}2\pi f$，则有

$$m_Y=m_XH(0)=0 \tag{5.2.24}$$

$$\boldsymbol{S}_Y(f)=4\pi^2f^2\boldsymbol{S}_X(f) \tag{5.2.25}$$

还可以将互相关函数的傅里叶变换定义为**互功率谱密度**$\boldsymbol{S}_{XY}(f)$，即

$$\boldsymbol{S}_{XY}(f)\overset{\text{def}}{=}\mathscr{T}[R_{XY}(\tau)] \tag{5.2.26}$$

那么

$$\boldsymbol{S}_{XY}(f)=\boldsymbol{S}_X(f)H^*(f) \tag{5.2.27}$$

且由于$R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$，得

$$\boldsymbol{S}_{YX}(f)=\boldsymbol{S}^*_{XY}(f)=\boldsymbol{S}_X(f)H(f) \tag{5.2.28}$$

注意，尽管$\boldsymbol{S}_X(f)$和$\boldsymbol{S}_Y(f)$是实非负函数，但$\boldsymbol{S}_{XY}(f)$和$\boldsymbol{S}_{YX}(f)$一般为复函数。图5-18展示了上述各量之间的关系。

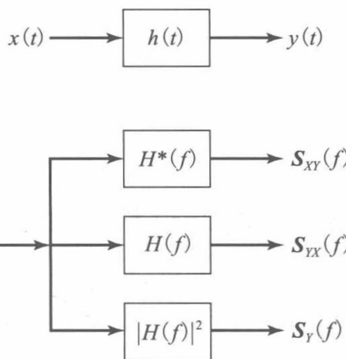


图5-18 功率谱密度和互功率谱密度的输入-输出关系

例5.2.22 若例5.2.2中的随机过程通过一个微分器，由于$H(f)=\mathrm{j}2\pi f$，则有

224

$$\boldsymbol{S}_Y(f)=4\pi^2f^2\left\{\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\right\}=A^2\pi^2f_0^2[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

和

$$\boldsymbol{S}_{XY}(f)=(-\mathrm{j}2\pi f)\boldsymbol{S}_X(f)=\frac{\mathrm{j}A^2\pi f_0}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$$

◀

例5.2.23 例5.2.3中的随机过程通过一个微分器，结果为

$$\boldsymbol{S}_Y(f)=4\pi^2f^2\left[\frac{1}{3}\delta(f)\right]=0$$

$$\boldsymbol{S}_{XY}(f)=(-\mathrm{j}2\pi f)\left[\frac{1}{3}\delta(f)\right]=0$$

以上两式利用了冲激函数的基本性质。这些结果是显而易见的，因为该随机过程的样本函数是常数，其微分的结果自然为零。◀

5.2.6 随机过程之和的功率谱密度

在实际应用中，经常遇到两个随机过程之和的情形。例如，当通信信道存在加性噪声时，噪声随机过程将叠加到信号随机过程上。下面来求解两个联合平稳随机过程之和的功率谱密度。

设随机过程$Z(t)=X(t)+Y(t)$，其中$X(t)$和$Y(t)$是联合平稳随机过程。根据例5.2.15已知，$Z(t)$是平稳随机过程，其自相关为

$$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau) \tag{5.2.29}$$

上式两边进行傅里叶变换，并利用习题5.39的结果，可得

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f) + S_{XY}(f) + \underbrace{S_{YX}(f)}_{S_{XY}^*(f)} \\ = S_X(f) + S_Y(f) + 2Re[S_{XY}(f)] \tag{5.2.30}$$

上式表明，两个随机过程之和的功率谱密度是各随机过程功率谱密度之和，再加上由两个随机过程的互相关决定的第三项。

如果两个随机过程不相关，那么

$$R_{XY}(\tau) = m_X m_Y$$

只要其中一个随机过程的均值为零，就有 $R_{XY}(\tau)=0$，且

225

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f) \tag{5.2.31}$$

例 5.2.24 用 $X(t)$ 表示例 5.2.2 中的随机过程，并设 $Z(t)=X(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$，则有

$$S_{XY}(f) = \frac{\mathrm{j}A^2\pi f_0}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$$

因此有

$$\mathrm{Re}[S_{XY}(f)] = 0$$

所以有

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f) = A^2\left(\frac{1}{4}+\pi^2 f_0^2\right)[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$ ◀

5.3 高斯过程和白过程

高斯(随机)过程在通信系统中扮演着重要角色，原因是它可以用于电子设备热噪声的建模，而由热扰动导致电子的随机运动产生了所谓的热噪声。

为了了解为什么热噪声是高斯过程，不妨考虑一个电阻的例子。热噪声是电阻中自由电子因热扰动而运动的结果。这些电子的运动是非常随机的，可以是任意方向的，但其速度是周边温度的函数。温度越高，电子的运动速度越快。这些电子的运动产生了随机电流。可以认为每个运动的电子都是微小的电流源，其电流值随机变化，可正可负(取决于电子的运动方向)。由所有电子产生的电流，即所有电流源的电流之和就是热噪声。可以认为大部分电子的运动是独立的，因此总电流是大量独立同分布的随机变量之和。根据中心极限定理，总电流服从高斯分布。这就是为什么可以认为热噪声是高斯过程的原因。

高斯过程也可用于描述某些信源。本节将介绍高斯过程的一些有用的性质，以更加方便地对高斯过程进行数学处理和应用。

5.3.1 高斯过程

在高斯(随机)过程中，不同时刻对应的随机变量是联合高斯的。在讨论开始，先给出高斯过程的正式定义。

定义 5.3.1 如果对于所有 n 以及所有 t_1，t_2，…，t_n，随机变量 $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ 具有联合高斯概率密度函数，则随机过程 $X(t)$ 是高斯过程。■

226

由上述定义可知，在任意时刻 t_0，随机变量 $X(t_0)$ 服从高斯分布；对于任意两个时刻 t_1 和 t_2，随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 服从二维联合高斯分布。

例 5.3.1 设 $X(t)$ 是零均值的平稳高斯随机过程，功率谱密度为 $S_X(f)=5\Pi\left(\frac{f}{1000}\right)$。求随机变量 $X(3)$ 的概率密度函数。

解： $X(t)$ 是高斯随机过程，对于任意时刻 t，随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数都是高斯的。因此，$X(3)\sim\mathcal{N}(m, \sigma^2)$。接下来求解 m 和 σ^2。因为是零均值随机过程，对于任意时刻 t，有 $E[X(t)]=0$，所以 $m=E[X(3)]=0$。至于方差，有

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}[X(3)] = E[X^2(3)] - E^2[X(3)] = E[X(3)X(3)] = R_X(0)$$

上式最后一步用到了平稳随机过程的性质：$E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(t_1-t_2)$。且由式(5.2.20)，得

$$\sigma^2 = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f = \int_{-500}^{500} 5\mathrm{d}f = 5000$$

因此，$X(3)\sim N(0, 5000)$，则概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10\,000\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{10\,000}}$$ ◀

与定义联合随机变量类似，可以定义联合高斯随机过程。

定义 5.3.2　两个随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$，如果对于所有正整数 n 和 m，以及所有 t_1，t_2，…，t_n 和 τ_1，τ_2，…，τ_m，随机向量$[X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)]$和$[Y(\tau_1), Y(\tau_2), \cdots, Y(\tau_m)]$服从 $n+m$ 维联合高斯分布，则称 $X(t)$和 $Y(t)$是联合高斯的。■

显然，如果上述定义中的 $X(t)$和 $Y(t)$是联合高斯的，则各自都是高斯的；但反过来不一定成立。也就是说，两个高斯随机过程不一定是联合高斯的。

高斯和联合高斯随机过程具备一些其他随机过程所不具备的重要性质。下面列举其中的两个：　227

性质 1：高斯过程 $X(t)$通过 LTI 系统，输出过程 $Y(t)$仍然是高斯的。而且，$X(t)$和 $Y(t)$是联合高斯的。

根据联合高斯随机变量的线性组合本身也是联合高斯分布，可直接推得性质 1。

性质 1 非常重要，它是高斯过程非常有吸引力的性质之一。对于非高斯过程来说，由输入过程的统计特征推得输出过程的统计特征并非易事。然而，高斯过程输入 LTI 系统，输出也是高斯的。

性质 2：对于联合高斯过程，不相关和相互独立是等价的。

性质 2 也是由高斯随机变量的基本性质直接推得，在联合高斯随机变量的讨论中已经提到过。

例 5.3.2　例 5.3.1 中的随机过程 $X(t)$通过微分器后的输出过程记作 $Y(t)$，即 $Y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$，求 $Y(3)$的概率密度函数。

解：微分器是 LTI 系统，根据性质 1，$Y(t)$是高斯过程。这意味着 $Y(3)$是均值为 m_Y，方差为 σ_Y^2 的高斯随机变量。已知微分器的冲激响应为 $h(t)=\delta'(t)$，因此传递函数为 $H(f)=\mathscr{T}[h(t)]=\mathrm{j}2\pi f$。利用例 5.2.16的结果，可得 $m_Y=0$。为了求 σ_Y^2，可采用与例 5.3.1 类似的方法。首先，将 $H(f)=\mathrm{j}2\pi f$ 代入式(5.2.23)，可求得 $\boldsymbol{S}_Y(f)$。这与例 5.2.23 和例 5.2.24 极为相似。即

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_Y(f)\mathrm{d}f = \int_{-500}^{500} 5\times 4\pi^2 f^2\mathrm{d}f = \left[\frac{20\pi^2}{3}f^3\right]_{f=-500}^{500} = \frac{20\pi^2}{3}\times 2\times 500^3 \approx 1.64\times 10^{10}$$

由于 $m_Y=0$，$\sigma_Y^2=1.64\times 10^{10}$，可得 $Y(3)\sim N(0, 1.64\times 10^{10})$。◀

5.3.2 白过程

白过程是指包含所有频率成分，且所有频率成分的功率都相同的随机过程，即对于所有频率，功率谱密度是常数。此定义与“白光”的概念类似——白光是包含所有颜色的光。　228

定义 5.3.3　如果随机过程 $X(t)$具有平坦的谱密度，即对于所有 f，$\boldsymbol{S}_X(f)$为常数，则称 $X(t)$为白过程。■

白过程的重要性源于，在实际应用中，热噪声在一个很宽的频率范围内可以近似用白过程模型刻画。另外，用于描述各种信源的大量过程可以看作是白过程通过 LTI 系统的输出过程。白过程的功率谱如图 5-19 所示。

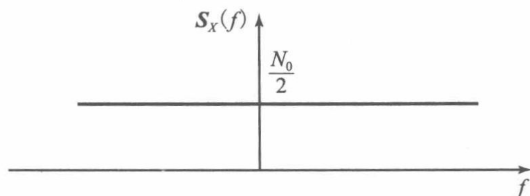


图 5-19　白过程的功率谱

如果用 $\boldsymbol{S}_X(f)=C$(C 为常数)来求白过程的功率，可得

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} C\mathrm{d}f = \infty$$

显然，实际的过程不可能有无穷大的功率；因此，白过程并不是一个物理可实现的过程。但是，量子力学分析表明，热噪声的功率谱密度为

$$\boldsymbol{S}_n(f) = \frac{hf}{2(\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1)} \tag{5.3.1}$$

其中 h 表示普朗克(Planck)常数(等于 $6.6\times10^{-34}\mathrm{J}\times\mathrm{s}$)，$k$ 表示玻尔兹曼(Boltzmann)常数(等于 $1.38\times10^{-23}\mathrm{J/K}$)，$T$ 表示以开尔文(Kelvin)为单位的温度。热噪声的功率谱如图 5-20 所示。

热噪声的功率谱在 $f=0$ 时达到最大值$\frac{kT}{2}$。当 f 趋近于无穷时，功率谱趋近于零，但向零逼近的速度非常缓慢。例如，在室温下($T=300\mathrm{K}$)，若要使 $\boldsymbol{S}_n(f)$下降至其最大值的 90%，需要 $f\approx2\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$，此频率已经超出了常规通信系统的频率范围。由此可知，热噪声尽管不是严格意义上的白过程，但在实际应用中可以看作是功率谱密度为$\frac{kT}{2}$的白过程。kT 通常记作 N_0。因此，热噪声的功率谱密度 $\boldsymbol{S}_n(f)=\frac{N_0}{2}$。为了强调它在正负频域都有分布，又称之为*双边功率谱密度*。本书将省略“双边”二字，直接称之为*功率谱*或*功率谱密度*。

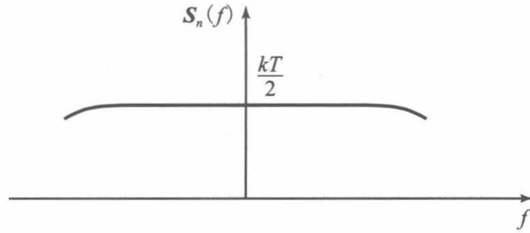


图 5-20 热噪声的功率谱

229

白过程的自相关函数为

$$R_n(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \tag{5.3.2}$$

上式表明，对于所有 $\tau\neq0$，有 $R_X(\tau)=0$。因此，如果在两个时刻 t_1 和 $t_2(t_1\neq t_2)$对白过程进行抽样，所得随机变量是不相关的。如果白过程还是高斯的，那么抽样所得的随机变量 $X(t_1)$和 $X(t_2)$是相互独立的(回顾联合高斯随机变量的性质，不相关和相互独立是等价的)，其中 $t_1\neq t_2$。

热噪声的性质。在后面各章中使用的热噪声假定具有下列性质：

1. 热噪声是平稳随机过程。
2. 热噪声的均值为零。
3. 热噪声是高斯随机过程。
4. 热噪声是功率谱密度 $\boldsymbol{S}_n(f)=\frac{kT}{2}$的白过程。

显然，热噪声的功率谱密度随着周围环境温度的升高而增大。因此，保持电路低温可降低噪声电平。

5.3.3 滤波后的噪声过程

在许多情况下，在系统某一级产生的白噪声，在经过下一级时会被滤波。因此，接下来要讨论滤波后的噪声。这种噪声通常是一个带通过程，即其功率谱密度远离零频，主要集中在某中心频率 f_c 周围，而且 f_c 的值远大于过程的带宽。

带通过程的样本函数是带通信号，与 2.7 节讨论过的带通信号一样，可以表示成同相分量和正交分量的形式。本节介绍带通噪声过程的主要性质，特别是同相过程和正交过程

的主要性质。

设随机过程 $X(t)$ 是某带宽为 W，中心频率为 f_c 的理想带通滤波器的输出。例如，此类滤波器的传递函数可以是如下形式

$$H_1(f)=\begin{cases}1 & |f-f_c|\leqslant W\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.3.3}$$

230

另一个此类滤波器的例子是

$$H_2(f)=\begin{cases}1 & f_c\leqslant|f|\leqslant f_c+W\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.3.4}$$

以上两个滤波器的传递函数如图 5-21 所示。

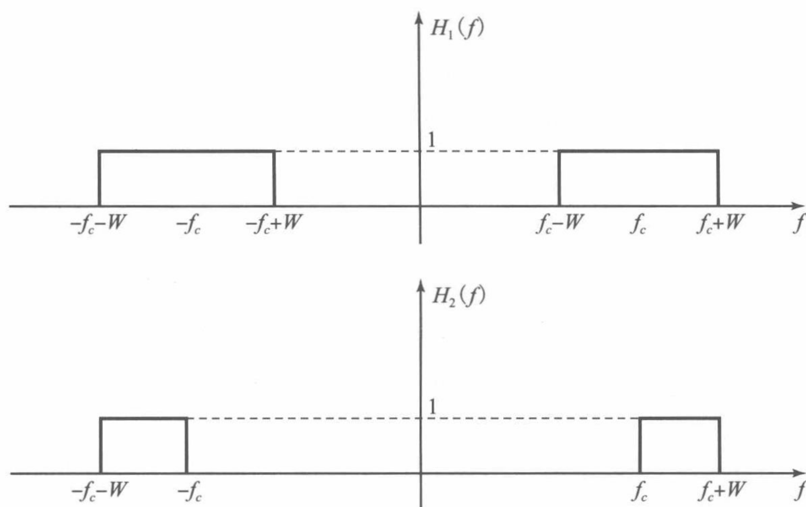


图 5-21 滤波器传递函数 $H_1(f)$ 和 $H_2(f)$

因为热噪声是高斯白噪声，所以滤波后的热噪声是高斯的，但不再是白噪声。滤波后的噪声功率谱密度为

$$\boldsymbol{S}_X(f)=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2=\frac{N_0}{2}H(f)$$

其中利用了理想滤波器的性质：$|H(f)|^2=H(f)$。对应 $H_1(f)$ 和 $H_2(f)$ 的滤波后噪声过程的功率谱密度分别为

$$\boldsymbol{S}_{X_1}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & |f-f_c|\leqslant W\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.3.5}$$

和

$$\boldsymbol{S}_{X_2}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & f_c\leqslant|f|\leqslant f_c+W\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.3.6}$$

所有经过带通滤波的噪声信号都有同相分量和正交分量，两者都是低通信号。这表明，带通随机过程 $X(t)$ 可以表示成与式(2.7.8)类似的形式，即

$$X(t)=X_c(t)\cos(2\pi f_c t)-X_s(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{5.3.7}$$

231

其中 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 分别表示同相分量和正交分量，都是低通随机过程。参考式(2.7.17)，滤波后的噪声也可以表示成包络和相位的形式，即

$$X(t)=A(t)\cos[2\pi f_c t+\theta(t)] \tag{5.3.8}$$

其中 $A(t)$ 和 $\theta(t)$ 都是低通随机过程。

同相和正交随机过程的性质。 高斯白噪声经过滤波之后，可以证明 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 具有下列性质(证明过程可以参考 Proakis 和 Salehi 的著作(2008))：

1. $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 是零均值、低通、联合平稳、联合高斯随机过程。

2. 若随机过程 $X(t)$ 的功率是 P_X，则 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的功率都是 P_X，即

$$P_X = P_{X_c} = P_{X_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f \tag{5.3.9}$$

3. $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 具有相同的功率谱密度，可由 $\boldsymbol{S}_X(f)$ 的正频域部分左移 f_c，负频域部分右移 f_c，平移后的两个频谱相加得到。因此，如果利用式(5.3.3)给定的 $H_1(f)$，则有

$$\boldsymbol{S}_{X_{1c}}(f) = \boldsymbol{S}_{X_{1s}}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| \leqslant W \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.3.10}$$

而如果利用式(5.3.4)给定的 $H_2(f)$，则有

$$\boldsymbol{S}_{X_{2c}}(f) = \boldsymbol{S}_{X_{2s}}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & |f| \leqslant W \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.3.11}$$

以上两种情形下的功率谱密度如图 5-22 所示。显然，在两种情形下，同相分量和正交分量的功率都与带通噪声的功率相同。若采用 $H_1(f)$，由式(5.3.5)可知，滤波后的噪声功率为 $P_1 = \frac{N_0}{2} \times 4W = 2N_0W$；若采用 $H_2(f)$，由式(5.3.6)可知，滤波后的噪声功率为 $P_2 = \frac{N_0}{2} \times 2W = N_0W$。对功率谱密度进行积分，得两种情形下的同相和正交分量的功率分别为 $2N_0W$ 和 N_0W，与相应的 P_1 和 P_2 相等。

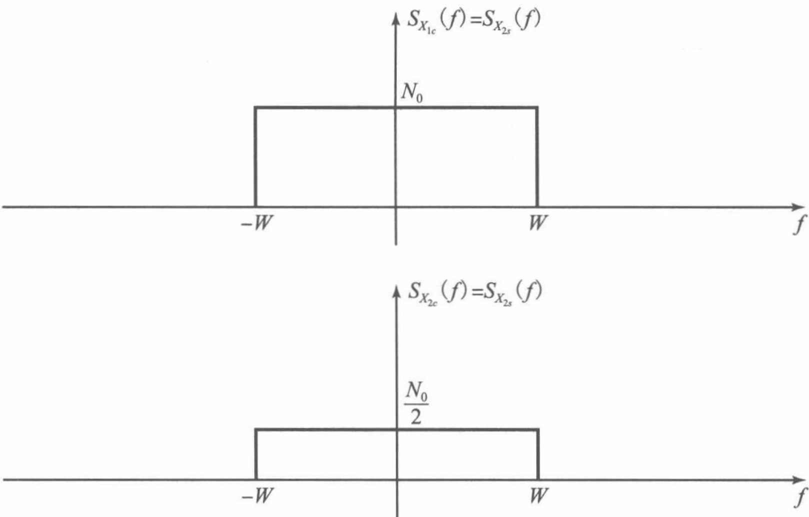


图 5-22　噪声经 $H_1(f)$ 和 $H_2(f)$ 滤波后的同相和正交分量的功率谱密度

4. 如果 $+f_c$ 和 $-f_c$ 分别是 $H(f)$ 频谱中正频率和负频率的对称轴——式(5.3.3)给定的 $H_1(f)$ 属于这种情形，而式(5.3.4)给定的 $H_2(f)$ 不属于这种情形，则 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 相互独立。

232

例 5.3.3 若白噪声经过式(5.3.3)给定的传递函数为 $H_1(f)$ 的带通滤波器，输出过程的同相和正交分量分别为 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$，求随机过程 $Z(t) = aX_c(t) + bX_s(t)$ 的功率谱密度。

解： 由于 f_c 是噪声功率谱密度的对称轴，所以噪声的同相分量和正交分量是相互独立的，则 $Z(t)$ 是

两个相互独立的零均值随机过程之和。这表明式(5.2.31)所要求的条件成立，因此 $Z(t)$ 的功率谱密度是 $aX_c(t)$ 和 $bX_s(t)$ 的功率谱密度之和。而且已知 $\mathcal{S}_X(f)=\mathcal{S}_{X_c}(f)=\mathcal{S}_{X_s}(f)$，因此有 $\mathcal{S}_Z(f)=a^2\mathcal{S}(f)+b^2\mathcal{S}(f)=(a^2+b^2)\mathcal{S}(f)$。特别地，若 $a=\cos\theta$，$b=-\sin\theta$，有 $\mathcal{S}_Z(f)=\mathcal{S}(f)$。◀

噪声等效带宽。 高斯白噪声通过滤波器，输出过程虽然是高斯的，但不再是白过程。滤波器特性决定了输出过程的谱特征，并且有

$$\mathcal{S}_Y(f)=\mathcal{S}_X(f)|H(f)|^2=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

若要求输出过程的功率，则要对 $\mathcal{S}_Y(f)$ 进行积分，即

233

$$P_Y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_Y(f)\mathrm{d}f=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f$$

为了求输出功率，必须计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f$。因此，定义频率响应为 $H(f)$ 的滤波器的噪声等效带宽 B_{neq} 为

$$B_{\mathrm{neq}}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f}{2H_{\max}^2} \tag{5.3.12}$$

其中，$H_{\max}$ 表示在滤波器通频带中 $|H(f)|$ 的最大值。某典型滤波器的 $H_{\max}$ 和 B_{neq} 如图 5-23 所示。

根据上述定义，有

$$\begin{aligned}P_Y&=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f\\&=\frac{N_0}{2}\times 2B_{\mathrm{neq}}H_{\max}^2\\&=N_0B_{\mathrm{neq}}H_{\max}^2\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

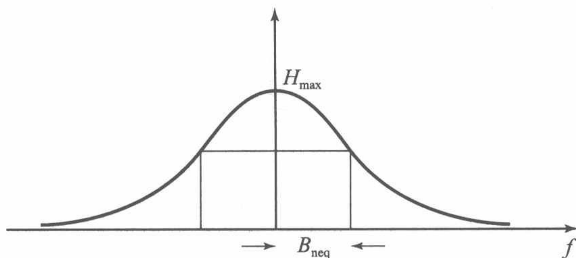


图 5-23　某典型滤波器的噪声等效带宽

因此，若 B_{neq} 已知，求输出噪声功率就轻而易举了。滤波器和放大器的噪声等效带宽通常由制造商提供。

例 5.3.4 求低通 RC 滤波器的噪声等效带宽。

解： 如图 5-24 所示，RC 滤波器的传递函数为

$$H(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi fRC}$$

设 $\tau=RC$，得

$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2f^2\tau^2}}$$

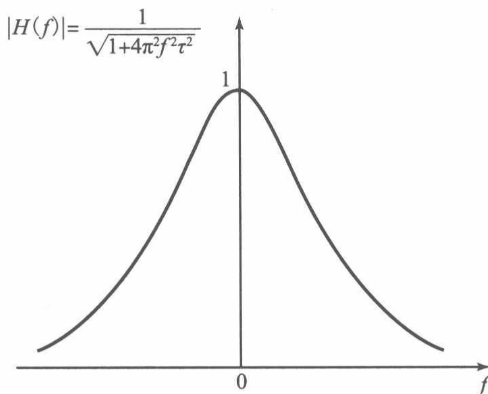


图 5-24　低通 RC 滤波器的频率响应

234

因此，$H_{\max}=1$。而且还有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f&=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2f^2\tau^2}\mathrm{d}f\\&\overset{u=2\pi f\tau}{=}2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\times\frac{\mathrm{d}u}{2\pi\tau}\\&=\frac{1}{\pi\tau}\times\frac{\pi}{2}\\&=\frac{1}{2\tau}\end{aligned}$$

所以有

$$B_{\mathrm{neq}}=\frac{\frac{1}{2\tau}}{2\times 1}=\frac{1}{4RC}$$ ◀

5.4 小结及深入阅读

本章首先复习了概率及随机变量的基本概念和定义。介绍了伯努利随机变量、二项随机变量、均匀随机变量和高斯随机变量及其性质。学习了随机变量的函数，包括诸如均值和方差等统计平均。也简单介绍了多维随机变量及其联合统计特征，例如联合矩，即协方差。

随机过程的学习环节包括广义平稳随机过程及其自相关函数，联合随机过程及其互相关函数。此外，还介绍了平稳随机过程的功率谱密度和维纳-辛钦定理，后者指出，平稳随机过程的功率谱密度是其自相关函数的傅里叶变换。当平稳随机过程通过 LTI 系统，输出过程也是平稳的。这样，就将输出过程的自相关和功率谱密度与输入随机过程的自相关和功率谱密度以及 LTI 系统的时间和频率响应特性联系在一起。

235

本章的最后学习了高斯随机过程和白过程。在学习白过程时，介绍了热噪声的一些性质，并用高斯白随机过程刻画热噪声。当高斯白噪声经过带通滤波器滤波之后，输出的是带通高斯噪声过程。此过程可以用同相和正交分量的形式表示，而同相和正交分量都是低通随机过程。同相和正交随机过程的谱特征也一并给出。

Leon Garcia(1994)，Helstrom(1991)，Davenport 和 Root(1987)，Papoulis(1991)，Nelson(1995)，以及 Stark 和 Woods(1994)的著作讲述了概率和随机过程，并着重强调了其在电子工程中的应用。Gray 和 Davisson(1986)的著作尤其有价值，介绍了电子工程领域要用到的各种随机过程，并且没有繁琐的数学推导。

习题

5.1 一个箱子装有 4 个红球(编号 1，2，3，4)和 3 个黑球(编号 1，2，3)。若进行随机试验，从此箱子中随机地取出一球，准确描述下列事件所包含的试验结果：

1. $E_1=\{$球的编号为偶数$\}$。
2. $E_2=\{$球的颜色是红色且编号大于 1$\}$。
3. $E_3=\{$球的编号小于 3$\}$。
4. $E_4=E_1\cup E_3$。
5. $E_5=E_1\cup(E_2\cap E_3)$。

5.2 若上题中各球被取出的可能性相同，求事件 $E_i(1\leqslant i\leqslant 5)$的概率。

5.3 在某城市中，三种汽车品牌 A，B，C 分别占有 20%，30%和 50%的市场份额，在购买第一年内需要大修的概率分别为 5%，10%，15%。

1. 该城市中的汽车在购买第一年需要大修的概率是多少?
2. 如果该城市中的某辆汽车在购买第一年需要大修，则该汽车由制造商 A 制造的概率是多少?

5.4 在什么条件下，互斥的两事件 A 和 B 是相互独立的?

5.5 某信源输出 0 和 1 的概率分别为 0.3 和 0.7，并通过错误概率为 0.2(即 0 变 1，或 1 变 0)的信道传输。

1. 信道输出为 1 的概率是多少?
2. 信道输入为 1 的条件下，信源输出为 1 的概率是多少?

5.6 随机抛三次硬币，用随机变量 X 表示正面向上的总次数。每次抛硬币，正面向上的概率记作 p。

1. 随机变量 X 可以取哪些值?
2. 求随机变量 X 的概率质量函数(PMF)。
3. 求并画出随机变量 X 的累积分布函数(CDF)。
4. 求随机变量 X 大于 1 的概率。

5.7 使用两个硬币 A 和 B 进行抛硬币试验。A 为特殊硬币，正面向上的概率为 1/4，反面向上的概率为 3/4；而 B 为普通硬币。若试验中每个硬币抛 4 次，随机变量 X 表示硬币 A 正面向上的次数，随机变量 Y 表示硬币 B 正面向上的次数。

1. 求 $X=Y=2$ 的概率。
2. 求 $X=Y$ 的概率。
3. 求 $X>Y$ 的概率。
4. 求 $X+Y\leqslant 5$ 的概率。

5.8 随机变量 X 的 CDF 为

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x & 0\leqslant x<1\\ K & x\geqslant 1\end{cases}$$

1. 求 K 的值。

2. 该随机变量是离散的、连续的、还是混合的？

3. 求 $\frac{1}{2}<X\leqslant 1$ 的概率。

4. 求 $\frac{1}{2}<X<1$ 的概率。

5. 求 $X>2$ 的概率。

5.9 随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)=\Lambda(x)$。

1. 求 $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$。

2. 求 $P\left(X>0 \mid X<\frac{1}{2}\right)$。

3. 求 $f_X\left(x \mid X>\frac{1}{2}\right)$。

4. 求 $E\left(X \mid X>\frac{1}{2}\right)$。

5.10 X 是均值为 4，方差为 9 的高斯随机变量，即 $X\sim\mathcal{N}(4, 9)$。求下列概率：

1. $P(X>7)$。
2. $P(0<X<9)$。

5.11 电路中的噪声电压可以描述成均值为 0，方差为 10^{-8} 的高斯随机变量。

1. 噪声电压大于 10^{-4} 的概率是多少？大于 4×10^{-4} 的概率是多少？在 -2×10^{-4} 到 10^{-4} 之间的概率是多少？
2. 在噪声电压为正值的条件下，噪声电压超过 10^{-4} 的概率是多少？
3. 若噪声通过具有如下特性的半波整流器：

$$g(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

先求整流后的噪声的 CDF，再求其 PDF。为什么不可以直接利用通式(5.1.11)。

4. 求整流后噪声的期望。
5. 现在假设噪声通过全波整流器 $g(x)=|x|$，求全波整流后的噪声的 PDF 和期望。

5.12 X 是服从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的随机变量，通过输入一输出关系式为 $y=g(x)$ 的系统。求下列各种情形下输出随机变量 Y 的 PDF 或 PMF：

1. 平方律器件：$g(x)=ax^2$。
2. 限幅器：

$$g(x)=\begin{cases} -b & x\leqslant -b \\ b & x\geqslant b \\ x & |x|<b \end{cases}$$

3. 硬限幅器：

$$g(x)=\begin{cases} a & x>0 \\ 0 & x=0 \\ b & x<0 \end{cases}$$

4. 量化器：对于 $a_n\leqslant x<a_{n+1}$，$1\leqslant n\leqslant N$，有 $g(x)=x_n$，其中 x_n 位于区间 $[a_n, a_{n+1}]$ 内，序列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}\}$ 满足条件 $a_1=-\infty$ 即 $a_{N+1}=\infty$，且对于 $i>j$，有 $a_i>a_j$。

5.13 随机变量 Φ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上均匀分布，求随机变量 $X=\tan\Phi$ 的概率密度函数、均值和方差。

5.14 Y 为非负随机变量，即当 $y<0$ 时，$f_Y(y)=0$。

1. 设 α 是任意正常数，证明 $P(Y>\alpha)\leqslant\frac{E(Y)}{\alpha}$（马尔科夫(Markov)不等式）。
2. 设 X 是方差为 σ^2 的任意随机变量，且定义 $Y=(X-E[X])^2$，以及对于某个 ε，有 $\alpha=\varepsilon^2$。显然，Y 和 α 满足题目的条件。试推导切比雪夫(Chebychev)不等式

$$P(|X-E(X)|>\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

5.15 试证明二项随机变量的均值为 np，方差为 $np(1-p)$。

5.16 泊松随机变量的 PMF 为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，其中 $k=0, 1, 2, \cdots$，且 $\lambda>0$。证明泊松随机变量的均值和方差均为 λ。

5.17 设 X 是均值为 0，方差为 σ^2 的高斯随机变量，试证明

$$E[X^n]=\begin{cases} 0 & n=2k+1 \\ 1\times 3\times\cdots\times(n-1)\sigma^n & n=2k \end{cases}$$

（提示：对式 $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=0.5\sqrt{2\pi\sigma^2}$ 求 k 次微分。）

5.18 两随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} K(x+y) & 0\leqslant x,y\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1. 求 K 的值。
2. 求 $P(X+Y)>1$。
3. 求 $P(X>Y)$。
4. 求 $P(X>Y \mid X+2Y>1)$。
5. 求 $P(X=Y)$。
6. 求 $P(X>0.5 \mid X=Y)$。
7. 求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。
8. 求 $f_X(x \mid X+2Y>1)$ 和 $E(X \mid X+2Y>1)$。

5.19 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，PDF 都是 $f_X(x)$。

1. 若 $Y=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，求 Y 的 PDF。
2. 若 $Z=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，求 Z 的 PDF。

5.20 证明对于服从瑞利分布

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

的随机变量 X 有 $E(X)=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $\mathrm{VAR}(X)=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$。

5.21　设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且有

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

和

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，假定 α 和 β 都是正的常数。求 $X+Y$ 的 PDF，并分析 $\alpha=\beta$ 时的情况。

5.22　两随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}Ke^{-x-y} & x\geqslant y\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

1. 求常数 K 的值。
2. 求 X 和 Y 的边缘概率密度函数。
3. X 和 Y 是相互独立的吗?
4. 求 $f_{X|Y}(x|y)$。
5. 求 $E(X|Y=y)$。
6. 求 $\mathrm{COV}(X, Y)$ 和 $\rho_{X,Y}$。

5.23　设 Θ 是在 $[0, \pi]$ 上均匀分布的随机变量，并设 $X=\cos\Theta$，$Y=\sin\Theta$。证明 X 和 Y 是不相关的，但不是相互独立的。

5.24　设 X 和 Y 是相互独立的两个高斯随机变量，均值都为 0，方差都为 1。定义两个事件 $E_1(r)=\{X>r \text{ 且 } Y>r\}$ 和 $E_2(r)=\{\sqrt{X^2+Y^2}>2r\}$，其中 r 为非负常数。

1. 证明 $E_1(r)\subseteq E_2(r)$；因此有 $P[E_1(r)]\leqslant P[E_2(r)]$。
2. 证明 $P[E_1(r)]=Q^2(r)$。
3. 利用直角坐标到极坐标的转换关系求 $P[E_2(r)]$，并推导 Q 函数的上界，即

$$Q(r)\leqslant\frac{1}{2}e^{-\frac{r^2}{2}}$$

5.25　已知 Q 函数可由如下近似式表示

$$Q(x)\approx\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(b_1t+b_2t^2+b_3t^3+b_4t^4+b_tt^5)$$

其中 $t=\dfrac{1}{1+px}$，且

$$p=0.2316419$$
$$b_1=0.31981530$$
$$b_2=-0.356563782$$
$$b_3=1.781477937$$
$$b_4=-1.821255978$$
$$b_5=1.330274429$$

利用上述近似式编写一段计算机程序，可以计算任意给定自变量的 Q 函数值。计算 $x=1$，1.5，2，2.5，3，3.5，4，4.5，5 时 $Q(x)$ 的值，并与 Q 函数表中的值进行比较。

5.26　设 X 和 Y 是相互独立的两个高斯随机变量，都服从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分布。设 $Z=X+Y$，$W=2X-Y$，求 Z 和 W 的联合概率密度以及协方差。

5.27　设 X 和 Y 是联合高斯随机变量，均值分别为 m_X 和 m_Y，方差分别为 σ_X^2 和 σ_Y^2，相关系数为 $\rho_{X,Y}$。证明 $f_{X|Y}(x|y)$ 是高斯分布，均值为 $m_X+\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)$，方差为 $\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)$。如果 $\rho=0$ 会怎样? $\rho=\pm1$ 呢?

5.28　设 X 和 Y 是零均值联合高斯随机变量，方差都为 σ^2，互相关系数为 ρ。随机变量 Z 和 W 定义为

$$\begin{cases}Z=X\cos\theta+Y\sin\theta\\ W=-X\sin\theta+Y\cos\theta\end{cases}$$

其中 θ 是角度常数。

1. 证明 Z 和 W 是联合高斯随机变量。
2. θ 取何值时，Z 和 W 相互独立?

5.29　两随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{K}{\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & xy\geqslant 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$$

1. 求 K 的值。
2. 证明 X 和 Y 都是高斯随机变量。
3. 证明 X 和 Y 不是联合高斯随机变量。
4. X 和 Y 是否相互独立?
5. X 和 Y 是否不相关?
6. 求 $f_{X|Y}(x|y)$，并说明是否是高斯分布。

5.30　设 X 和 Y 是两个相互独立且方差均为 σ^2 的高斯随机变量，X 的均值为 m，Y 的均值为零。定义随机变量 $V=\sqrt{X^2+Y^2}$。证明

$$f_V(v)=\begin{cases}\dfrac{v}{\sigma^2}I_0\left(\dfrac{mv}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{v^2+m^2}{2\sigma^2}} & v>0\\ 0 & v\leqslant 0\end{cases}$$

其中

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x\cos u}\mathrm{d}u$$

称为修正的第Ⅰ类零阶贝塞尔函数。V 即是著名的莱斯(Rician)分布。证明当 $m=0$ 时，莱斯分布可简化为瑞利分布。

5.31　抛一枚特殊的硬币，其正面朝上的概率为 1/4，将该硬币抛 2000 次。

1. 利用大数定律求正面朝上的次数在 480 到 520 之间的概率的下界。
2. 利用中心极限定理求正面朝上的次数在 480 到 520 之间的概率。

5.32　求例 5.2.3 中随机过程 $X(t)$ 的均值 $m_X(t)$，结果是否与 t 无关?

5.33　定义随机变量 $X(t)=A+Bt$，其中 A 和 B 是相互独立的随机变量，且在 $[-1, 1]$ 上都服从均匀分布。求 $m_X(t)$ 和 $R_X(t_1, t_2)$。

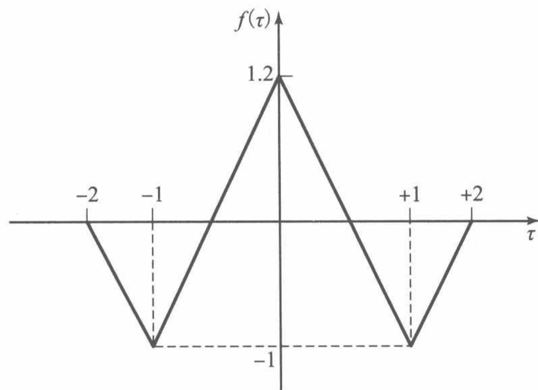
5.34　证明例 5.2.3 中的随机过程是平稳随机

过程。

5.35　下列函数中，哪些可能是随机过程的自相关函数？为什么？

1. $f(\tau)=\sin(2\pi f_0\tau)$。

2. 如习题5.35图所示 $f(\tau)$。



习题5.35图

5.36　例5.2.5中的随机过程是平稳的吗？

5.37　随机过程 $Z(t)$ 取值0或1，随机发生0变1或者1变0的转变，在时间间隔 τ 内发生 n 次转变的概率为

$$p_N(n)=\frac{1}{1+\alpha\tau}\left(\frac{\alpha\tau}{1+\alpha\tau}\right)^n \quad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $\alpha>0$ 是一个常数。假设当 $t=0$ 时，$X(0)$ 等概取值0或1。

1. 求 $m_Z(t)$。

2. 求 $R_Z(t+\tau, t)$。$Z(t)$ 是平稳的吗？

3. 求 $Z(t)$ 的功率谱密度。

5.38　随机过程 $X(t)$ 定义为

$$X(t)=X\cos(2\pi f_0 t)+Y\sin(2\pi f_0 t)$$

其中 X 和 Y 是两个相互独立，且均值都为零的高斯随机变量，方差分别为 σ_X^2 和 σ_Y^2。

1. 求 $m_X(t)$。

2. 求 $R_X(t+\tau, t)$。$X(t)$ 是平稳的吗？

3. 求 $X(t)$ 的功率谱密度。

4. 若 $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$，重新计算问题1和2。

5.39　证明联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$。据此，可推断 $S_{XY}(f)=S_{YX}^*(f)$。

5.40　一个功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的零均值高斯白噪声通过一个带宽为 B 的理想低通滤波器。

1. 求输出过程 $Y(t)$ 的自相关。

2. 设 $\tau=\frac{1}{2B}$，求随机变量 $Y(t)$ 和 $Y(t+\tau)$ 的联合概率密度函数。这两个随机变量是否相互独立？

5.41　一个自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的平稳随机过程通过延迟为 Δ 的延迟线，求输出过程的自相关函数，并解释结果。

5.42　已知平稳随机过程通过LTI系统，输出也是平稳随机过程。此结论的逆命题也成立吗？即如果输出是平稳随机过程，那么输入随机过程必定是平稳随机过程吗？

5.43　若 $X(t)$ 是平稳随机过程，概括例5.2.24的结论如下：

1. 证明 $X(t)$ 与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$ 不相关。

2. 证明 $Z(t)=X(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$ 的功率谱是 $X(t)$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$ 各自的功率谱之和。

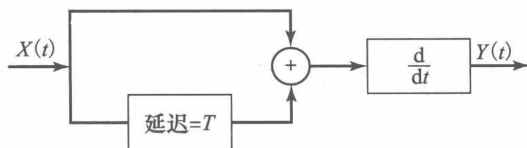
3. 用 $X(t)$ 的功率谱表示 $Z(t)$ 的功率谱。

5.44　设 $X(t)$ 是功率谱密度为 $S_X(f)$ 的平稳随机过程。该随机过程通过如习题5.44图所示的系统。

1. $Y(t)$ 是平稳随机过程么？为什么？

2. 求 $Y(t)$ 的功率谱密度。

3. 输出过程中不可能出现哪些频率成分？为什么？



习题5.44图

5.45　平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度记作 $S_X(f)$。

1. 求 $Y(t)=X(t)-X(t-T)$ 的功率谱密度。

2. 求 $Z(t)=X'(t)-X(t)$ 的功率谱密度。

3. 求 $W(t)=Y(t)+Z(t)$ 的功率谱密度。

5.46　若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳随机过程，证明

$$|R_{XY}(\tau)|\leqslant\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}\leqslant\frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)]$$

5.47　平稳随机过程 $X(t)$ 通过LTI系统，输出过程记作 $Y(t)$。求下列各情形下，输出的自相关函数以及输入和输出的互相关函数：

1. 延迟为 Δ 的延迟系统。

2. 冲激响应 $h(t)=\frac{1}{t}$ 的系统。

3. 冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ 的系统，其中 $\alpha>0$。

4. 由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)+Y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)-X(t)$$

描述的系统。

5. 由输入-输出关系式

$$y(t)=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

定义的有限时间平均系统，其中 T 是一个常数。

5.48　试列举一个 $R_{XY}(t+\tau)$ 是 τ 的函数，但 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不是平稳随机过程的例子。

5.49 $X(t)$是一个零均值的 WSS 高斯随机过程，其功率谱密度为

$$S_X(f)=4\times10^{-5}\Lambda\left(\frac{f}{10^5}\right)$$

1. 求 $X(t)$的功率。
2. 求 $X(t)$的带宽。
3. 若 $X(t)$通过带宽为 50kHz 的理想低通滤波器，输出记作 $Y(t)$。求 $Y(t)$的功率谱密度 $S_Y(f)$及总功率。
4. 求随机变量 $X(0)$的 PDF。
5. 求使 $X(0)$和 $X(t_0)$相互独立($t_0>0$)的 t_0 的最小值。

5.50 $X(t)$是零均值的 WSS 高斯随机过程，自相关函数为

$$R_X(\tau)=4\text{sinc}^2(10^4\tau)$$

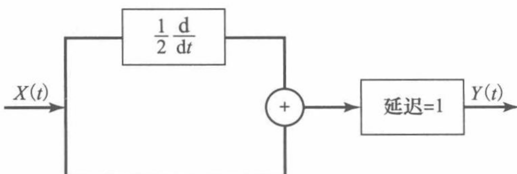
1. 求 $X(t)$的功率。
2. 求 $X(t)$的功率谱密度 $S_X(f)$。
3. 求 $X(t)$的带宽。
4. 若 $X(t)$通过带宽为 5kHz 的理想低通滤波器，输出记作 $Y(t)$。求 $Y(t)$的功率谱密度 $S_Y(f)$及总功率。
5. 求随机变量 $X(0)$，$X(10^{-4})$和 $X(1.5\times10^{-4})$的 PDF。
6. 证明 $X(0)$和 $X(10^{-4})$是相互独立的，但 $X(0)$和 $X(1.5\times10^{-4})$不是相互独立的。

5.51 $X(t)$是均值 $m_X=2$ 的 WSS 高斯随机过程，功率谱密度为

$$S_X(f)=\begin{cases}10^{-3} & |f|\leqslant 200\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X(t)$通过如习题 5.51 图所示的 LTI 系统，输出记作 $Y(t)$。

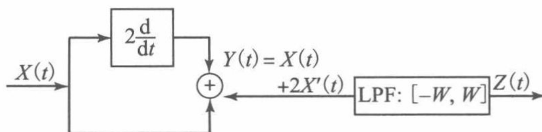
1. 求 $Y(t)$的均值 m_Y。
2. 求 $Y(t)$的功率谱密度 $S_Y(f)$。
3. 求 $Y(t)$的功率 P_Y。
4. $Y(t)$是 WSS 的吗？为什么？
5. $Y(t)$是高斯的吗？为什么？
6. 求系统在时刻 $t=1$ 的输出(即随机变量 $Y(1)$)的 PDF。



习题 5.51 图

5.52 在如习题 5.52 图所示的框图中，$X(t)$表示一个零均值的 WSS 白随机过程，功率谱密度 $S_X(f)=\frac{N_0}{2}$。LPF 表示一个允许频率范围在$[-W, W]$内的频率成分通过，滤除所有其他频率成分的理想低通滤波器。试回答下列问题：

1. 求 $Y(t)$的均值和功率谱密度。
2. 求 $Z(t)$的功率谱密度。
3. $Z(t)$是 WSS 随机过程吗？为什么？
4. 若 $W=4$，求 $Z(t)$的方差。
5. 求 $Y(t)$的功率。



习题 5.52 图

5.53 求下列各过程的功率谱密度：

1. $X(t)=A\cos(2\pi f_0t+\Theta)$，其中 A 是常数，Θ 是在$[0, \frac{\pi}{4}]$上均匀分布的随机变量。
2. $X(t)=X+Y$，其中 X 是在$[-1, 1]$上均匀分布的随机变量，Y 是在$[0, 1]$上均匀分布的随机变量，且 X 和 Y 相互独立。

5.54 $X(t)$是自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$ ($\alpha>0$)的平稳随机过程，通过冲激响应为 $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$ ($\beta>0$)的 LTI 系统，求输出过程 $Y(t)$的功率谱密度，针对 $\alpha\neq\beta$ 和 $\alpha=\beta$ 两种情况分别予以讨论。

5.55 设 $Y(t)=X(t)+N(t)$，其中 $X(t)$和 $N(t)$分别是信号和噪声过程，并设 $X(t)$和 $N(t)$是联合平稳的，自相关函数分别为 $R_X(\tau)$和 $R_N(\tau)$，互相关函数为 $R_{XN}(\tau)$。为了从噪声中把信号分离出来，让 $Y(t)$通过一个冲激响应为 $h(t)$，传递函数为 $H(f)$的 LTI 系统，要求输出过程$\hat{X}(t)$尽可能地接近 $X(t)$。

1. 用 $h(\tau)$，$R_X(\tau)$，$R_N(\tau)$和 $R_{XN}(\tau)$来表示$\hat{X}(t)$和 $X(t)$的互相关。
2. 证明使 $E[X(t)-\hat{X}(t)]^2$ 最小的 LTI 系统的传递函数为
$$H(f)=\frac{S_X(f)+S_{XN}(f)}{S_X(f)+S_N(f)+2Re[S_{XN}(f)]}$$
3. 现在设 $X(t)$和 $N(t)$是相互独立的，且 $N(t)$是零均值的高斯白过程，功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$。求此条件下最优的 $H(f)$，以及此时$E[X(t)-\hat{X}(t)]^2$的值。
4. 若 $S_N(f)=1$，$S_X(f)=\frac{1}{1+f^2}$，$S_{SN}(f)=0$，求最优 $H(f)$。

5.56 本习题验证利用一个随机过程来预测另一个随机过程。设$X(t)$和$Z(t)$是联合平稳随机过程，想要设计一个冲激响应为$h(t)$的 LTI 系统，使得

当$Z(t)$通过此系统时，输出过程$\hat{X}(t)$尽可能地接近 $X(t)$。换言之，通过观察 $Z(t)$来获得 $X(t)$的最佳线性估计，从而最小化 $E[X(t)-\hat{X}(t)]^2$。

1. 假设现在有两个 LTI 系统，冲激响应分别为 $h(t)$和 $g(t)$。$Z(t)$分别通过这两个系统，输出过程分别记作$\hat{X}(t)$和$\tilde{X}(t)$。设计第一个滤波器，使得其输出对所有的 τ 和 t 都满足
$$E\{[X(t)-\hat{X}(t)]Z(t-\tau)\}=0$$
而第二个滤波器没有此要求。试证明：
$$E[X(t)-\tilde{X}(t)]^2 \geqslant E[X(t)-\hat{X}(t)]^2$$
即最佳滤波器的充要条件是其输出满足正交条件：
$$E\{[X(t)-\hat{X}(t)]Z(t-\tau)\}=0$$
简言之，预测误差 $\varepsilon(t)=X(t)-\hat{X}(t)$必须时刻与可观察过程 $Z(t)$正交。
2. 证明最佳 $h(t)$必须满足
$$R_{XZ}(\tau)=R_Z(\tau)*h(\tau)$$
3. 证明最佳滤波器满足
$$H(f)=\frac{\boldsymbol{S}_{XZ}(f)}{\boldsymbol{S}_Z(f)}$$
4. 推导采用最佳滤波器时 $E[\varepsilon^2(t)]$的表达式。

5.57　带宽为 W 的理想带通滤波器的噪声等效带宽是多少？

5.58　设 $n_w(t)$为零均值的高斯白噪声，功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$。$n_w(t)$通过通带范围为 3kHz 至 11kHz 的理想带通滤波器，输出过程记作 $n(t)$。

1. 若 $f_0=7\text{kHz}$，求 $\boldsymbol{S}_{n_c}(f)$，$\boldsymbol{S}_{n_s}(f)$和 $R_{n_cn_s}(\tau)$，其中 $n_c(t)$和 $n_s(t)$分别是 $n(t)$的同相分量和正交分量。
2. 若 $f_0=6\text{kHz}$，重做第 1 问。

5.59　设 $p(t)$是一个带通信号，其同相分量和正交分量分别为 $p_c(t)$和 $p_s(t)$。又设
$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_np(t-nT)$$
其中 A_n 是一组相互独立的随机变量。用 $p_c(t)$和 $p_s(t)$来表示 $X_c(t)$和 $X_s(t)$。

5.60　设 $X(t)$是一个带通随机过程，其包络为 $V(t)$。证明：任意选择中心频率 f_0，$V(t)$保持不变。

5.61　设 $n_w(t)$为零均值的高斯白噪声，功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$。$n_w(t)$通过带宽为 $2W$，中心频率为 f_c 的理想带通滤波器，输出过程记作 $n(t)$。

1. 若 $f_0=f_c$，求 $n(t)$的同相分量和正交分量的功率。
2. 求 $n(t)$的包络 $V(t)$的概率密度函数。
3. 设 $X(t)=A\cos(2\pi f_0t)+n(t)$，其中 A 为常数，求 $X(t)$的包络的概率密度函数。

5.62　噪声随机过程的功率谱密度为
$$\boldsymbol{S}_n(f)=\begin{cases}10^{-8}\left(1-\frac{|f|}{10^8}\right) & |f|<10^8\\ 0 & |f|>10^8\end{cases}$$
该噪声通过一个带宽为 2MHz，中心频率为 50MHz 的理想带通滤波器。

1. 求输出过程的功率。
2. 设 $f_0=50\text{MHz}$，用同相分量和正交分量来表示输出过程，并求各分量的功率。
3. 求同相分量和正交分量的功率谱密度。
4. 现在假设滤波器不是理想的，并可由下式描述
$$|H(f)|^2=\begin{cases}|f|-49\times10^6 & 49\text{MHz}<|f|<51\text{MHz}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$
重做第 1、2 和 3 问。

236 ~ 249

上机习题

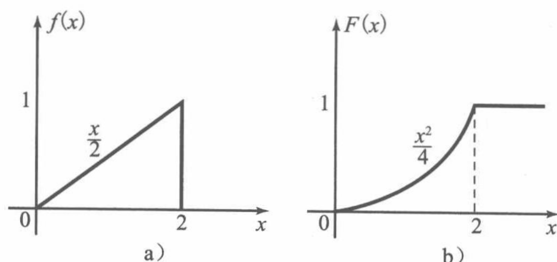
5.1　生成随机变量

本习题的目标是生成一个具有如上机习题 5.1 图 a 所示线性概率密度函数的随机变量 X。即
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$
相应的概率分布函数为
$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(v)\mathrm{d}v$$
$$=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$
$F_X(x)$如上机习题 5.1 图 b 所示，注意 $0\leqslant F_X(x)\leqslant 1$。

为了生成随机变量 X 的样本序列$\{X_i\}$，用 MATLAB 生成在(0，1)上均匀分布的随机变量$\{u_i\}$。然后令
$$F(x_i)=\frac{x_i^2}{4}=u_i$$
解出 x_i，得 $x_i=2\sqrt{u_i}$。显然，x_i 的取值范围是(0，2)。

1. 用上述方法生成随机变量 X 的 10 000 个样本。
2. 将区间(0，2)等间隔分成 20 份，统计$\{x_i\}$落在每个小区间的数目，并画出随机产生的这 10 000 个样本落在每个小区间的样本数目的直方图。将此直方图与概率密度函数 $f_X(x)$做比较，并评价直方图与 $f_X(x)$的吻

合程度。



上机习题 5.1 图　线性概率密度函数 a)及其对应的概率分布函数 b)

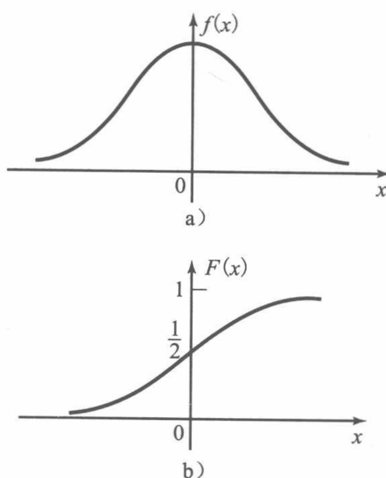
5.2　生成高斯随机变量

通信系统中的加性噪声特性可由高斯概率密度函数描述，即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty$$

如上机习题 5.2 图 a 所示，其中 σ^2 是随机变量 X 的方差。概率分布函数如上机习题 5.2 图 b 所示，即

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P(X\leqslant x)\\&=\int_{-\infty}^{x}f_X(v)\mathrm{d}v\quad -\infty<x<\infty\end{aligned}$$



上机习题 5.2 图　高斯概率密度函数 a)及其对应的概率分布函数 b)

本习题的目标是在计算机上生成一个高斯分布的随机变量序列$\{x_i\}$。如果 $F_X(x)$有闭式表达式，则可以很容易地生成一个均匀分布的随机变量序列$\{u_i\}$，并令 $F_X(x_i)=u_i$，然后利用逆映射即可解出 x_i。然而，这里的 $F_X(x)$并没有闭式表达式，因此只能采用变通的方法。首先生成与高斯随机变量有关的随机变量序列。由概率论可知，服从瑞利分布的随机变量 R 的概率分布函数为

$$F_R(r)=\begin{cases}1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

R 与一对相互独立的高斯随机变量 X 和 Y 的关系可由如下变换表示

$$\begin{cases}X=R\cos\Theta\\Y=R\sin\Theta\end{cases}$$

其中 Θ 是在(0，2π)上均匀分布的随机变量，且与 R 相互独立。参数 σ^2 是 X 和 Y 的方差。因此，令 $F_R(r_i)=u_i$，其中$\{u_i\}$是在(0，1)上均匀分布的随机变量序列，则易得

$$r_i=\sqrt{2\sigma^2\ln\left(\frac{1}{1-u_i}\right)}$$

接下来，生成另一个在(0，1)上均匀分布的随机变量序列$\{v_i\}$，并定义

$$\theta_i=2\pi v_i$$

最后，由$\{r_i\}$和$\{\theta_i\}$，利用如下关系

$$\begin{cases}x_i=r_i\cos\theta_i\\y_i=r_i\sin\theta_i\end{cases}$$

生成高斯随机变量。

1. 按照上述步骤，生成均值为零，方差为 $\sigma^2=2$ 的高斯随机变量的 10 000 个样本。
2. 将区间(−10，10)等间隔分成 20 份，统计样本$\{x_i\}$和$\{y_i\}$落在每个小区间的数目，并画出随机产生的这 10 000 个样本落在每个小区间的样本数目的直方图。将此直方图与概率密度函数 $f_X(x)$做比较，并评价直方图与 $f_X(x)$的吻合程度。

5.3　自相关函数和功率谱

本习题的目标是计算一个随机变量序列的自相关和功率谱。

1. 生成 $N=1000$，独立同分布(在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上均匀分布)的离散时间序列$\{x_n\}$。序列$\{x_n\}$的自相关估值定义为

$$\begin{aligned}R_X(m)&=\frac{1}{N-m}\sum_{n=1}^{N-m}x_nx_{n+m}\\ m&=0,1,\cdots,M\\ &=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=|m|}^{N}x_nx_{n+m}\\ m&=-1,-2,\cdots,-M\end{aligned}$$

其中 $M=100$。计算 $R_X(m)$并画图。

2. 通过计算 $R_X(m)$的离散傅里叶变换(DFT)，即

$$\boldsymbol{S}_X(f)=\sum_{m=-M}^{M}R_X(m)e^{-\frac{j2\pi fm}{2M+1}}$$

求并画出序列$\{x_n\}$的功率谱。可以利用 FFT 算法更有效地计算 DFT。

5.4　滤波后的白噪声

设 $X(t)$ 为白随机过程，对于所有的 f，$X(t)$ 的功率谱 $S_X(f)=1$。$X(t)$ 通过一个冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\geqslant 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

的线性滤波器。

1. 求并画出滤波器输出 $Y(t)$ 的功率谱 $S_Y(f)$。
2. 对 $S_Y(f)$ 进行抽样，然后利用逆 FFT 算法求得滤波器输出 $y(t)$ 的自相关函数，并作图。可以采用 $N=256$ 抽样点。

5.5 生成低通随机过程

本习题的目标是让一个白噪声序列 $\{x_n\}$ 通过数字低通滤波器，从而生成一个低通随机过程的样本。$\{x_n\}$ 是一个独立同分布（在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上均匀分布）的离散时间序列。数字低通滤波器的冲激响应为

$$h(n)=\begin{cases}(0.9)^n & n\geqslant 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

且输入-输出间的递归（差分）方程为

$$y_n=0.9y_{n-1}+x_n \quad n\geqslant 1, y_{-1}=0$$

1. 生成拥有 1000 样值的序列 $\{x_n\}$，并输入上述滤波器，得到输出序列 $\{y_n\}$。
2. 利用上机习题 5.3 中的公式，计算 $|m|\leqslant 100$ 条件下的自相关函数 $R_X(m)$ 和 $R_Y(m)$，并分别画出 $R_X(m)$ 和 $R_Y(m)$。
3. 通过计算 $R_X(m)$ 和 $R_Y(m)$ 的离散傅里叶变换，从而求得功率谱 $S_X(f)$ 和 $S_Y(f)$，并作图。

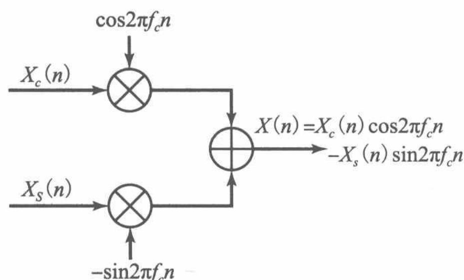
5.6 生成带通随机过程

带通随机过程 $X(t)$ 可表示成

$$X(t)=X_c(t)\cos(2\pi f_c t)-X_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

其中 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 分别称为 $X(t)$ 的同相分量和正交分量。随机过程 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 都是低通随机过程。

1. 如上机习题 5.6 图所示，首先由两个独立同分布的低通随机过程 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 各自生成 1000 个样值，然后再分别调制正交载波 $\cos(2\pi f_c t)$ 和 $\sin(2\pi f_c t)$，并最终得到带通随机过程 $X(t)$ 的 1000 样值。载频 $f_c=1000/\pi$。数字低通滤波器的输入序列是一个独立同分布（在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上均匀分布）的离散时间序列。



上机习题 5.6 图 带通随机过程的产生

2. 利用上机习题 5.3 中的公式，计算并画出在 $|m|\leqslant 100$ 条件下的自相关函数 $R_{X_c}(m)$，$R_{X_s}(m)$ 和 $R_X(m)$。
3. 通过计算 $R_{X_c}(m)$、$R_{X_s}(m)$ 和 $R_X(m)$ 的离散傅里叶变换，从而求得功率谱 $S_{X_c}(f)$，$S_{X_s}(f)$ 和 $S_X(f)$，并作图。

250~254

第6章

模拟通信系统中噪声的影响

在第3章和第4章已经学习了模拟通信系统的重要特征，包括已调信号的时域和频域表示、带宽需求、已调信号的功率，以及各种模拟通信系统的调制器、解调器的实现。

本章将分析噪声对各种模拟通信系统的影响。由于角度调制系统，特别是频率调制(FM)系统的抗噪性能卓越，所以经常在噪声干扰严重或者信号功率较低的情况下使用。然而，正如第4章所述，好的抗噪性能是以牺牲信道带宽为代价的，角度调制系统的带宽需求要比幅度调制(AM)的带宽需求高很多。

本章首先分析存在噪声干扰时线性调制系统的性能，然后讨论噪声对角度调制系统的影响，最后分析传输损耗和噪声对模拟通信系统的整体影响。

6.1 噪声对幅度调制系统的影响

本节将求解接收机对调幅信号进行解调时的输出信噪比(SNR)，评估噪声对各种已调信号的影响，然后将结果与噪声对等效的基带通信系统的影响作比较，这是一件很有意义的工作。下面首先评估噪声对基带系统的影响。

255

6.1.1 噪声对基带系统的影响

由于基带系统是对各种调制系统作比较的基准，因此首先对基带系统进行噪声分析。在此情形下，无需考虑载波解调的问题，接收机只有一个带宽为 W 的理想低通滤波器。所以，当输入为白噪声时，接收机的输出噪声功率为

$$P_{n_o} = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2} \mathrm{d}f = N_0 W \tag{6.1.1}$$

如果用 P_R 表示接收信号功率，则基带SNR为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 W} \tag{6.1.2}$$

例6.1.1 某基带系统，带宽为5kHz，$N_0 = 10^{-14}$ W/Hz，发送功率为1kW，信道衰减为 10^{-12}，求该系统的SNR。

解： 由已知可求接收信号功率 $P_R = 10^{-12} P_T = 10^{-12} \times 10^3 = 10^{-9}$ W。因此有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 W} = \frac{10^{-9}}{10^{-14} \times 5000} = 20$$

折算成dB，为 $10\log_{10} 20 = 13$dB。 ◀

6.1.2 噪声对DSB-SC调幅的影响

在DSB-SC调幅系统中，发射信号为

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \tag{6.1.3}$$

因此，接收机限噪滤波器输出的接收信号是已调信号与滤波后的噪声相叠加。回顾5.3.3节，滤波后的噪声过程可由其同相分量和正交分量表示，如式(5.3.7)所示。滤波后的噪声与已调信号相加，得接收信号为

$$\begin{aligned} r(t) &= u(t) + n(t) \\ &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

256

接下来，对此接收信号进行解调。首先将 $r(t)$ 与本地生成的正弦信号 $\cos(2\pi f_c t + \varphi)$ 相乘，

其中 φ 是正弦信号的初相。然后让乘积信号通过带宽为 W 的理想低通滤波器。$r(t)$ 与 $\cos(2\pi f_c t+\varphi)$ 的乘积为

$$\begin{aligned}r(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi) &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t+\varphi)+n(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi)\\&=\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\varphi)+\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(4\pi f_c t+\varphi)\\&\quad+\frac{1}{2}[n_c(t)\cos(\varphi)+n_s(t)\sin(\varphi)]\\&\quad+\frac{1}{2}[n_c(t)\cos(4\pi f_c t+\varphi)-n_s(t)\sin(4\pi f_c t+\varphi)]\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

低通滤波器滤除双倍频分量，只有低频分量通过。所以低通滤波器的输出为

$$y(t)=\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\varphi)+\frac{1}{2}[n_c(t)\cos(\varphi)+n_s(t)\sin(\varphi)]\tag{6.1.6}$$

第 3 章已经讨论过，由于接收信号的载波与接收机本地生成的载波存在相位差，会导致功率下降至无相位差时的 $\cos^2(\varphi)$ 倍。此问题可以通过锁相环(参见第 8 章)的方法解决。锁相环的作用是在接收端生成与接收信号的载波同频同相的正弦信号。锁相环可以使 $\varphi=0$，这样的解调器称为相干解调器或同步解调器。本节的分析都假设使用了相干解调器，即 $\varphi=0$，所以有

$$y(t)=\frac{1}{2}[A_c m(t)+n_c(t)]\tag{6.1.7}$$

因此，在接收机的输出端，信号和噪声是相加的，很容易计算 SNR。输出信号功率为

$$P_o=\frac{A_c^2}{4}P_M\tag{6.1.8}$$

其中 P_M 表示调制信号的功率。输出噪声功率为

$$P_{n_o}=\frac{1}{4}P_{n_c}=\frac{1}{4}P_n\tag{6.1.9}$$

上式利用了 $n_c(t)$ 和 $n(t)$ 的功率相同这一事实，参见 5.3.3 节中的式(5.3.9)。白噪声 $n_w(t)$ 通过带宽为 B_c 的滤波器，输出即为 $n(t)$。因此，$n(t)$ 的功率谱密度为

$$\boldsymbol{S}_n(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & |f-f_c|<W\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.1.10}$$

257

噪声功率为

$$P_n=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_n(f)\,\mathrm{d}f=\frac{N_0}{2}\times 4W=2WN_0\tag{6.1.11}$$

可得输出 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{P_o}{P_{n_o}}=\frac{\dfrac{A_c^2}{4}P_M}{\dfrac{1}{4}2WN_0}=\frac{A_c^2P_M}{2WN_0}\tag{6.1.12}$$

此情形下，参照式(3.2.2)，接收信号的功率 $P_R=\frac{A_c^2P_M}{2}$。因此，对于 DSB-SC AM，式(6.1.12)的信噪比也可表示为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{oDSB}}=\frac{P_R}{N_0W}\tag{6.1.13}$$

即与式(6.1.2)给出的 $(S/N)_b$ 相同。因此，在 DSB-SC 调幅系统的输出 SNR 与基带系统的 SNR 相同。换言之，与简单的基带通信系统相比，DSB-SC 调幅系统并没有带来 SNR 的任何改善。

6.1.3 噪声对 SSB 调幅的影响

在此情形下，由式(3.2.8)可知已调信号为

$$u(t)=A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\mp A_c\hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{6.1.14}$$

因此，解调器的输入为

$$\begin{aligned} r(t)&=A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\mp A_c\hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)+n(t)\\ &=[A_c m(t)+n_c(t)]\cos(2\pi f_c t)+[\mp A_c\hat{m}(t)-n_s(t)]\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

假设解调时具有理想参考相位，则低通滤波器的输出为上述信号的同相分量(系数为 $\frac{1}{2}$)，即

258

$$y(t)=\frac{A_c}{2}m(t)+\frac{1}{2}n_c(t) \tag{6.1.16}$$

可以看出，信号与噪声仍然是加性关系，所以输出 SNR 的计算与 DSB 系统的讨论类似，因此有

$$P_o=\frac{A_c^2}{4}P_M \tag{6.1.17}$$

和

$$P_{n_o}=\frac{1}{4}P_{n_c}=\frac{1}{4}P_n \tag{6.1.18}$$

其中

$$P_n=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_n(f)\mathrm{d}f=\frac{N_0}{2}\times 2W=WN_0 \tag{6.1.19}$$

因此有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{P_o}{P_{n_o}}=\frac{A_c^2 P_M}{WN_0} \tag{6.1.20}$$

但此时

$$P_R=P_U=A_c^2 P_M \tag{6.1.21}$$

所以有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{oSSB}}=\frac{P_R}{WN_0}=\left(\frac{S}{N}\right)_b \tag{6.1.22}$$

因此，SSB 系统的 SNR 与 DSB 系统的 SNR 相同。

6.1.4 噪声对常规调幅的影响

在常规调幅系统中，已调信号如式(3.2.6)所示，即

$$u(t)=A_c[1+am_n(t)]\cos(2\pi f_c t) \tag{6.1.23}$$

因此，解调器输入端的接收信号为

$$r(t)=\{A_c[1+am_n(t)]+n_c(t)\}\cos(2\pi f_c t)-n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{6.1.24}$$

其中 a 是调制指数，$m_n(t)$是归一化的，其最小值为−1。如果采用同步解调器，则情况与 DSB 的基本类似，区别只是用 $1+am_n(t)$代替了 $m(t)$。因此，在经过混频和低通滤波后，有

$$y_l(t)=\frac{1}{2}\{A_c[1+am_n(t)]+n_c(t)\} \tag{6.1.25}$$

然而，此时需要的信号是 $m(t)$，而非 $1+am_n(t)$。解调输出信号波形中的直流分量可以通过隔直电路除去。因此，低通滤波器的输出为

259

$$y(t)=\frac{1}{2}A_c am_n(t)+\frac{n_c(t)}{2} \tag{6.1.26}$$

这样，接收信号的功率为

$$P_R = \frac{A_c^2}{2}(1 + a^2 P_{M_n}) \tag{6.1.27}$$

上式假设调制信号是零均值的。现在可以求解输出 SNR 如下：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{oAM}} = \frac{\frac{1}{4}A_c^2 a^2 P_{M_n}}{\frac{1}{4}P_{n_c}} = \frac{A_c^2 a^2 P_{M_n}}{2N_0 W} = \frac{a^2 P_{M_n}}{1 + a^2 P_{M_n}} \frac{\frac{A_c^2}{2}(1 + a^2 P_{M_n})}{N_0 W}$$

$$= \frac{a^2 P_{M_n}}{1 + a^2 P_{M_n}} \frac{P_R}{N_0 W} = \frac{a^2 P_{M_n}}{1 + a^2 P_{M_n}} \left(\frac{S}{N}\right)_b = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_b \tag{6.1.28}$$

上式利用了式(6.1.2)，η 表示调制效率。

可见，由于 $a^2 P_{M_n} < 1 + a^2 P_{M_n}$，常规调幅的 SNR 总是小于基带系统的 SNR。在实际应用中，调制指数 a 的范围在 0.8～0.9 之间。归一化信号过程的功率取决于信源。语音信号通常具有较大的动态范围，P_{M_n} 取值在 0.1 左右。这意味着，调制效率仅为 0.075。相对于基带系统，SNR 的总损失达 11dB。如此大损耗的原因在于发送功率中的很大一部分是用于发送已调信号中的载波分量，而非边带分量。

为了分析有噪情形下的包络检波器的性能，必须进行某些近似处理。这是因为包络检波器的非线性结构给精确分析带来巨大困难。在有噪情形下，解调器检测到的是信号和噪声叠加后的包络。包络检波器的输入为

$$r(t) = \{A_c[1 + am_n(t)] + n_c(t)\}\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{6.1.29}$$

因此，$r(t)$ 的包络为

$$V_r(t) = \sqrt{\{A_c[1 + am_n(t)] + n_c(t)\}^2 + n_s^2(t)} \tag{6.1.30}$$

260

若 $r(t)$ 中的信号分量远远大于噪声分量，则有

$$P\{n_c(t) \ll A_c[1 + am_n(t)]\} \approx 1 \tag{6.1.31}$$

因此

$$V_r(t) \approx A_c[1 + am_n(t)] + n_c(t) \tag{6.1.32}$$

以大概率成立。在移除直流分量后，得

$$y(t) = A_c am_n(t) + n_c(t) \tag{6.1.33}$$

上式中的 $y(t)$ 与同步解调的 $y(t)$ 基本相同，只是没有系数 1/2。当然，此系数对于最终的 SNR 没有任何影响。因此，可以得出结论：在接收机输入端是大信噪比的条件下，同步解调和包络解调的性能是一样的。然而，如果上述条件无法得到满足，使用同步解调方式，在解调器的输出端依然可以得到信号和噪声的叠加形式；但使用包络解调方式，则信号和噪声是混合在一起的。为了更好地了解这一点，不妨设接收机输入端的噪声功率[⊖]远大于信号功率。这意味着

$$\begin{aligned} V_r(t) &= \sqrt{[A_c[1 + am_n(t)] + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \\ &= \sqrt{A_c^2(1 + am_n(t))^2 + n_c^2(t) + n_s^2(t) + 2A_c n_c(t)(1 + am_n(t))} \\ &\overset{a}{\approx} \sqrt{(n_c^2(t) + n_s^2(t))\left[1 + \frac{2A_c n_c(t)}{n_c^2(t) + n_s^2(t)}(1 + am_n(t))\right]} \\ &\overset{b}{\approx} V_n(t)\left[1 + \frac{A_c n_c(t)}{V_n^2(t)}(1 + am_n(t))\right] \\ &= V_n(t) + \frac{A_c n_c(t)}{V_n^2(t)}(1 + am_n(t)) \end{aligned} \tag{6.1.34}$$

⊖ 所谓接收机输入端的噪声功率是指已调信号带宽范围内的噪声功率，或者说是限噪滤波器输出的噪声功率。

上式中：(a)利用了$A_c^2[1+am_n(t)]^2$与其他项相比很小这一事实；(b)用$V_n(t)$表示噪声过程的包络$\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)}$，还利用了当ε很小时的近似式$\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$，其中

$$\varepsilon=\frac{2A_c n_c(t)}{n_c^2(t)+n_s^2(t)}[1+am_n(t)] \tag{6.1.35}$$

可以看出，在解调器的输出端，信号分量和噪声分量不再是简单的叠加关系。实际上，信号分量与噪声分量两者相乘，不可区分。这样，定义SNR不再有意义，且称此时的系统工作在门限之下。在讨论角度调制的噪声性能时，将会具体讲述门限效应及其对通信系统性能的影响。

261

例6.1.2 某调制信号$M(t)$是广义平稳随机过程，自相关函数为

$$R_M(\tau)=16\text{sinc}^2(10\,000\tau)$$

已知$M(t)$的所有样本都满足最大幅度$\max|m(t)|=6$，信号通过衰减为50dB的信道传输，加性白噪声的功率谱为$S_n(f)=\frac{N_0}{2}=10^{-12}$W/Hz。要求调制器输出端的最低SNR为50dB，求以下三种调制方法各自所需的发射功率和信道带宽：

1. DSB调幅；
2. SSB调幅；
3. 调制指数为0.8的常规调幅。

解： 首先，求调制信号$M(t)$的带宽。只需求得调制信号的功率谱，即

$$S_M(f)=\mathscr{F}[R_M(\tau)]=\frac{16}{10\,000}\Lambda\left(\frac{f}{10\,000}\right)$$

当$-10\,000<f<10\,000$时，上式不为零，因此$W=10\,000$Hz。现在求比较基准$\left(\frac{S}{N}\right)_b$，即

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b=\frac{P_R}{N_0W}=\frac{P_R}{2\times10^{-12}\times10^4}=\frac{10^8P_R}{2}$$

由于信道衰减为50dB，即

$$10\log\frac{P_T}{P_R}=50$$

解得

$$P_R=10^{-5}P_T$$

因此有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b=\frac{10^{-5}\times10^8P_T}{2}=\frac{10^3P_T}{2}$$

1. 对于DSB-SC调幅，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\left(\frac{S}{N}\right)_b=\frac{10^3P_T}{2}\sim 50\text{dB}=10^5$$

因此有

$$\frac{10^3P_T}{2}=10^5\Rightarrow P_T=200\text{W}$$

其信号带宽为

262

$$\text{BW}=2W=2\times10\,000=20\,000\text{Hz}\approx20\text{kHz}$$

2. 对于SSB调幅，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\left(\frac{S}{N}\right)_b=\frac{10^3P_T}{2}=10^5\Rightarrow P_T=200\text{W}$$

信号带宽为

$$\text{BW}=W=10\,000\text{Hz}=10\text{kHz}$$

3. 对于$a=0.8$的常规调幅，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\eta\left(\frac{S}{N}\right)_b=\eta\frac{10^3P_T}{2}$$

其中 η 是调制效率，且

$$\eta=\frac{a^2P_{M_n}}{1+a^2P_{M_n}}$$

首先，求归一化信号的功率 P_{M_n}。由 $\max|m(t)|=6$，得

$$P_{M_n}=\frac{P_M}{(\max|m(t)|)^2}=\frac{P_M}{36}$$

由于

$$P_M=R_M(\tau)\big|_{\tau=0}=16$$

所以有

$$P_{M_n}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

因此有

$$\eta=\frac{0.8^2\times\frac{4}{9}}{1+0.8^2\times\frac{4}{9}}\approx 0.22$$

可得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o\approx 0.22\,\frac{10^3P_T}{2}=0.11\times 10^3P_T=10^5$$

或者

$$P_T\approx 909\text{W}$$

常规调幅的带宽与 DSB 调幅的带宽相同，即

$$\text{BW}=2W=20\text{kHz}$$

◀

6.2 噪声对角度调制系统的影响

本节主要研究加性高斯白噪声干扰下的角度调制信号的性能，并与幅度调制信号做比较。对于幅度调制，信息蕴含在已调信号的幅度中，由于噪声是加性的，直接与信号叠加；但是对于频率调制，信息蕴含在已调信号的频率中，而噪声仍然叠加在已调信号的幅度上。因此，只有在叠加的噪声大到可以干扰已调信号的频率时，才会对信号产生实质损害。信号的频率可以描述成单位时间过零次数，因此，加性噪声对解调 FM 信号的影响体现在改变已调 FM 信号的单位时间过零次数。图 6-1 展示了加性噪声对两个 FM 信号的单位时间过零次数的影响，其中一个是大功率信号，另一个是小功率信号。基于前面的讨论以及图 6-1，可明确地感受到，噪声对 FM 系统的影响不同于对 AM 系统的影响，而且对小功率 FM 系统的影响比对大功率 FM 系统的影响严重得多。对于小功率信号，噪声会导致更多过零次数的改变。本章的分析将会证实对这些现象的直觉判断。

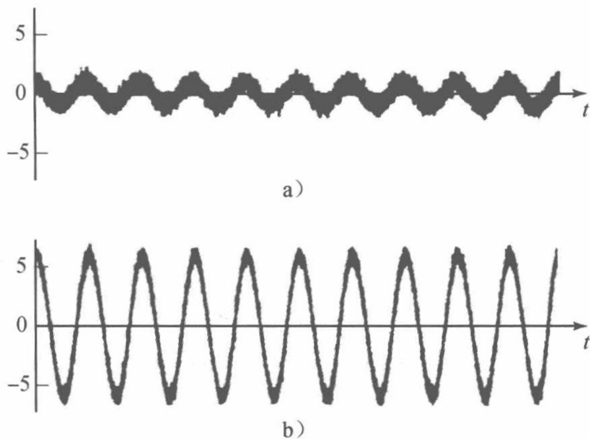


图 6-1 噪声对频率调制的影响

[263]

调角信号的通用接收机框图如图 6-2 所示。调角信号可以表示成⊖

⊖ 在整个噪声分析中，当涉及已调信号时，通常是指接收机接收到的信号。因此，信号功率是指接收信号功率，而不是发射功率。

264

$$u(t)=A_c\cos[2\pi f_c t+\varphi(t)]=\begin{cases}A_c\cos[2\pi f_c t+2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau] & \text{FM}\\ A_c\cos[2\pi f_c t+k_p m(t)] & \text{PM}\end{cases} \quad (6.2.1)$$

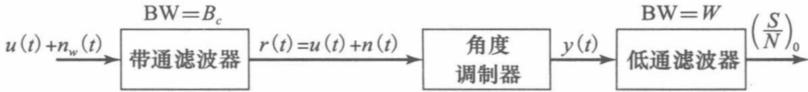


图 6-2 角度解调器的框图

加性高斯白噪声 $n_w(t)$ 与已调信号 $u(t)$ 相加后通过限噪滤波器滤除带外噪声。此滤波器的带宽与已调信号的带宽相等，因此可以使已调信号无失真地通过。然而，它滤除了带外噪声，则滤波器的输出噪声是滤波后的噪声过程，记作 $n(t)$。限噪滤波器的输出为

$$r(t)=u(t)+n(t)=u(t)+n_c(t)\cos(2\pi f_c t)-n_s(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (6.2.2)$$

与常规调幅噪声性能的分析过程相同，由于解调过程的非线性，进行精确分析非常困难。不妨设信号功率远大于噪声功率。于是，参考式(5.3.8)，带通噪声可表示为

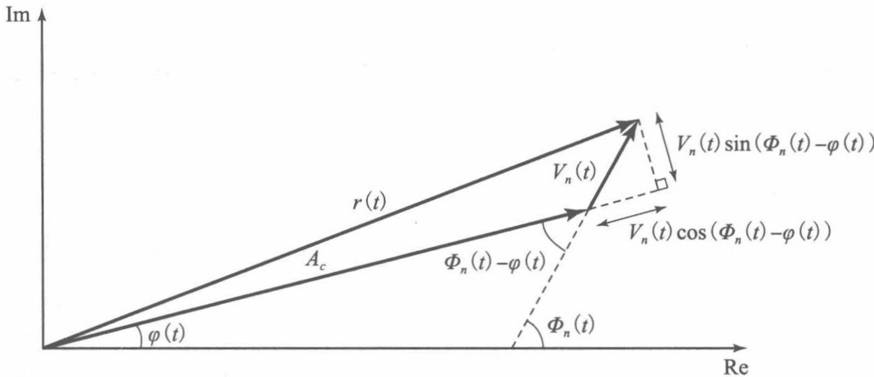
$$n(t)=\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)}\cos\left[2\pi f_c t+\arctan\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right]=V_n(t)\cos[2\pi f_c t+\Phi_n(t)] \quad (6.2.3)$$

其中 $V_n(t)$ 和 $\Phi_n(t)$ 分别表示带通噪声过程的包络和相位。假设信号远大于噪声，这意味着

$$P[V_n(t)\ll A_c]\approx 1 \quad (6.2.4)$$

因此，信号和噪声的相量图如图 6-3 所示。根据此图，易得

$$\begin{aligned}r(t)&\approx\{A_c+V_n(t)\cos[\Phi_n(t)-\varphi(t)]\}\\&\quad\times\cos\left\{2\pi f_c t+\varphi(t)+\arctan\frac{V_n(t)\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)]}{A_c+V_n(t)\cos[\Phi_n(t)-\varphi(t)]}\right\}\\&\approx\{A_c+V_n(t)\cos[\Phi_n(t)-\varphi(t)]\}\\&\quad\times\cos\left\{2\pi f_c t+\varphi(t)+\frac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)]\right\}\end{aligned} \quad (6.2.5)$$



265

图 6-3 当信号远大于噪声时的调角信号的相位图

解调器对此信号进行处理，并且根据该解调器是相位解调器还是频率解调器来确定解调器的输出是 $r(t)$ 的相位还是瞬时频率（瞬时频率是相位的导数再除以 2π）⊖。因此，根据

⊖ 当然，对于 FM 系统，解调器的输出是 $u(t)$ 相对于载频 f_c 的瞬时频率偏移。

$$\varphi(t)=\begin{cases}k_p m(t) & \text{PM}\\ 2\pi k_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)\mathrm{d}\tau & \text{FM}\end{cases} \tag{6.2.6}$$

可得解调器的输出为

$$\begin{aligned}y(t)&=\begin{cases}\varphi(t)+\dfrac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)] & \text{PM}\\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\varphi(t)+\dfrac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)]\right\} & \text{FM}\end{cases}\\ &=\begin{cases}k_p m(t)+\dfrac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)] & \text{PM}\\ k_f m(t)+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\dfrac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)]\right\} & \text{FM}\end{cases}\\ &=\begin{cases}k_p m(t)+Y_n(t) & \text{PM}\\ k_f m(t)+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y_n(t) & \text{FM}\end{cases}\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

其中，定义

$$Y_n(t)\overset{\text{def}}{=}\frac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)] \tag{6.2.8}$$

式(6.2.7)的第一项是信号分量，第二项是噪声分量。从上述表达式可以看出，噪声分量与信号幅度 A_c 成反比。因而信号电平越高，噪声电平越低。这与本节开始处根据图 6-1 做出的直觉判断一致。注意，这与幅度调制的情形并不相同。在 AM 系统中，噪声与信号是相互独立的，信号功率的增减并不影响噪声功率。

266

下面着重研究噪声分量，有

$$\begin{aligned}Y_n(t)&=\frac{V_n(t)}{A_c}\sin[\Phi_n(t)-\varphi(t)]=\frac{1}{A_c}[V_n(t)\sin\Phi_n(t)\cos\varphi(t)-V_n(t)\cos\Phi_n(t)\sin\varphi(t)]\\ &=\frac{1}{A_c}[n_s(t)\cos\varphi(t)-n_c(t)\sin\varphi(t)]\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

这里介绍一种计算解调信号信噪比的近似且直观的方法。更严密的推导请参见本章小结列出的参考文献。

注意，$\varphi(t)$要么与调制信号成正比，要么与调制信号的积分成正比。在这两种情形中，$\varphi(t)$的变化要比 $n_c(t)$和 $n_s(t)$缓慢得多，其中 $n_c(t)$和 $n_s(t)$分别是在接收机处的带通噪声过程的同相分量和正交分量，且它们的带宽都远大于 $\varphi(t)$。实际上，解调器输入端的滤波后噪声的带宽与已调信号的带宽相同，而已调信号的带宽可以是调制信号带宽的数倍。因此，相对于 $n_c(t)$和 $n_s(t)$，可以认为 $\varphi(t)$基本保持不变，即 $\varphi(t)\approx\varphi$。因此有

$$Y_n(t)=\frac{1}{A_c}[n_s(t)\cos\varphi-n_c(t)\sin\varphi] \tag{6.2.10}$$

注意，此时 f_c 是带通噪声过程的对称轴。因此，满足例 5.3.3 的结果所需的条件，其中 $a=\dfrac{\cos\varphi}{A_c}$，$b=\dfrac{-\sin\varphi}{A_c}$。利用例 5.3.3 的结果，可得

$$\boldsymbol{S}_{Y_n}(f)=(a^2+b^2)\boldsymbol{S}_{n_c}(f)=\frac{\boldsymbol{S}_{n_c}(f)}{A_c^2} \tag{6.2.11}$$

其中 $\boldsymbol{S}_{n_c}(f)$是由式(5.3.10)给出的滤波后噪声的同相分量的功率谱密度。注意，滤波后噪声的频谱范围是从 $f_c-\dfrac{B_c}{2}$到 $f_c+\dfrac{B_c}{2}$，所以 $n_c(t)$的频谱范围是从$-\dfrac{B_c}{2}$到$+\dfrac{B_c}{2}$。因此有

$$\boldsymbol{S}_{X_{1c}}(f)=\boldsymbol{S}_{X_{1s}}(f)=\begin{cases}N_0 & |f|\leqslant\dfrac{B_c}{2}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.2.12}$$

将式(6.2.12)代入式(6.2.10)，得

$$\boldsymbol{S}_{Y_n}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{A_c^2} & |f|\leqslant\dfrac{B_c}{2}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.2.13}$$

上式就是位于接收机前端的滤波后噪声的功率谱密度表达式。解调之后，还要经过一级滤波，使噪声带宽进一步降至与调制信号相同的带宽 W。注意，在 FM 情形中，如式(6.2.7)所示，过程 $Y_n(t)$ 先微分，再除以 2π。第 5 章的式(5.2.25)可用于计算某个过程的微分的功率谱密度，利用该式可以求得 $\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y_n(t)$ 的功率谱密度为

267

$$\frac{4\pi^2f^2}{4\pi^2}\boldsymbol{S}_{Y_n}(f)=f^2\boldsymbol{S}_{Y_n}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{A_c^2}f^2 & |f|\leqslant\dfrac{B_c}{2}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.2.14}$$

这表明，PM 的解调输出噪声功率谱密度由式(6.2.13)给定；而 FM 的解调输出功率谱密度由式(6.2.14)给定。两种情形都需要用 W 取代 $\frac{B_c}{2}$，这是解调器后端滤波器的作用结果。换言之，对于 $|f|<W$，得

$$\boldsymbol{S}_{n_o}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{A_c^2} & \text{PM}\\\dfrac{N_0}{A_c^2}f^2 & \text{FM}\end{cases}\tag{6.2.15}$$

这就是 PM 和 FM 在频率范围 $|f|<W$ 内的解调输出噪声功率谱，如图 6-4 所示。

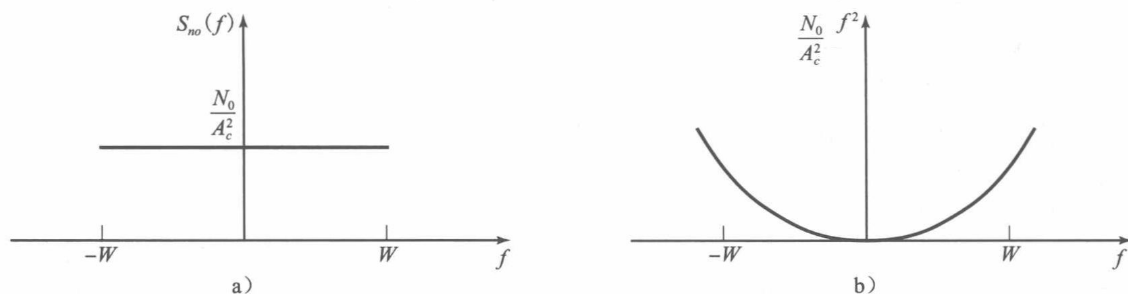


图 6-4 解调输出噪声功率谱($|f|<W$)：a)PM；b)FM

有趣的是，PM 具有平坦的噪声功率谱，而 FM 具有抛物线形的噪声功率谱。因此，噪声对信号高频部分的影响要远大于对信号低频部分的影响。低通滤波器输出的噪声功率就是在频率范围[$-W$，$+W$]内的噪声功率，即

268

$$P_{n_o}=\int_{-W}^{W}\boldsymbol{S}_{n_o}(f)\mathrm{d}f=\begin{cases}\displaystyle\int_{-W}^{W}\frac{N_0}{A_c^2}\mathrm{d}f\\\displaystyle\int_{-W}^{W}\frac{N_0}{A_c^2}f^2\mathrm{d}f\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2N_0W}{A_c^2} & \text{PM}\\\dfrac{2N_0W^3}{3A_c^2} & \text{FM}\end{cases}\tag{6.2.16}$$

现在可以利用式(6.2.7)来求角度调制的输出信噪比。首先，输出信号功率为

$$P_{s_o}=\begin{cases}k_p^2P_M & \text{PM}\\k_f^2P_M & \text{FM}\end{cases}\tag{6.2.17}$$

根据输出信噪比的定义

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{s_o}}{P_{n_o}}$$

整理得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \dfrac{k_p^2 A_c^2}{2} \dfrac{P_M}{N_0 W} & \text{PM} \\ \dfrac{3k_f^2 A_c^2}{2W^2} \dfrac{P_M}{N_0 W} & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.18}$$

由于接收信号功率 $P_R = \dfrac{A_c^2}{2}$，且

$$\begin{cases} \beta_p = k_p \max|m(t)| & \text{PM} \\ \beta_f = \dfrac{k_f \max|m(t)|}{W} & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.19}$$

输出信噪比可以表示为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left[\dfrac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right]^2 \dfrac{P_M}{N_0 W} & \text{PM} \\ 3P_R \left[\dfrac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right]^2 \dfrac{P_M}{N_0 W} & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.20}$$

若将相同接收信号功率条件下的基带系统信噪比$\dfrac{P_R}{N_0 W}$记作$\left(\dfrac{S}{N}\right)_b$，得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \dfrac{P_M \beta_p^2}{[\max|m(t)|]^2} \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{PM} \\ 3\dfrac{P_M \beta_f^2}{[\max|m(t)|]^2} \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.21}$$

269

注意，上式中的$\dfrac{P_M}{[\max|m(t)|]^2}$是调制信号的均峰功率比（等价于归一化信号的功率 P_{M_n}）。因此有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \beta_p^2 P_{M_n} \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{PM} \\ 3\beta_f^2 P_{M_n} \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.22}$$

现在，根据卡森公式 $B_c = 2(\beta+1)W$，可以用带宽展宽因子来表示输出 SNR。带宽展宽因子定义为信道带宽与调制信号带宽之比，记作 Ω，即

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B_c}{W} = 2(\beta+1) \tag{6.2.23}$$

则 $\beta = \dfrac{\Omega}{2} - 1$。因此有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_M \left[\dfrac{\dfrac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right]^2 \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{PM} \\ 3P_M \left[\dfrac{\dfrac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right]^2 \left(\dfrac{S}{N}\right)_b & \text{FM} \end{cases} \tag{6.2.24}$$

由式(6.2.20)和式(6.2.24)，可以看出：

1. 在 PM 和 FM 系统中，输出 SNR 都与调制指数 β 的平方成正比。因此，即便接收功率很低，只要 β 增加，输出 SNR 也会增加。这显然不同于 AM 系统，在 AM 系统中无法采用这种方法来提高 SNR。

2. 增加带宽可以增加输出 SNR。因此，角度调制提供了一种在带宽与发射功率之间进行折中的方法。

3. 输出 SNR 与带宽展宽因子 Ω 之间是二次方的关系，这与最佳关系[⊖]相差甚远。信息论关于通信系统性能的分析表明，输出 SNR 与带宽展宽因子之间的最佳关系是指数关系。

4. 尽管可以通过增加 β 来增加输出 SNR，但是(根据卡森公式)较大的 β 意味着需要较大的带宽 B_c，而较大的 B_c 意味着解调器输入端具有较大的噪声功率，近似关系 $P[V_n(t)\ll A_c]\approx 1$ 将不再适用，上述讨论也将不再成立。实际上，当 β 的增加导致上述近似关系失效时，就会出现门限效应，信号将会淹没于噪声之中。这说明，虽然可以通过增加 β 来提高系统的性能，但此方法不能无限制地进行。一旦 β 超过某数值，再增加 β 只会恶化系统的性能。

270

5. 将上述结果与幅度调制中的 SNR 做比较可以发现，在两种情形下，增加发射功率(从而增加接收功率)都会提高输出 SNR，但两者的机制并不相同。在 AM 系统中，接收功率的任何提升都会直接增加解调器输出信号的功率。这主要是因为信息蕴含在已调信号的幅度中，增加发射功率会直接影响解调输出信号的功率。但是，在角度调制中，信息蕴含在已调信号的相位中，故提高发射功率并不会增加解调输出信号的功率。从式(6.2.16)和图 6-1 中可以看出，在角度调制中，输出 SNR 的增加是通过降低输出噪声功率的方法来实现的。

6. 在 FM 系统中，噪声对信号高频部分的影响更大。这意味着信号高频部分受到噪声干扰的程度要比低频部分严重得多。在一些用于传送 SSB-FDM 信号的 FM 应用中，调制在较高载频段的信道将承受更多的噪声干扰。为了弥补这种影响，这些信道必须具备较高的信号电平。FM 中输出噪声谱的二次方特性是预/去加重滤波的基础，稍后本章将详细讨论预/去加重技术。

例 6.2.1 在调制系数 $\beta=5$ 的 FM 系统中，如果 $W=15\text{kHz}$，$N_0=10^{-14}\,\text{W/Hz}$，归一化调制信号功率为 0.1W，若要求解调输出 SNR 为 60dB，求接收功率。

解：由于

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta^2 P_{M_n}\frac{P_R}{N_0 W}$$

且 $\left(\frac{S}{N}\right)_o=10^6$，$\beta=5$，$P_{M_n}=0.1$，$N_0=10^{-14}$，$W=15\,000$，可得 $P_R=2\times10^{-5}\,\text{W}=20\mu\text{W}$。◀

6.2.1 角度调制的门限效应

角度调制的噪声分析方案是建立在解调器的高输入信噪比假设之上的。有了这个重要假设，就可以认为解调器输出端的信号分量和噪声分量是叠加关系，从而能够展开分析。这种高信噪比假设是在分析非线性调制系统时常用的一种简化假设。由于解调过程的非线性特性，信号分量与噪声分量在解调器输入端的叠加关系并不能延续至解调器的输出端。实际上，这种假设通常并不正确。解调器输出端的信号过程和噪声过程通过复杂的非线性函数完全混合成一个过程。只有在高 SNR 的假设下，这种高度非线性函数才可以用相加的形式近似表达。对于低信噪比的情形，信号分量与噪声分量混合在一起，无法区分彼此，再用 SNR 作为性能指标就没有意义了。

271

在此情形下，无法从噪声中识别出信号，即出现了毁损或者门限效应。存在某个特定的 SNR，即门限 SNR，当解调器输入端的 SNR 低于此门限时就会出现信号毁损现象。门

⊖ 所谓最佳关系，是指在给定的带宽展宽条件下，可以使发射功率得到最大程度地节省。最佳系统可以达到由信息论推得的通信系统的极限。

限效应的存在为 FM 系统中带宽与功率之间的折中设置了上限，此限制即为调制指数 β_f 的实际限制值。分析门限效应以及推导调制指数 β_f 的门限值需要涉及非常多的知识，已经超出了本书的范畴。本章小结列出的参考文献中有关于这方面内容的分析。在此，仅简单给出 FM 中门限效应的一些结果。

可以证明，当 FM 系统处于门限时，$\frac{P_R}{N_0 W}=\left(\frac{S}{N}\right)_b$ 与 β_f 之间的关系满足近似式：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{b,\mathrm{th}}=20(\beta_f+1) \tag{6.2.25}$$

利用上式，只要给定接收功率 P_R，就可以计算出保证系统工作在门限以上的最大允许 β 值。而且，只要给定分配带宽 B_c，就可以利用卡森公式 $B_c=2(\beta+1)W$ 求出合适的 β 值。然后，根据上面的门限关系，就可以确定使整个分配带宽都可用而所需的最小接收功率。

通常有两个因素限制了调制指数 β 的取值。第一个是信道带宽的限制。由卡森公式可知，信道带宽会影响 β。第二个就是接收功率的限制，要求 β 要小于由式(6.2.25)求得的数值。FM 系统中输出 SNR 与基带 SNR 之间的函数关系曲线如图 6-5 所示。所有曲线中的输出 SNR 都以 dB 为单位，不同的曲线对应不同的 β 值，如图中标注所示。输出 SNR 的突然急剧下降意味着门限效应开始显现。所有曲线都是在正弦信号满足

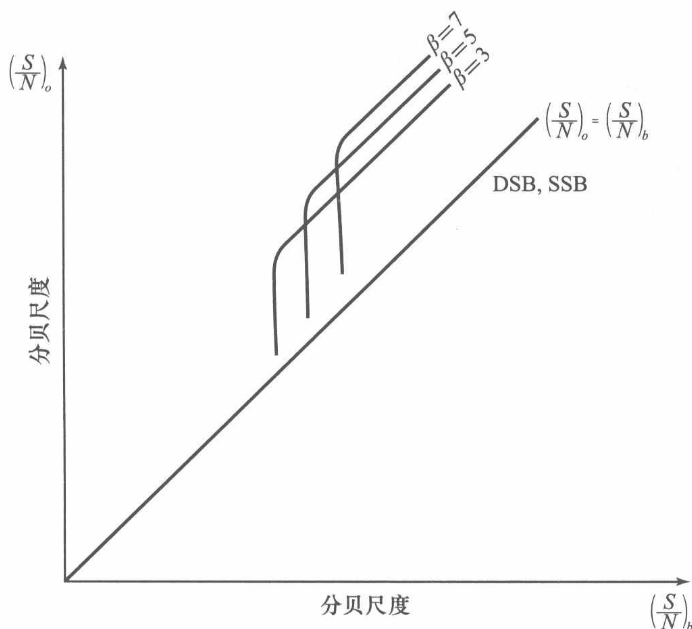


图 6-5　FM 系统不同 β 值下输出 SNR 与基带 SNR 的函数关系

$$\frac{P_M}{[\max|m(t)|]^2}=\frac{1}{2} \tag{6.2.26}$$

的条件下画出的。此时有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{3}{2}\beta^2\left(\frac{S}{N}\right)_b \tag{6.2.27}$$

例如，当 $\beta=5$ 时，代入上式得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o}\Big|_{\mathrm{dB}}=15.7+\left(\frac{S}{N}\right)_{b}\Big|_{\mathrm{dB}} \tag{6.2.28}$$

和

272

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{b,\mathrm{th}}=120\approx 20.8\mathrm{dB} \tag{6.2.29}$$

而当 $\beta=2$ 时，则有

$$\left.\left(\frac{S}{N}\right)_{o}\right|_{\mathrm{dB}}=7.8+\left.\left(\frac{S}{N}\right)_{b}\right|_{\mathrm{dB}} \tag{6.2.30}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{b,\mathrm{th}}=60\approx 17.8\mathrm{dB} \tag{6.2.31}$$

显然，如果 $\left(\frac{S}{N}\right)_{b}=20\mathrm{dB}$。则无论可用带宽是多少，系统都不能使用 $\beta=5$，因为这样会使系统工作在门限之下。但系统可以使用 $\beta=2$，这时输出 SNR 为 27.8dB，与基带系统相比，获得 7.8dB 的增益。

总的说来，如果想使可用带宽最大，则必须在保证系统工作在门限之上的条件下使 β 值尽可能的大，即 β 应满足

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{b,\mathrm{th}}=20(\beta+1) \tag{6.2.32}$$

将上式代入式(6.2.22)，得

273

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o}=60\beta^{2}(\beta+1)P_{M_{n}} \tag{6.2.33}$$

上式即给出了期望的输出 SNR 与实现 SNR 的最大可能 β 值之间的关系。

例 6.2.2 设计一个 FM 系统，要求接收机的输出信噪比为 40dB，并且发射功率最小。已知，信道带宽为 120kHz，调制信号带宽为 10kHz，调制信号的均峰功率比，即 $P_{M_n}=\frac{P_M}{[\max|m(t)|]^2}=\frac{1}{2}$，(单边)噪声功率谱密度 $N_0=10^{-8}\,\mathrm{W/Hz}$。如果信道传输损耗为 40dB，求所需的发射功率。

解： 首先，需要根据门限或者带宽判断调制指数是否在更加严格的限制范围内。利用卡森公式，有

$$B_c=2(\beta+1)W$$

$$120\,000=2(\beta+1)\times 10\,000$$

可求得 $\beta=5$。利用

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o}=60\beta^{2}(\beta+1)P_{M_{n}} \tag{6.2.34}$$

将 $\left(\frac{S}{N}\right)_{o}=10^4$ 代入上式，得 $\beta\approx 6.6$。因此受带宽限制得到的 β 值小于受功率限制得到的 β 值，所以该系统受到带宽限制(不同于功率受限)。因此选择 $\beta=5$，代入下式

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o}=\frac{3}{2}\beta^{2}\left(\frac{S}{N}\right)_{b} \tag{6.2.35}$$

得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o}=\frac{800}{3}=266.6\approx 24.26\mathrm{dB} \tag{6.2.36}$$

将 $W=10\,000$ 和 $N_0=10^{-8}$ 代入 $\left(\frac{S}{N}\right)_{b}=\frac{P_R}{N_0W}$，得

$$P_R=\frac{8}{300}=0.0266\approx -15.74\mathrm{dB} \tag{6.2.37}$$

所以有

$$P_T=-15.74+40=24.26\mathrm{dB}\approx 266.66\mathrm{W} \tag{6.2.38}$$

如果没有带宽限制，可以选择 $\beta=6.6$，从而有 $\left(\frac{S}{N}\right)_{b}\approx 153$，依次可求得 $P_R\approx 0.0153\mathrm{W}$ 和 $P_T\approx 153\mathrm{W}$。◀

6.2.2 FM 的预加重和去加重滤波

如图 6-4 所示，FM 解调器的输出噪声功率谱密度在调制信号频带范围内呈抛物线形，

原因在于 FM 解调过程中使用了微分器，结果使得调制信号的高频部分承受更强的噪声干扰。

为了弥补噪声功率在信号高频部分呈平方级的增加所造成的影响，可以在发射端进行 FM 调制之前先强化调制信号的高频部分，使这些频率成分以较高的功率发射。通过在发射端设置一个称为预加重滤波器的高通滤波器可以轻易地完成上述操作。因此，解调器输出端的大噪声功率谱密度对调制信号高频部分造成的影响能够得到缓解。 274

由于预先在发射端对调制信号的高频部分进行了强化，因此需要将解调输出的调制信号恢复原形。这可以通过预加重的反向操作，即让解调输出通过一个称为去加重滤波器的低通滤波器。因此，预加重滤波器和去加重滤波器在调制信号频率范围内具有互为倒数的频率响应特性，如图 6-6 所示。

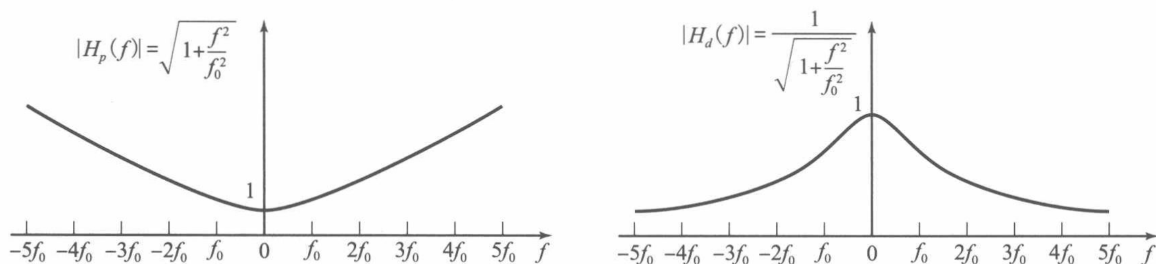


图 6-6 预加重滤波器和去加重滤波器的特性

预加重和去加重滤波器的特性在很大程度上依赖于信号过程的功率谱密度。在商用的音乐和话音 FM 广播采用时间常数为 75μs 的一阶低通和高通 RC 滤波器。此时，接收机(去加重)滤波器的频率响应为

$$H_d(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{f}{f_0}} \tag{6.2.39}$$

其中 $f_0=\dfrac{1}{2\pi\times75\times10^{-6}}\approx2100\mathrm{Hz}$ 是滤波器的 3dB 频率。

下面分析预加重和去加重滤波对 FM 广播系统中整个信噪比的影响。注意，由于发射机和接收机滤波器的作用相互抵消，故接收信号的功率保持不变，所以只需考虑滤波对噪声的影响。当然，只有接收机滤波器对噪声产生影响，它会改变调制信号频率范围内的噪声功率谱密度的形状。在滤波之前，噪声分量具有抛物线形的功率谱。经过去加重滤波之后的噪声的功率谱密度为 275

$$\boldsymbol{S}_{n_{\mathrm{PD}}}(f)=S_{n_o}(f)\,|H_d(f)|^2=\frac{N_0}{A_c^2}f^2\,\frac{1}{1+\dfrac{f^2}{f_0^2}} \tag{6.2.40}$$

上式利用了式(6.2.15)的内容。进一步求得解调器输出的噪声功率为

$$P_{n_{\mathrm{PD}}}=\int_{-W}^{W}S_{n_{\mathrm{PD}}}(f)\,\mathrm{d}f=\frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W}\frac{f^2}{1+\dfrac{f^2}{f_0^2}}\mathrm{d}f=\frac{2N_0f_0^3}{A_c^2}\left[\frac{W}{f_0}-\arctan\frac{W}{f_0}\right] \tag{6.2.41}$$

由于此时的解调输出信号功率与没有经过预/去加重滤波处理的简单 FM 系统所得的信号功率相等，所以这两种情形下的输出 SNR 之比与噪声功率之比成反比，即

$$\frac{\left(\dfrac{S}{N}\right)_{o_{\mathrm{PD}}}}{\left(\dfrac{S}{N}\right)_o}=\frac{P_{n_o}}{P_{n_{\mathrm{PD}}}}=\frac{\dfrac{2N_0W^3}{3A_c^2}}{\dfrac{2N_0f^3}{A_c^2}\left[\dfrac{W}{f_0}-\arctan\dfrac{W}{f_0}\right]}=\frac{1}{3}\,\frac{\left(\dfrac{W}{f_0}\right)^3}{\dfrac{W}{f_0}-\arctan\dfrac{W}{f_0}} \tag{6.2.42}$$

上式利用了式(6.2.16)的内容。因此，式(6.2.42)给出了采用预/去加重滤波技术所获得的增益。

例 6.2.3 某商用 FM 广播系统，$W=15\text{kHz}$，$f_0=2100\text{Hz}$，$\beta=5$。设调制信号的均峰功率比为 0.5，求采用预/去加重滤波技术后相对于基带调制系统的增益。

276

解： 由式(6.2.22)，得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=3\times5^2\times0.5\times\left(\frac{S}{N}\right)_b=37.5\left(\frac{S}{N}\right)_b\approx15.7+\left(\frac{S}{N}\right)_b\Big|_{\text{dB}}\tag{6.2.43}$$

因此，没有采用预/去加重滤波技术的 FM 系统的性能较基带系统的性能提升了 15.7dB。而采用预/去加重技术的 FM 系统有

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{N}\right)_{o_{\text{PD}}}&=\frac{1}{3}\frac{\left(\dfrac{W}{f_o}\right)^3}{\dfrac{W}{f_o}-\arctan\dfrac{15\,000}{2100}}\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{1}{3}\frac{\left(\dfrac{15\,000}{2100}\right)^3}{\dfrac{15\,000}{2100}-\arctan\dfrac{15\,000}{2100}}\left(\frac{S}{N}\right)_o=21.3\left(\frac{S}{N}\right)_o\\&\approx13.3+\left(\frac{S}{N}\right)_o\Big|_{\text{dB}}\approx13.3+15.7+\left(\frac{S}{N}\right)_b\Big|_{\text{dB}}\approx29+\left(\frac{S}{N}\right)_b\Big|_{\text{dB}}\end{aligned}\tag{6.2.44}$$

可见，采用预/去加重滤波器技术的 FM 系统与基带系统相比，整体性能提高 29dB。◀

6.3　模拟调制系统的比较

现在到了对各种不同的模拟通信系统进行全面比较的时候。已经学习过的系统包括线性调制系统(DSB-SC 调幅，常规调幅，SSB-SC 调幅，VSB)和非线性调制系统(FM 和 PM)。

可以从多种角度对这些系统进行比较。此处仅就下列三个重要的实用指标进行比较：

1. 系统的带宽效率。
2. 有噪条件下反映在系统性能上的功率效率。
3. 系统(发射机和接收机)的易实现性。

277

带宽效率。 带宽效率最高的模拟通信系统是 SSB-SC 系统，其传输带宽与调制信号带宽相同。这种系统广泛应用于带宽资源紧张的场合，例如微波和卫星链路的话音传输，以及拥塞区域内的点到点通信。由于 SSB-SC 不能有效地传输直流分量(DC)，因此不能用于传输诸如图像等含有显著 DC 的信号。VSB 系统是一个很好的折中方案，其传输带宽比 SSB 系统的略大，但是可以传输 DC，因此广泛应用于电视广播以及某些数据通信领域。当传输带宽成为首要考虑因素时，PM 和 FM 是最不合适的系统，它们只适合应用于要求高抗噪性能的场合。

功率效率。 比较各种系统的功率效率的一个标准，就是在给定接收信号功率的条件下，比较它们的输出信噪比。如前所述的角度调制方案，特别是 FM，可以提供很高的抗噪性能和功率效率。FM 广泛应用于功率受限的通信链路，例如点到点通信和高保真无线电广播，还应用于微波视距和卫星链路的话音(已经过 SSB/FDM 复用)传输。常规调幅和 VSB+C 是功率效率最低的系统，不适用于首要考虑发射功率的场合，但由于其接收机结构简单也得到一定的应用。

易实现性。 结构最简单的接收机是常规调幅的接收机，VSB+C 系统的接收机要略复杂一些。FM 接收机也是比较容易实现的。这三种系统广泛应用于 AM 广播、TV 广播和高保真 FM(包括 FM 立体声)广播。AM 发射机的低功率效率可以通过数亿个接收机极其简单的结构得到弥补。而 DSB-SC 和 SSB-SC 则需要同步解调，所以接收机的结构要复杂得多，不适用于广播类的应用。由于在接收机结构复杂度方面，DSB-SC 和 SSB-SC 几乎相同，而且 SSB-SC 的发射机只比 DSB-SC 的略复杂一些，但是 DSB-SC 带宽效率相对较低，因此很少应用于模拟信号传输中。

6.4　模拟通信系统中传输损耗和噪声的影响

在任何通信系统中，通常有两个主要因素会对系统性能产生影响。一个因素是加性噪声，由用来滤波和放大信号的电子器件产生。第二个影响系统性能的因素就是信号衰减。基本上所有物理信道，包括有线和无线信道都会有损耗。因此，当信号在信道上传输时，信号会不断衰减(即幅度降低)。一个简单的衰减模型就是把传输信号与某个衰减因子 $\alpha(\alpha<1)$ 相乘，如图 6-7 所示。若传输信号为 $s(t)$，则接收信号为

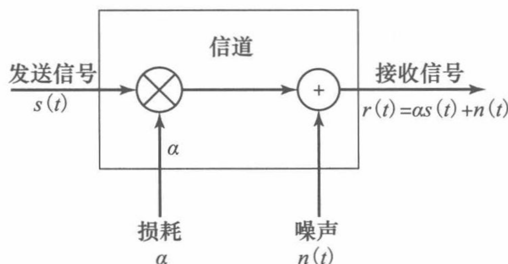


图 6-7　具有衰减和加性噪声的信道数学模型

278

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t) \tag{6.4.1}$$

显然，信号衰减的影响是降低了信号 $s(t)$ 的幅度，因而使信号更容易淹没在加性噪声的干扰中。

在许多信道中，诸如无线信道和微波视距信道，信号衰减可以通过在传输过程中使用放大器提高信号电平来弥补。然而，放大器在进行放大过程中也会引入加性噪声，对信号造成干扰。在设计通信系统时，必须要考虑这些额外噪声的影响。

本节主要讨论信号通过信道传输时的衰减和电子放大器产生的加性热噪声干扰，还将阐述上述两个因素如何影响通信系统的设计。

6.4.1　热噪声源的特征

任何双端传导器件都具有损耗和一定的阻抗，设为 R 欧姆。在高于绝对零度的某温度 T 下，电阻总是含有随机运动的自由电子，因此在电阻两端会产生一定的噪声电压，称为热噪声。

一般说来，任何物理形式的电阻(或损耗器件)都适用于噪声源串联无噪声电阻的模型，如图 6-8 所示。噪声源的输出 $n(t)$ 可以看作是某个随机过程的样本函数。根据量子力学理论，热噪声的功率谱密度(参考 5.3 节)为

279

$$\boldsymbol{S}_R(f) = \frac{2Rh|f|}{\left(e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1\right)} \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz} \tag{6.4.2}$$

其中 h 表示普朗克常数，k 表示玻尔兹曼常数，T 表示以开尔文为单位的温度，即 $T=273+C$，其中 C 是摄氏温度。如 5.3 节所述，常温条件下，在小于 10^{12} Hz 的频率范围内(涵盖了所有常规通信系统)，有

$$e^{\frac{h|f|}{kT}} \approx 1 + \frac{h|f|}{kT} \tag{6.4.3}$$

因此，功率谱密度可近似表示为

$$\boldsymbol{S}_R(f) = 2RkT\,\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz} \tag{6.4.4}$$

当连接阻值为 R_L 的负载电阻后，如图 6-9 所示的噪声电压在 $R=R_L$ 时达到最大功率。

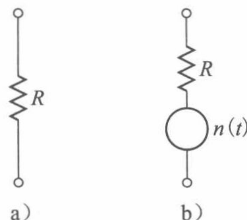


图 6-8　物理电阻 a)可用无噪声电阻串联噪声源的模型 b)表示

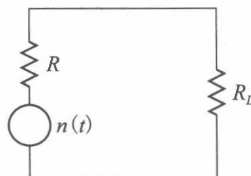


图 6-9　噪声电阻连接负载电阻 R_L

此时，负载与噪声源相匹配，并且输出到负载上的最大功率为 $E[N^2(t)]/(4R_L)$。因此，负载上的噪声电压的功率谱密度为

$$\boldsymbol{S}_n(f)=\frac{kT}{2}\mathrm{W/Hz} \tag{6.4.5}$$

如 5.3.2 节所述，kT 通常记作 N_0。所以，热噪声的功率谱密度通常表示为

$$\boldsymbol{S}_n(f)=\frac{N_0}{2}\mathrm{W/Hz} \tag{6.4.6}$$

例如，在室温($T_0=290°\mathrm{K}$)下，$N_0=4\times10^{-21}\mathrm{W/Hz}$。

6.4.2 有效噪声温度和噪声系数

在通信系统中使用放大器提高信号电平时，干扰信号的噪声也同时被放大。由于任何放大器的带宽都是受限的，可以看作是一个频率响应特性为 $H(f)$ 的滤波器。下面将分析放大器对输入热噪声源的影响。

280

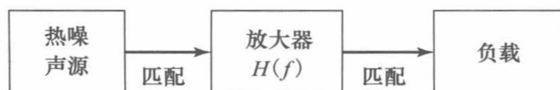


图 6-10 热噪声连接放大器和负载

图 6-10 描述的是热噪声源连接至频率响应为 $H(f)$ 的匹配二端网络，此网络的输出连接至匹配负载。首先，回想起网络输出端的噪声功率表达式

$$P_{no}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_n(f)\,|H(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f \tag{6.4.7}$$

根据 5.3.3 节的内容，可以定义滤波器的噪声等效带宽为

$$B_{\mathrm{neq}}=\frac{1}{2\mathcal{G}}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f \tag{6.4.8}$$

其中，定义$\mathcal{G}=|H(f)|^2_{\max}$为放大器的最大功率增益。因此，不引入额外噪声的理想放大器的输出噪声功率可表示为

$$P_{no}=\mathcal{G}N_0B_{\mathrm{neq}} \tag{6.4.9}$$

任何实际的放大器都会由于其内部产生的噪声而输出额外的噪声。因此，放大器的输出噪声功率实际为

$$P_{no}=\mathcal{G}N_0B_{\mathrm{neq}}+P_{ni}=\mathcal{G}kTB_{\mathrm{neq}}+P_{ni} \tag{6.4.10}$$

其中 P_{ni} 表示由于放大器内部产生噪声而输出的噪声功率。因此有

$$P_{no}=\mathcal{G}kB_{\mathrm{neq}}\left(T+\frac{P_{ni}}{\mathcal{G}kB_{\mathrm{neq}}}\right) \tag{6.4.11}$$

不妨定义

$$T_e=\frac{P_{ni}}{\mathcal{G}kB_{\mathrm{neq}}} \tag{6.4.12}$$

称其为二端网络(放大器)的*有效噪声温度*。则有

$$P_{no}=\mathcal{G}kB_{\mathrm{neq}}(T+T_e) \tag{6.4.13}$$

这样就可以视输出噪声为热噪声源在温度为 $T+T_e$ 时产生的热噪声。

若输入放大器的信号源的功率为 P_{si}，则输出信号功率为

281

$$P_{so}=\mathcal{G}P_{si} \tag{6.4.14}$$

因此，二端网络的输出 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{P_{so}}{P_{no}}=\frac{\mathcal{G}P_{si}}{\mathcal{G}kTB_{\mathrm{neq}}(1+T_e/T)}=\frac{P_{si}}{N_0B_{\mathrm{neq}}(1+T_e/T)}=\frac{1}{1+T_e/T}\left(\frac{S}{N}\right)_i \tag{6.4.15}$$

其中，根据定义，$(S/N)_i$ 是二端网络的输入 SNR。可见，放大器 SNR 的降低(衰减)因子为$(1+T_e/T)$。因此，T_e 可以作为衡量放大器噪声的指标。对于理想放大器，则有$T_e=0$。

在室温 T_0(290°K)条件下，因子$(1+T_e/T_0)$称为放大器的噪声系数。特别定义二端网络的噪声系数为输出噪声功率 P_{no} 与理想(无噪声)二端网络在热噪声源处于室温($T=290$°K)时的输出噪声功率之比。显然，比率

$$F=\left(1+\frac{T_e}{T_0}\right) \tag{6.4.16}$$

就是放大器的噪声系数。因此，式(6.4.15)可以表示为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{1}{F}\left(\frac{S}{N}\right)_i \tag{6.4.17}$$

对式(6.4.17)两边求对数，得

$$10\log\left(\frac{S}{N}\right)_o=-10\log F+10\log\left(\frac{S}{N}\right)_i \tag{6.4.18}$$

因此，$10\log F$ 表示由放大器额外引入的噪声所造成的 SNR 损失。许多低噪放大器(例如行波管)的噪声系数低于 3dB，而常规的集成电路放大器的噪声系数为 6～7dB。

易证(参见习题 6.16)，K 个增益为$\mathscr{G}_k$ 且对应噪声系数为 $F_k(1\leqslant k\leqslant K)$的放大器级联后的整体噪声系数为

$$F=F_1+\frac{F_2-1}{\mathscr{G}_1}+\frac{F_3-1}{\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2}+\cdots+\frac{F_K-1}{\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2\cdots\mathscr{G}_{K-1}} \tag{6.4.19}$$

上式就是费里斯(Fries)公式。不难看出，第一级放大器的噪声系数是上式中的主导项。因此，接收机前端应当配置低噪声系数和高增益的放大器。在此条件下，可以忽略求和式中的其他项。

例 6.4.1 设某放大器由相同的 3 级构成，每级的增益为$\mathscr{G}_i$，噪声系数为 $F_i=6$，$i=1$，2，3。求该放大器的整体噪声系数。　282

解：由式(6.4.19)，得

$$F=F_1+\frac{F_2-1}{\mathscr{G}_1}+\frac{F_3-1}{\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2}$$

其中 $F_1=F_2=F_3=6$，$\mathscr{G}_1=\mathscr{G}_2=5$，因此有

$$F=6+1+0.2=7.2$$

或等价于 $F_{dB}=8.57$dB。◀

6.4.3 传输损耗

如前所述，信号通过任何物理信道传输都会产生衰减。信号衰减的程度通常取决于物理介质、工作频率以及发射机与接收机之间的距离。定义传输损耗$\mathscr{L}$为信道的输入(发射)功率与输出(接收)功率之比，即

$$\mathscr{L}=\frac{P_T}{P_R} \tag{6.4.20}$$

或用分贝表示

$$\mathscr{L}_{dB}\equiv 10\log\mathscr{L}=10\log P_T-10\log P_R \tag{6.4.21}$$

对于有线信道，传输损耗通常以单位长度分贝数的形式给出，例如 dB/km。比方说，直径为 1cm 的同轴电缆在频率为 1MHz 时的传输损耗是 2dB/km。传输损耗通常会随着频率的增加而增加。

例 6.4.2 如果同轴电缆在工作频率的传输损耗是 2dB/km，求 10km 和 20km 同轴电缆的传输损耗。

解：10km 信道的损耗是$\mathscr{L}_{dB}=20$dB。因此，输出(接收)功率 $P_R=P_T/\mathscr{L}=10^{-2}P_T$。而 20km 信道的损耗是$\mathscr{L}_{dB}=40$dB。因此，$P_R=10^{-4}P_T$。注意，电缆长度增加一倍使衰减增加两个数量级。◀

在视距无线电系统中，传输损耗定义为

$$\mathscr{L}=\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \tag{6.4.22}$$

其中$\lambda=c/f$是发射信号的波长，c是光速(3×10^8m/s)，f是发射信号的频率，d是发射

283

机与接收机之间的距离(单位为 m)。在无线传输中，$\mathscr{L}$称为自由空间路径损耗。

例 6.4.3 对于f=1MHz 的发射信号，求距离分别为 10km 和 20km 时的自由空间路径损耗。

解：由于信号波长λ=300m，可根据式(6.4.22)计算自由空间路径损耗。

当路径长度为 10km 时，有

$$\mathscr{L}_{\text{dB}} = 20\log_{10}(4\pi\times10^4/300) = 52.44\text{dB} \tag{6.4.23}$$

当路径长度为 20km 时，有

$$\mathscr{L}_{\text{dB}} = 20\log_{10}(8\pi\times10^4/300) = 58.44\text{dB} \tag{6.4.24}$$

注意，当无线传输距离增加一倍时，自由空间路径损耗将增加 6dB。◀

例 6.4.4 某信号通过传输损耗为 2dB/km、长为 10km 的同轴电缆信道传输。发射信号功率为$P_{T\text{dB}}$=−30dBW(−30dBW 是指低于 1W 的 30dB，即 1mW)。求接收信号功率以及增益为$\mathscr{G}_{\text{dB}}$=15dB 的放大器的输出功率。

解：10km 信道的传输损耗$\mathscr{L}_{\text{dB}}$=20dB。所以接收信号功率为

$$P_{R\text{dB}} = P_{T\text{dB}} - \mathscr{L}_{\text{dB}} = -30-20 = -50\text{dBW} \tag{6.4.25}$$

放大器使接收信号功率提高了 15dB，因此，放大器的输出功率为

$$P_{o\text{dB}} = P_{R\text{dB}} + \mathscr{G}_{\text{dB}} = -50+15 = -35\text{dBW} \tag{6.4.26}$$ ◀

6.4.4 信号传输中继器

有线电话信道和微波视距无线信道中的模拟中继器本质上就是放大器，用于提高信号电平，补偿信号在信道传输中的衰减。

图 6-11 所示的系统利用中继器来放大因介质传输损耗而衰减的信号。因此，中继器的输入信号功率为

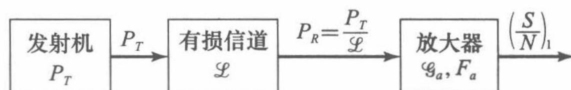


图 6-11 使用中继器补偿信道损耗的通信系统

284

$$P_R = P_T/\mathscr{L} \tag{6.4.27}$$

中继器的输出功率为

$$P_o = \mathscr{G}_a P_R = \mathscr{G}_a P_T/\mathscr{L} \tag{6.4.28}$$

可以选择放大器的$\mathscr{G}_a$来补偿传输损耗。因此，$\mathscr{G}_a=\mathscr{L}$，$P_o=P_T$。

此时，中继器的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{1}{F_a}\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{1}{F_a}\left(\frac{P_R}{N_0B_{\text{neq}}}\right) = \frac{1}{F_a}\left(\frac{P_T}{\mathscr{L}N_0B_{\text{neq}}}\right) = \frac{1}{F_a\mathscr{L}}\left(\frac{P_T}{N_0B_{\text{neq}}}\right) \tag{6.4.29}$$

基于此结果，可以把有损传输介质后接放大器的结构看作是两个网络的级联：一个的噪声系数为$\mathscr{L}$，另一个的噪声系数为F_a。于是，对于级联结构，总的噪声系数为

$$F = \mathscr{L} + \frac{F_a-1}{\mathscr{G}_a} \tag{6.4.30}$$

如果选择$\mathscr{G}_a=1/\mathscr{L}$，则有

$$F = \mathscr{L} + \frac{F_a-1}{1/\mathscr{L}} = \mathscr{L}F_a \tag{6.4.31}$$

因此，有损传输介质与放大器的级联等效于一个噪声系数为$\mathscr{L}F_a$的网络。

现在假设发射信号经过K段信道，每段信道都有各自的中继器，如图 6-12 所示。如果$F_i=\mathscr{L}_iF_{ai}$是第i段的噪声系数，则K段级联的总噪声系数为：

$$F = \mathscr{L}_1F_{a1} + \frac{\mathscr{L}_2F_{a2}-1}{\mathscr{G}_{a1}/\mathscr{L}_1} + \frac{\mathscr{L}_3F_{a3}-1}{(\mathscr{G}_{a1}/\mathscr{L}_1)(\mathscr{G}_{a2}/\mathscr{L}_2)}\cdots + \frac{\mathscr{L}_KF_{aK}-1}{(\mathscr{G}_{a1}/\mathscr{L}_1)(\mathscr{G}_{a2}/\mathscr{L}_2)\cdots(\mathscr{G}_{aK-1}/\mathscr{L}_{K-1})} \tag{6.4.32}$$

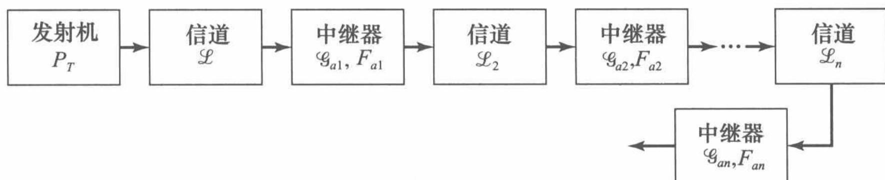


图 6-12　使用多个中继器的通信系统

285

因此，接收机处的中继器(放大器)的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{1}{F}\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{1}{F}\left(\frac{P_T}{N_0 B_{\text{neq}}}\right) \tag{6.4.33}$$

有一种重要的情形：K 段都是相同的，即对于所有 i，$\mathscr{L}_i=\mathscr{L}$，$F_{ai}=F_a$，且每段的放大器的设计增益都恰好补偿该段的传输损耗，即对于所有 i，$\mathscr{G}_{ai}=\mathscr{L}_i$。于是，总的噪声系数简化为

$$F = K\mathscr{L}F_a-(K-1)\approx K\mathscr{L}F_a \tag{6.4.34}$$

所以有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \approx \frac{1}{K\mathscr{L}F_a}\left(\frac{P_T}{N_0 B_{\text{neq}}}\right) \tag{6.4.35}$$

因此，K 个相同段级联的总噪声系数就是单段噪声系数的 K 倍。

例 6.4.5 带宽为 4kHz 的信号通过衰减为 2dB/km 的信道传输，传输距离为 200km，并假设每个中继器(放大器)的噪声等效带宽 $B_{\text{neq}}=4\text{kHz}$，$N_0=4\times10^{-21}\text{W/Hz}$。(*a*)若接收机放大器的噪声系数 $F_{a\text{dB}}=$ 5dB，为了使其输出 SNR 达到$(S/N)_o=30\text{dB}$，求所需发射功率 P_T。(*b*)若在有限信道中每隔 10km 插入一增益为 20dB，噪声系数为 5dB 的中继器，重新计算所需发射功率 P_T。

解：

1. 200km 有线信道的总损耗是 400dB。由式(6.4.35)以及 $K=1$，有

$$10\log(S/N)=-10\log\mathscr{L}-10\log F_a-10\log(N_0B_{\text{neq}})+10\log P_T$$

因而有

$$P_{T\text{dB}}=(S/N)_{o\text{dB}}+F_{a\text{dB}}+(N_0B_{\text{neq}})_{\text{dB}}+10\log\mathscr{L}=30+5+400+(N_0B_{\text{neq}})_{\text{dB}}$$

但是

$$(N_0B_{\text{neq}})_{\text{dB}}=10\log(1.6\times10^{-17})=-168\text{dBW}$$

其中 dBW 表示相对于 1W 的功率值。因此有

$$P_{T\text{dB}}=435-168=267\text{dBW}$$

$$P_T=5\times10^{26}\text{W}$$

286

此结果是个天文数字。

2. 每隔 10km 插入一个中继器，则每段的损耗为 $L_{\text{dB}}=20\text{dB}$。共有 20 个中继器，每个中继器的噪声系数为 5dB。由式(6.4.35)，得

$$(S/N)_{o\text{dB}}=-10\log K-10\log\mathscr{L}-10\log F_a-10\log(N_0B_{\text{neq}})+10\log P_T$$

即

$$30=-13-20-5+168+P_{T\text{dB}}$$

因此有

$$P_{T\text{dB}}=-100\text{dBW}$$

即

$$P_T=10^{-10}\text{W}\quad(0.1\text{pW})$$

◀

上面的例子清晰地展现了远距离通信时使用模拟中继器的优点。当然，也应该认识到，模拟中继器会引入额外的噪声，从而降低了输出 SNR。式(6.5.35)明确指出，为了保持$(S/N)_o$不变，发射功率 P_T 也必须随着中继器数量 K 的增加而线性增加。因此，中继器数量每增加一倍，发射功率 P_T 必须增加 3dB。

6.5 小结及深入阅读

本章定量分析了加性噪声对 AM、FM 和 PM 信号解调的影响。首先对 DSB-SC 调幅、SSB 调幅和常规调幅解调器的输出信噪比(SNR)进行评估。在加性高斯白噪声功率谱为 10^{-12}W/Hz 以及信道衰减为 50dB 的条件下，例 6.1.2 对上述三种调幅信号要达到输出 SNR 为 50dB 的目标，所需的发射功率进行了比较。结果表明，DSB-SC 和 SSB 所需的发射功率均为 200W，而常规调幅所需的发射功率为 909W。

本章对两类角度调制(FM 和 PM)系统进行了类似的评估，发现调制指数 β 扮演着重要角色，是角度调制系统带宽展宽的度量。卡森公式表明，传输调角信号所需的信道带宽为 $B_c=2(\beta+1)W$，其中 W 指调制信号的带宽。本章还介绍了对调角信号进行解调时的门限效应问题，指出当接收信号的 SNR 低于某门限值时，会发生信号失真。为了补偿发生在 FM 信号解调中的高频段噪声增强，需要在发射机处引入预加重滤波，以强化发射信号的高频部分。而在接收端的 FM 解调器后需要设置去加重滤波器，以复原 FM 信号，消除发射端预加重滤波对信号的影响。本章还对角度调制系统和幅度调制系统在带宽效率，功率效率和易实现性等方面进行比较。

287

本章的最后一节用有效噪声温度和噪声系数等参数来刻画热噪声源。最后，讨论了传输损耗以及在长距离信号传输中使用模拟中继器的好处。

很多通信著作中都有关于噪声如何影响模拟通信系统的分析，包括 Carlson(1986)，Ziemer 和 Tranter(2002)，Couch(1993)以及 Gibson(1993)。Sakrison(1968)的著作详细分析了有噪条件下的 FM 系统。Taub 和 Schilling(1986)的著作深入分析了 FM 的门限效应，并介绍了各种门限扩展的方法。

习题

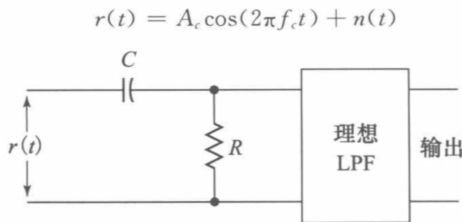
6.1 某通信系统的接收信号 $r(t)=s(t)+n(t)$ 通过一个带宽为 W，单位增益的理想低通滤波器(LPF)。信号分量 $s(t)$ 的功率谱密度为

$$S_s(f)=\frac{P_0}{1+(f/B)^2}$$

其中，B 为 3dB 带宽。噪声分量 $n(t)$ 的功率谱密度在全频域为 $N_0/2$。求并画出 SNR 关于 W/B 的函数曲线。滤波器的带宽为多少时才能得到最大的 SNR?

6.2 如习题 6.2 图所示，系统的输入是信号与噪声的叠加波形

$$r(t)=A_c\cos(2\pi f_c t)+n(t)$$

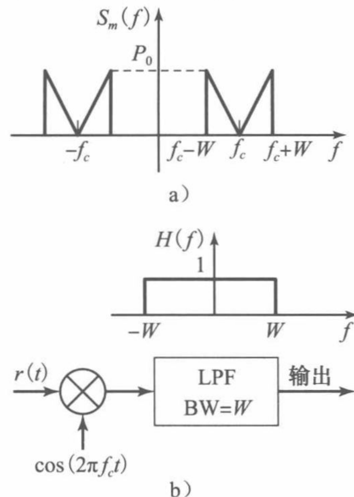


习题 6.2 图

其中功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声过程的样本函数。

1. 求并画出 RC 滤波器的频率响应曲线。
2. 画出整个系统的频率响应曲线。
3. 若理想 LPF 的带宽 $W>f_c$，求理想 LPF 的输出 SNR。给定 R 和 C 的取值，画出 SNR 关于 W 的函数曲线。

6.3 某 DSB 调幅信号的功率谱密度如习题 6.3 图 a所示。该信号受到功率谱密度在信号通带范围内为 $N_0/2$ 的加性噪声的干扰。掺杂有噪声的接收信号经过解调和低通滤波，如习题 6.3图 b 所示，求 LPF 的输出 SNR。



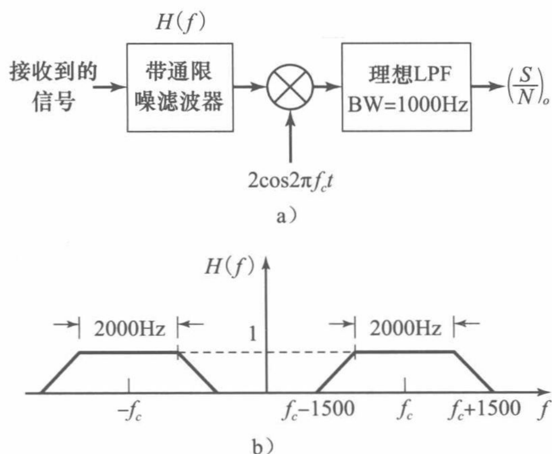
习题 6.3 图

6.4　某通信信道的衰减为 90dB，加性白噪声功率谱密度 $\frac{N_0}{2}=0.5\times10^{-14}$ W/Hz。调制信号的带宽为 1.5MHz，其幅度在区间[−1，1]内均匀分布。若要求解调输出 SNR 为 30dB，求下列情形中所需的发射功率：

1. 上单边带(USSB)调制。
2. 调制指数为 0.5 的常规调幅。
3. DSB-SC 调制。

6.5　频率低于 1000Hz 的正弦调制信号对载波 $c(t)=10^{-3}\cos(2\pi f_c t)$ 进行调制指数为 0.5 的常规幅度调制。信道噪声是功率谱密度 $\frac{N_0}{2}=0.5\times10^{-12}$ W/Hz 的加性白噪声。接收端的信号处理过程如习题 6.5 图 a 所示，带通限噪滤波器的频率响应如习题 6.5 图 b 所示。

1. 求限噪滤波器输出的信号功率和噪声功率。
2. 求输出 SNR。



习题 6.5 图

6.6　在模拟通信系统中，解调增益定义为解调器的输出 SNR 与接收机前端限噪滤波器的输出 SNR 之比，求下列各种情形的解调增益表达式：

1. DSB。
2. SSB。
3. 调制指数为 a 的常规调幅。并求此情形下的最大解调增益。
4. 调制指数为 β_f 的 FM。
5. 调制指数为 β_p 的 PM。

6.7　某广播通信系统中，发射功率为 40kW，信道衰减为 80dB，噪声功率谱密度为10^{-10} W/Hz，调制信号带宽为 10^4 Hz。

1. 求检波前的 SNR(即信号形态为 $r(t)=\alpha u(t)+n(t)$时的 SNR)。
2. 若采用 DSB 调制，求输出 SNR。
3. 若采用 SSB 调制，求输出 SNR。
4. 若采用调制指数为 0.85 的常规调幅，且归一化调制信号功率为 0.2，求输出 SNR。

6.8　某带宽为 100kHz 的通信信道用于传输模拟信号 $m(t)$。已知 $|m(t)|<1$，带宽 $W=4$kHz，功率为 0.1W。

1. 求使用整个信道带宽的 FM 系统的输出 SNR 与调制指数 $a=0.85$ 的常规调幅的输出 SNR 之比。换算成 dB 又是多少？
2. 证明：若分别采用 FM 系统和 PM 系统，且两系统的输出 SNR 相同，则

$$\frac{BW_{\mathrm{PM}}}{BW_{\mathrm{FM}}}=\frac{\sqrt{3}\beta_f+1}{\beta_f+1}$$

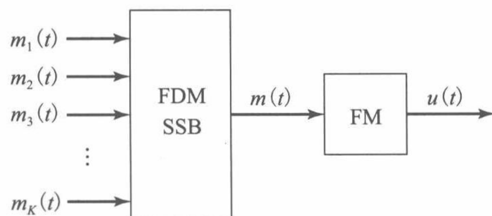
6.9　某归一化调制信号 $m_n(t)$的带宽为 5000Hz，功率为 0.1W。信道带宽为 100kHz，衰减为 80dB。噪声是功率谱密度为 0.5×10^{-12} W/Hz 的白噪声，信号发射功率为 10kW。

1. 若采用 $a=0.8$ 的 AM，求$\left(\frac{S}{N}\right)_o$。
2. 若采用 FM，求$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ 的最大可能值。

6.10　某归一化调制信号 $m_n(t)$的带宽 $W=8$kHz，功率 $P_{M_n}=\frac{1}{2}$，用带宽为 60kHz，衰减为 40dB 的信道传输。已知信道噪声是功率谱密度$\frac{N_0}{2}=10^{-12}$ W/Hz 的加性白噪声，采用没有预/去加重滤波的频率调制方案。

1. 若要求接收机的输出 SNR 至少为 40dB，求所需的最低发射功率及相应的调制指数。
2. 若要求接收机的输出 SNR 至少为 60dB，求所需的最低发射功率及相应的调制指数。
3. 若允许采用时间常数 $\tau=75\mu$s 的预/去加重滤波器，重新计算问题 2。

6.11　通过微波视距链路传输电话信号，经常采用 FDM-SSB 和 FM 的混合调制方案。该系统的框图如习题 6.11 图所示。

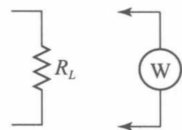


习题 6.11 图

每路信号 $m_i(t)$的带宽限制为 WHz，并对载波 $c_i(t)=A_i\cos(2\pi f_{ci}t)$进行 USSB 调制，其中 $f_{ci}=(i-1)W$，$1\leqslant i\leqslant K$。$m(t)$是所有 USSB 已调信号之和，并对载频为 f_c 的载波进行调制指数为 β 的 FM 调制。

1. 画出 USSB 已调信号 $m(t)$ 的典型频谱。
2. 求 $m(t)$ 的带宽。
3. 在接收端，接收信号 $r(t)=u(t)+n_w(t)$ 先经过 FM 解调，然后再通过 USSB 解调器组。求进入第 i 个 USSB 解调器的噪声功率。
4. 求进入到载频为 f_i 的解调器的噪声功率与进入到载频为 f_j 的解调器的噪声功率之比($1\leqslant i, j\leqslant K$)。
5. 为了保证经过 USSB 解调之后每路信道的 SNR 都相同，该如何选择载波幅度 A_i。

6.12　将测量平均功率的功率表连接至发射机的输出负载上，如习题 6.12 图所示。当负载为 50Ω 时，功率表的读数为 20W。求：



习题　6.12 图

1. 负载电阻两端的电压。
2. 流经负载电阻的电流。
3. 以 dBm 为单位的功率值。

6.13　某双绞线电话信道的特征阻抗 $Z_C=300\Omega$，末端负载 $Z_L=300\Omega$，电话线长度 200km，损耗为 2dB/km。

288～292

1. 若平均发送功率 $P_T=10\text{dBm}$，若线路没有中继器，求接收功率 P_R。
2. 若使用多个增益为 20dB，噪声系数为 6dB 的中继器以提高信号电平，且每个中继器要求输入信号功率为 10dBm，求所需中继器的数量及间距。

6.14　有一根直接指向空中的无线电电线，其噪声温度为 50°K，将接收信号馈送至前置放大器。已知该前置放大器在 10MHz 范围内有 35dB 的增益，噪声系数为 2dB。

1. 求前置放大器输入端的有效噪声温度。
2. 求前置放大器的输出噪声功率。

6.15　某放大器的噪声等效带宽 $B_{\text{neq}}=25\text{kHz}$，最大功率增益 $G=30\text{dB}$，输出噪声功率为 $10^8 kT_0$，其中 T_0 表示环境温度。求有效噪声温度和噪声系数。

6.16　证明 k 个二端网络级联的有效噪声温度为

$$T_e=T_{e1}+\frac{T_{e2}}{\mathscr{G}_1}+\frac{T_{e3}}{\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2}+\cdots+\frac{T_{ek}}{\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2\cdots\mathscr{G}_{k-1}}$$

并利用此结果证明式(6.4.19)给出的费里斯公式

上机习题

6.1　噪声对 DSB-SC 调幅的影响

某调制信号如下：

$$m(t)=\begin{cases}\text{sinc}(100t) & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $t_0=0.1$。该调制信号对载波 $c(t)=\cos(2\pi f_c t)$ ($f_c=250\text{Hz}$) 进行调制，生成 DSB-SC 调幅信号 $u(t)=m(t)c(t)$。

1. 选择抽样间隔 $t_s=0.0001$，分别生成调制信号 $m(t)$ 和已调信号 $u(t)$ 位于 $t=nt_s$ ($n=0, 1, \cdots, 999$) 处的 1000 个抽样值，并画出图形。
2. 生成具有 2000 个点的均值为 0，方差为 1 的高斯随机变量序列，并构造接收信号如下：

$$\begin{aligned}r(nt_s)=r(n)&=u(nt_s)+\sigma[w_c(nt_s)\cos(2\pi f_c nt_s)\\&\quad-w_s(nt_s)\sin(2\pi f_c nt_s)]\\&=u(n)+\sigma[w_c(n)\cos(2\pi f_c nt_s)\\&\quad-w_s(n)\sin(2\pi f_c nt_s)]\end{aligned}$$

其中 $w_c(t)$ 和 $w_s(t)$ 分别表示加性高斯噪声过程的同相分量和正交分量，σ^2 是正比于噪声功率的比例因子。对于不同的 σ 值：$\sigma=0.1$、$\sigma=1$ 和 $\sigma=2$，分别生成并画出接收信号序列 $\{r(n)\}$。

3. 使用如上机习题 6.1 图所示的解调器对接收信号序列 $\{r(n)\}$ 进行解调，对于三个不同的 σ 值，分别画出解调输出信号 $m_r(t)$。已知低通滤波器是 31 抽头的线性相位 FIR 滤波器，截止频率（－3dB）为 100Hz，阻频带衰减至少 30dB。将 $m_r(t)$ 与调制信号 $m(t)$ 进行比较，评估加性噪声对解调输出 $m_r(t)$ 的影响。
4. 对于三个不同的 σ 值，分别求接收机的输出 SNR。



上机习题 6.1 图　DSB-SC AM 的解调器

6.2　噪声对 SSB-SC 调幅的影响

若调制方式改为 SSB-SC 调幅，重做上机习题 6.1的各问题。

6.3　噪声对常规调幅的影响

某调制信号如下：

$$m(t)=\begin{cases}\text{sinc}(100t) & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $t_0=0.1$。该调制信号对载波 $c(t)=\cos(2\pi f_c t)$ ($f_c=250\text{Hz}$) 进行调制，生成调制指数 $a=0.8$ 的常规调幅信号 $u(t)$。

1. 选择抽样间隔 $t_s=0.0001$，分别生成调制信

号 m(t)和已调信号

$$u(t) = [1 + am(t)]\cos(2\pi f_c t) \big|_{t=nt_s, n=0,1,\cdots,999}$$

并画出图形。

2. 生成具有 2000 个点的均值为 0，方差为 1 的高斯随机变量序列，并构造接收信号如下：

$$\begin{aligned} r(nt_s) = r(n) &= u(nt_s) + \sigma[w_c(nt_s)\cos(2\pi f_c n t_s) \\ &\quad - w_s(nt_s)\sin(2\pi f_c n t_s)] \\ &= u(n) + \sigma[w_c(n)\cos(2\pi f_c n t_s) \\ &\quad - w_s(n)\sin(2\pi f_c n t_s)] \end{aligned}$$

其中 $w_c(t)$和 $w_s(t)$分别表示加性高斯噪声过程的同相分量和正交分量，σ^2 是正比于噪声功率的比例因子。对于不同的 σ 值：$\sigma=0.1$、$\sigma=1$ 和 $\sigma=2$，分别生成并画出接收信号序列$\{r(n)\}$。

3. 利用包络检波器解调接收信号序列$\{r(n)\}$，计算式如下

$$e(t) = \sqrt{[1 + am(t) + w_c(t)]^2 + w_s^2(t)} \big|_{t=nt_s, n=0,1,\cdots,999}$$

对于三个不同的 σ 值，分别画出 $e(t)$。将 $e(t)$与调制信号 $m(t)$进行比较，评估加性噪声对解调输出 $m_r(t)$的影响。注意，在无噪条件下，调制信号 $m(t)$可由包络信号$e(t)$减去值为 1 的 DC 偏移量而获得。在有噪条件下，DC 偏移量又是多少？

4. 对于三个不同的 σ 值，分别求接收机的输出 SNR。

6.4　噪声对 FM 的影响

某调制信号如下：

$$m(t) = \begin{cases} \mathrm{sinc}(100t) & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $t_0 = 0.1$。该调制信号对载波 $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ $(f_c = 250\text{Hz})$进行频率调制，频率偏移常数 $k_f = 100$。调频信号为

$$u(t) = \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\mathrm{d}\tau]$$

1. 选择抽样间隔 $t_s = 0.0001$，分别生成调制信号 $m(t)$及其积分的 2000 个抽样值，并在不同图中画出两者的图形。

2. 生成并画出 FM 信号 $u(t)$在时间间隔 $|t| \leqslant t_0$ 内的 2000 个抽样值。

3. 利用 MATLAB 中的傅里叶变换程序，计算并在不同图中画出 $m(t)$和 $u(t)$的频谱。

4. 生成具有 3998 个点的均值为 0，方差为 1 的高斯随机变量序列。对于 $n=0$，±1，±2，…，±999，构造接收信号如下：

$$\begin{aligned} r(nt_s) = r(n) &= u(nt_s) + \sigma[w_c(nt_s)\cos(2\pi f_c n t_s) \\ &\quad - w_s(nt_s)\sin(2\pi f_c n t_s)] \\ &= u(n) + \sigma[w_c(n)\cos(2\pi f_c n t_s) \\ &\quad - w_s(n)\sin(2\pi f_c n t_s)] \end{aligned}$$

其中 $w_c(t)$和 $w_s(t)$分别表示加性高斯噪声过程的同相分量和正交分量，σ^2 是正比于噪声功率的比例因子。对于不同的 σ 值：$\sigma=0.1$ 和 $\sigma=1$，分别生成并画出接收信号序列$\{r(n)\}$。

5. 对接收信号序列$\{r(n)\}$进行解调，得到解调输出信号 $m_r(t)$，并将 $m_r(t)$与调制信号$m(t)$进行比较。解调 FM 信号时，首先要求出 $u(t)$的相位，即 $m(t)$的积分；然后微分再除以 $2\pi k_f$ 以得到 $m(t)$。利用 MATLAB 函数 unwrap. m 来消除 2π 相位折叠的影响。评估解调输出信号 $m_r(t)$与调制信号 $m(t)$的匹配程度。

293
~
295

第7章
模数转换

设计通信系统是为了传递信息。所有的通信系统都有产生信息的信源，通信系统的目的就是把信源输出的信息传送到信宿。例如，在无线电广播中，信源是语音信源或音乐信源；在电视广播中，信源是输出动态图像的视频信源；在传真传输中，信源则产生静态图像。计算机之间通信传输的是二进制数据或ASCII码，所以其信源可视为二进制或ASCII信源。在二进制数据存储到计算机磁盘的过程中，信源也是二进制信源。

第3章，第4章和第6章讨论了采用不同的模拟调制方法传输模拟信息。本书的其余篇幅将讨论数字信号的传输。数字信号传输的抗噪声性能更强，带宽与功率间的折中方法更灵活，可以引入加密技术和抗干扰技术，并且易于采用大规模集成电路实现。为利用数字传输的优点，必须先把模拟信号转换成数字信号。实现模拟信号到数字信号的转换，要保证在转换过程中所引入的信号失真最小。

将模拟信号转换成数字信号，即一串比特流，共需要三个步骤。首先，对模拟信号进行抽样，从而由模拟信号得到时间离散幅值连续信号，这个过程称为*抽样*。然后对可能有无穷多个取值的抽样值进行近似，将其表示为有限个的数值，这一步称为*量化*。量化后，可得到一个时间离散、幅值离散的信号。模数转换的第三步是*编码*。在编码过程中，把0/1比特序列分配到量化器的不同输出。由于量化器的输出可能值为有限多个，因此，信号的每个抽样可以表示为有限位数的比特序列。例如，如果量化器有 $256=2^8$ 种可能的电

296

平，则它们可用8个比特表示。

7.1 信号抽样和由抽样重构信号

抽样定理是信号分析中最重要的结论之一，并在通信和信号处理中得到广泛运用。这都清楚地表明，运用频域分析方法能带来极大的方便，并且对频域信号的分析能使我们更加深入地理解信号。许多现代信号处理技术及各种数字通信方法都是基于该定理的有效性及其提供的对客观规律的深入理解。实际上，该定理与信号量化技术共同构成了模拟世界与数字通信技术的桥梁。

7.1.1 抽样定理

抽样定理的思想很简单也很直观。假定有两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，如图7-1所示。$x_1(t)$是个平滑的信号，变化很缓慢，因此它的频率分量主要集中在低频段。相反，$x_2(t)$含有高频成分，是快速变化的信号。我们分别利用在等间隔点 T_1 和 T_2 上的抽样值来近似表示这些信号。为了得到原始信号的近似值，可对抽样值进行线性内插。显然，在两个信号的失真程度相当的情况下，重构 $x_1(t)$所需的抽样间隔比重构 $x_2(t)$所需的抽样间隔大得多。这是信号 $x_1(t)$比信号 $x_2(t)$随时间变化缓慢的直接结果。因此，对于带宽较小的信号，抽样间隔可以更大，或者说抽样频率可以更低。抽样定理就是关于这种直观分析的精确阐述，它主要包括两方面内容：

1. 如果信号 $x(t)$带宽限定为 W，即当 $|f|\geqslant W$ 时，$X(f)\equiv 0$，则以间隔 $T_s=1/2W$

297

对信号进行抽样是充分的。

2. 如果采用比线性内插更复杂的插补信号，只要满足条件1就可以从抽样值中精确恢复出原始信号。

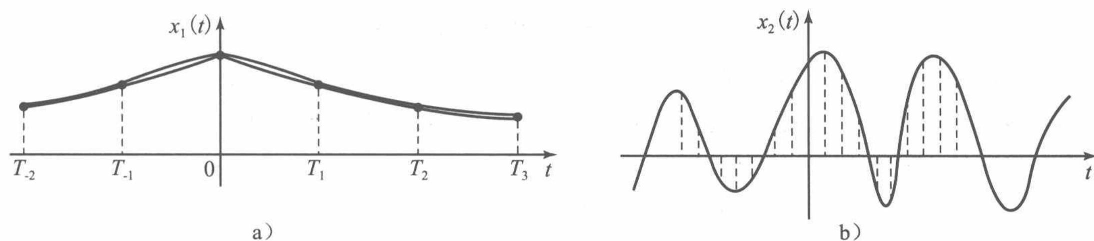


图 7-1 信号采样

显然，抽样定理的重要性在于它不仅提供了一种可以从抽样值中重构原始信号的方法，并且给出了无失真重构信号所需抽样间隔的精确上限(等效为抽样频率下限)。

抽样定理。假定信号 $x(t)$带宽为 W，即当$|f|\geqslant W$ 时，$X(f)\equiv 0$。如果以基本抽样间隔 T_s 的倍数对信号 $x(t)$进行抽样，其中 $T_s\leqslant 1/2W$，将得到序列$\{x(nT_s)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$。然后利用以下的重构公式由抽样值重构原始信号 $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W' T_s x(nT_s)\operatorname{sinc}[2W'(t-nT_s)] \tag{7.1.1}$$

其中，W'是满足以下条件的任意值

$$W \leqslant W' \leqslant \frac{1}{T_s} - W$$

在 $T_s=1/2W$ 的特殊情况下，重构关系可简化为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}-n\right)$$

证明：令 $x_\delta(t)$表示原始信号在 nT_s 时刻经冲激抽样所得到的结果，则有

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{7.1.2}$$

可将上式写成

$$x_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) \tag{7.1.3}$$

其中用到了性质 $x(t)\delta(t-nT_s)=x(nT_s)\delta(t-nT_s)$。现在将上式两边进行傅里叶变换并对上式右边运用卷积定理的对偶性，可得

$$X_\delta(f) = X(f) * \mathscr{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)\right] \tag{7.1.4}$$

通过表 2.1 可查到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$ 的傅里叶变换，从而得到

$$\mathscr{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)\right] = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) \tag{7.1.5}$$

298

将式(7.1.5)代入式(7.1.4)，可得

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{n}{T_s}\right) \tag{7.1.6}$$

其中，在最后一步中，用到的是冲激信号的卷积性质 $X(f)*\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$。这一关系表明冲激信号傅里叶变换时，原始信号的傅里叶变换以$\frac{1}{T_s}$的速率重复出现。图 7-2 描述了 $X_\delta(f)$。如果 $T_s>\frac{1}{2W}$，则 $x(t)$的重复频谱将出现重叠，就无法重构原始信号。这

种由欠抽样引起的失真被称为混叠误差或混叠失真。然而，如果 $T_s \leqslant \frac{1}{2W}$，就不会发生重叠，并且利用适当的滤波器就可以重构原始信号。为了恢复原始信号，可以通过一个低通滤波器对抽样信号进行滤波。该滤波器的频率响应特性满足如下条件

1. 当 $|f|<W$ 时，有 $H(f)=T_s$；
2. 当 $|f|\geqslant \frac{1}{T_s}-W$ 时，有 $H(f)=0$。

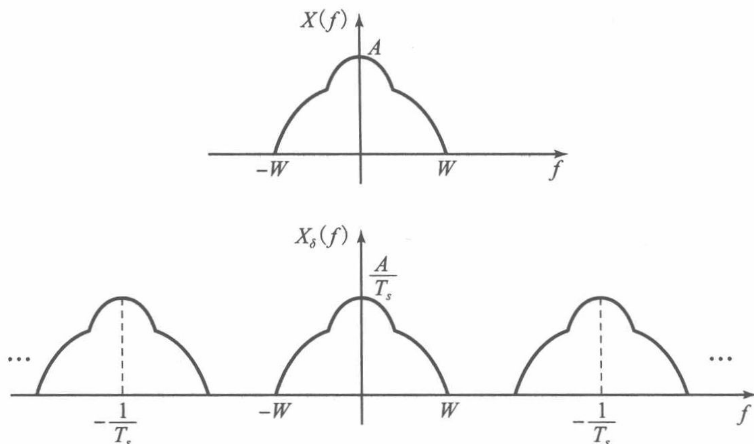


图 7-2 抽样信号的频域表示

当 $W\leqslant|f|<\frac{1}{T_s}-W$ 时，滤波器具有任何易于实现的特性。当然，一种方便但并不实用的选择是采用带宽为W'的理想低通滤波器，W'满足 $W\leqslant W'<\frac{1}{T_s}-W$。即，使用传递函数如下的滤波器

299

$$H(f)=T_s\Pi\left(\frac{f}{2W'}\right) \tag{7.1.7}$$

对于这种选择，可得

$$X(f)=X_s(f)T_s\Pi\left(\frac{f}{2W'}\right) \tag{7.1.8}$$

对等式两边进行傅里叶变换，可得

$$x(t)=x_\delta(t)*2W'T_s\mathrm{sinc}(2W't)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right)*2W'T_s\mathrm{sinc}(2W't)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2W'T_sx(nT_s)\mathrm{sinc}(2W'(t-nT_s)) \tag{7.1.9}$$

此关系式表明，如果用 sinc 函数对抽样值进行内插，可以完美地重构出原始信号。抽样速率 $f_s=\frac{1}{2W}$是不产生混淆的最小抽样速率，此抽样速率被称为奈奎斯特抽样速率。如果使用奈奎斯特抽样速率进行抽样，则重构滤波器的选择只能是带宽为 $W'=W=\frac{1}{2T_s}$的理想低通滤波器。此时，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x\left(\frac{n}{2W}\right)\mathrm{sinc}(2Wt-n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}-n\right) \tag{7.1.10}$$

在实际系统中，通常使用比奈奎斯特速率更高的速率进行抽样，这使得重构滤波器可实现且易于设计。在这种情况下，频域上相邻的重复频谱间距即$\left(\frac{1}{T_s}-W\right)-W=f_s-2W$

被称为保护带。因此，在具有保护带的系统中，$f_s=2W+W_G$，其中，W 是信号的带宽，W_G 是保护带，f_s 是抽样频率。

注意抽样定理的推导与周期信号的傅里叶变换（或傅里叶级数）的推导有很大的相似性。在周期信号的傅里叶变换中，我们从（时间）周期信号入手，得到其傅里叶变换是由一系列的冲激组成。因此，只要给出这些冲激的权重（傅里叶级数的系数）就可以确定信号。在抽样定理中，我们从冲激抽样信号或时域上的一系列冲激入手，得到其傅里叶变换是频域上的周期函数，同理，其抽样值也可以完全确定信号。这种相似性是源于时域与频域的对偶性以及这样一个事实：傅里叶级数的展开和根据抽样值进行的重构，都是正交扩展，其中一个是根据指数信号展开，而另一个是根据辛格（sinc）函数重构。 300

例 7.1.1 在抽样定理的推导中，假定以 T_s 的整数倍进行抽样。如果以 T_s 作为抽样间隔，但是第一个采样点取自某个 t_0 上，其中 $0<t_0<T_s$，将会出现什么结果？

解： 定义一个新的信号 $y(t)=x(t+t_0)$，于是，$y(t)$ 是带限信号，$Y(f)=e^{j2\pi ft_0}X(f)$，并且 $y(t)$ 在 $\{kT_s\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 处的抽样值等于 $x(t)$ 在 $\{t_0+kT_s\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 处的抽样值。根据抽样定理对 $y(t)$ 进行重构，可得

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t-kT_s))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t_0+kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t-kT_s))$$

所以有

$$x(t+t_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t_0+kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t+kT_s))$$

代入 $t=-t_0$，得到下列的重要内插关系：

$$x(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t_0+kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t_0+kT_s)) \tag{7.1.11}$$ ◀

例 7.1.2 一个带限信号，其带宽等于 3400Hz。抽样速率为多少时才能保证有 1200Hz 的保护带？

解： 根据公式

$$f_s=2W+W_G$$

有

$$f_s=2\times3400+1200=8000$$

抽样之后，时间连续信号转换为时间离散信号。换句话说，对时间轴进行了量化。在这个步骤后，抽样值虽然在时间上是离散的，但是幅度仍然是连续的。模数转换的下一步是对信号幅度进行量化。这样将得到时间和幅度都离散的数字信号。 ◀

7.2 量化

抽样之后得到时间离散信号，即信号在 T_s 的整数倍处具有数值。然而，这些信号的幅度仍然是连续的。因为实数的基 2 表示通常是无限长的，所以实数传输需要无限数量的比特。抽样之后采用量化，可使幅度也转换成离散值。这样经过量化步骤得到的结果是时间离散、幅度有限的信号。其中每个抽样值可以用有限长度的比特序列表示。本节主要研究各种量化方法。首先介绍对抽样值单独进行量化的标量量化，然后再介绍对抽样块同时进行量化的矢量量化。 301

7.2.1 标量量化

在标量量化中，每个抽样会被转化成有限个电平之一，再将电平编码成一个二进制序列。量化过程实际上就是一个舍入过程，每个已抽样的信号点近似成一组可能的量化电平有限集合中的“最近”值。在标量量化中，实数集 $\mathbf{R}$ 被分割为 N 个不相交的子集，每一个都称为量化区间，用 $\mathcal{R}_k$ 表示，其中 $1\leqslant k\leqslant N$。对于每个子集 $\mathcal{R}_k$，选择一个与相应的表示点或者称为量化电平 $\hat{x}_k$，$\hat{x}_k$ 属于 $\mathcal{R}_k$。在时刻 i，信源输出 x_i 属于 $\mathcal{R}_k$，则表示为 $\hat{x}_k$，这就是 x 的量化值。接下来，$\hat{x}_k$ 可由二进制序列表示及传送，这一步就称为编码。由于量化

电平有 N 种可能，$\log_2 N$ 个比特就足够将这些电平编码成二进制序列[⊖]。因此，发射每个信源所需的比特数为 $R=\log_2 N$。用点 $\hat{x}_k$ 表示(舍入)落入区域 $\mathcal{R}_k$ 的抽样值，这种表示方法付出的代价就是引入了失真。

图 7-3 给出了一个 8 级电平量化方案的例子。在该方案中，8 个区域定义为 $\mathcal{R}_1=(-\infty,\alpha_1]$，$\mathcal{R}_2=(\alpha_1,\alpha_2]$，…，$\mathcal{R}_8=(\alpha_7,+\infty]$。每个区域的表示点(或者量化值)用 $\hat{x}_i$，如图中所示。量化函数 Q 定义为

302

$$Q(x)=\hat{x}_i,x\in\mathcal{R}_i \tag{7.2.1}$$

图 7-3 中也给出了这个函数。

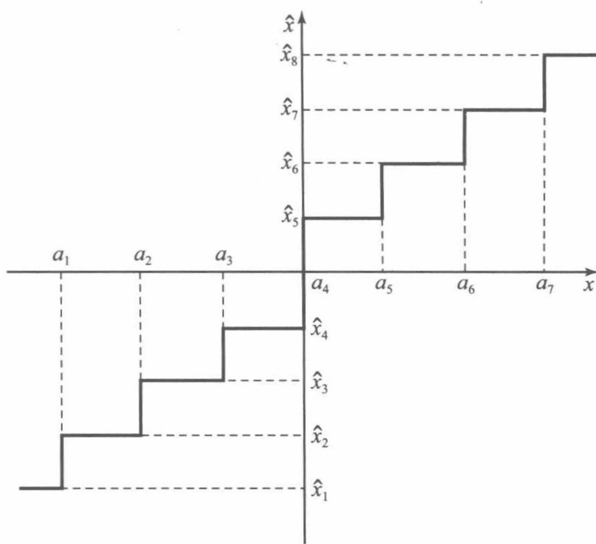


图 7-3　8 级电平量化方案举例

根据采用的失真度量方法，可以定义由量化产生的平均失真。衡量失真的常用指标就是平方误差失真，定义为 $(x-\hat{x})^2$，其中，x 是信号抽样值，$\hat{x}$ 是量化信号值，即 $\hat{x}=Q(x)$。如果采用平方误差失真度量，则有

$$d(x,\hat{x})=(x-Q(x))^2=\tilde{x}^2$$

其中，$\tilde{x}=x-\hat{x}=x-Q(x)$。因为 X 是随机变量，所以 $\hat{X}$ 和 $\tilde{X}$ 也是随机变量，因此平均失真可由下式给出

$$D=E[d(X,\hat{X})]=E(X-Q(X))^2$$

例 7.2.1 信源 $X(t)$ 是零均值的平稳高斯过程，其功率谱密度为

$$\mathcal{S}_X(f)=\begin{cases}2, & |f|<100\text{Hz}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

以奈奎斯特速率对信源进行抽样，每个抽样采用如图 7-3 所示的 8 级电平量化器量化。其中数值为 $\alpha_1=60$，$\alpha_2=-40$，$\alpha_3=-20$，$\alpha_4=0$，$\alpha_5=20$，$\alpha_6=40$，$\alpha_7=60$，并且 $\hat{x}_1=-70$，$\hat{x}_2=-50$，$\hat{x}_3=-30$，$\hat{x}_4=-10$，$\hat{x}_5=10$，$\hat{x}_6=30$，$\hat{x}_7=50$，$\hat{x}_8=70$，产生的失真和速率分别是多少？

解： 抽样频率 f_s 为 200Hz，每个抽样值都是零均值高斯随机变量，且根据式(5.2.18)和式(5.2.21)可得方差为

$$\sigma^2=E(X_i^2)=R_X(\tau)\big|_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{S}_X(f)\mathrm{d}f=\int_{-100}^{100}2\mathrm{d}f=400$$

由于每个抽样值采用 8 级电平量化，$\log_2 8=3$ 个比特足以表示抽样，因此可得码率为

⊖ N 通常选择为 2 的幂。如果不是，则需要的比特数取 $\lceil\log_2 N\rceil$，其中 $\lceil x\rceil$ 表示取大于或等于 x 的最小整数。为例简化推导过程，通常假设 N 为 2 的幂。

$$E = 3f_s = 600\text{bit/s}$$

为求失真，必须计算每个抽样值的 $E(X-\hat{X})^2$，这样有

$$D = E(X-\hat{X})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-Q(x))^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

其中 $f_X(x)$代表随机变量 X 的概率密度函数。由此可得

303

$$D = \sum_{i=1}^{8}\int_{\mathcal{R}_i}(x-Q(x))^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

或者等价于

$$D = \int_{-\infty}^{\alpha_1}(x-\hat{x}_1)^2 f_X(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=2}^{7}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}(x-\hat{x}_i)^2 f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{\alpha_7}^{\infty}(x-\hat{x}_8)^2 f_X(x)\mathrm{d}x \qquad (7.2.2)$$

其中 $f_X(x)$是$\frac{1}{\sqrt{2\pi 400}}e^{-\frac{x^2}{800}}$。将$\{\alpha_i\}_{i=1}^7$和$\{\hat{x}_i\}_{i=1}^8$代入上述积分，并根据 Q 函数表计算结果，最后得到$D\approx$ 33.38。注意如果使用每信源输出零比特，则即使采用最佳策略，也会使恢复信号等于零。此时，量化误差为 $D=E(X-0)^2=\sigma^2=400$。而本题中的量化方案及每信源输出 3 比特的传输可将失真降低到 33.38，减少因子为 11.98 或 10.78dB。 ◀

上面例子中选择均方失真或称为量化噪声 $E(X-Q(X))^2$ 作为性能衡量指标。一个更有意义的性能指标是量化噪声归一化值，这是对初始化信号功率进行归一化得到的量化噪声。

定义 7.2.1 如果随机变量 X 量化为 $Q(X)$，信号量噪比(SQNR)定义为

$$\text{SQNR} = \frac{E(X^2)}{E(X-Q(X))^2} \qquad (7.2.3)$$

当处理信号时，量化噪声功率为

$$P_{\tilde{X}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}E(X(t)-Q(X(t)))^2\mathrm{d}t \qquad (7.2.4)$$

信号功率是

$$P_X = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}E(X^2(t))\mathrm{d}t \qquad (7.2.5)$$

因此，信号量噪比为

$$\text{SQNR} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}} \qquad (7.2.6)$$

如果 $X(t)$是平稳的，则上述关系可以简化为式(7.2.3)，其中 X 是在任意点代表 $X(t)$的随机变量。

例 7.2.2 对于 7.2.1 给出的量化方案，计算其 SQNR。

解： 由例 7.2.1，可得 $P_X=400$ 及 $P_{\tilde{X}}=D=33.38$。因此

$$\text{SQNR} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}} = \frac{400}{33.38} \approx 10.78\text{dB}$$ ◀

304

均匀量化。 均匀量化器是最简单的标量量化器。在均匀量化器中，整个实轴被分为 N 个区间。除去 R_1 和 R_N，所有区间都是等长的，用 Δ 表示。这意味着当 $1\leqslant i\leqslant N-1$ 时，有 $\alpha_{i+1}-\alpha_i=\Delta$。进一步假设量化电平到边界 α_1，$\alpha_2\cdots\alpha_{N-1}$的距离为$\frac{\Delta}{2}$，图 7-3 就是一个 8 级电平均匀量化器的例子。均匀量化器中，均方误差失真如下：

$$D = \int_{-\infty}^{\alpha_1}\left(x-\left(\alpha_1-\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 f_X(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N-2}\int_{\alpha_1+(i-1)\Delta}^{\alpha_1+i\Delta}\left(x-\left(\alpha_1+i\Delta-\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\alpha_1+(N-2)\Delta}^{\infty}\left(x-\left(\alpha_1+(N-2)\Delta+\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 f_X(x)\mathrm{d}x \qquad (7.2.7)$$

因此，D 是两个设计参数 α_1 和 Δ 的函数。为了设计最佳的均匀量化器，必须对 D 关于上述变量求导，找到使 D 最小的参数值。

失真最小化是一个很繁琐的任务，要通过数值技术实现。表 7-1 给出了零均值单位方差高斯随机变量的最佳量化电平间隔。表中最后一列给出了量化之后的熵，有关熵的概念将在第 12 章中介绍。

表 7-1 高斯信源的最佳均匀量化器

输出电平序号 N	输出电平间距 Δ	均方误差 D	信息熵 $H(\hat{x})$	输出电平序号 N	输出电平间距 Δ	均方误差 D	信息熵 $H(\hat{x})$
1	—	1.000	0.0	19	0.2909	0.008 594	3.811
2	1.596	0.3634	1.000	20	0.2788	0.007 869	3.874
3	1.224	0.1902	1.536	21	0.2678	0.007 235	3.933
4	0.9957	0.1188	1.904	22	0.2576	0.006 678	3.990
5	0.8430	0.082 18	2.183	23	0.2482	0.006 185	4.045
6	0.7334	0.060 65	2.409	24	0.2396	0.005 747	4.097
7	0.6508	0.046 86	2.598	25	0.2315	0.005 355	4.146
8	0.5860	0.037 44	2.761	26	0.2240	0.005 004	4.194
9	0.5338	0.030 69	2.904	27	0.2171	0.004 687	4.241
10	0.4908	0.025 68	3.032	28	0.2105	0.004 401	4.285
11	0.4546	0.021 85	3.148	29	0.2044	0.004 141	4.328
12	0.4238	0.018 85	3.253	30	0.1987	0.003 905	4.370
13	0.3972	0.016 45	3.350	31	0.1932	0.003 688	4.410
14	0.3739	0.014 50	3.440	32	0.1881	0.003 490	4.449
15	0.3534	0.012 89	3.524	33	0.1833	0.003 308	4.487
16	0.3352	0.011 54	3.602	34	0.1787	0.003 141	4.524
17	0.3189	0.010 40	3.676	35	0.1744	0.002 986	4.560
18	0.3042	0.009 430	3.746	36	0.1703	0.002 843	4.594

摘自 Max (1960)；© IEEE。

非均匀量化。如果放宽等长量化区间这一条件，可以在较少限制条件下实现失真最小化。这样形成的量化器，其性能要优于具有同样量化电平数的均匀量化器。假设想要设计一个有 N 个量化电平的最佳均方差量化器，对量化区间没有其他限制。平均失真可表示为

$$D=\int_{-\infty}^{\alpha_1}(x-\hat{x}_i)^2 f_X(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{N-2}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}(x-\hat{x}_{i+1})^2 f_X(x)\mathrm{d}x+\int_{\alpha_{N-1}}^{\infty}(x-\hat{x}_N)^2 f_X(x)\mathrm{d}x \tag{7.2.8}$$

上式共有 $2N-1$ 个变量(α_1，α_2，…，α_{N-1}与$\hat{x}_1$，$\hat{x}_2$，…，$\hat{x}_{N-1}$)，需要控制这些变量实现 D 的最小化。对 D 关于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 求导，可得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}D=f_X(\alpha_i)[(\alpha_i-\hat{x}_i)^2-(\alpha_i-\hat{x}_{i+1})^2]=0 \tag{7.2.9}$$

这样就有

$$\alpha_i=\frac{1}{2}(\hat{x}_i+\hat{x}_{i+1}) \tag{7.2.10}$$

此结果说明在最佳量化器中，量化区间的边界是量化值的中点。由于量化是基于最小距离进行的，因此每个 x 量化到最近的一个$\{\hat{x}_i\}_{i=1}^N$。

为了确定量化值$\hat{x}_i$，要对 D 关于$\hat{x}_i$ 求微分，且定义 $\alpha_0=-\infty$和 $\alpha_N=+\infty$。则可得到

305 ~ 306

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{x}_i}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} 2(x-\hat{x}_i)f_X(x)\mathrm{d}x=0 \tag{7.2.11}$$

于是有

$$\hat{x}_i=\frac{\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} xf_X(x)\mathrm{d}x}{\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f_X(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.12}$$

式(7.2.12)表明在最佳量化器中，选择区间的量化值应该由该选择区间的质心确定。式(7.2.10)和(7.2.12)给出了标量量化器最优化的必要条件，即 Lloyd-Max 条件。最佳量化准则(Lloyd-Max 条件)可总结如下：

1. 量化区间的边界是相应量化值的中点(最近邻近定理)。
2. 量化值是量化区间的质心。

尽管这些准则很简单，但它们并不能给出设计最佳量化器的解析性方案。设计最佳量化器的通用方法是，从一组量化区间开始，根据第二条准则找到量化值。然后通过新的量化值设计新的量化区间，不断重复以上两步直到前后两步的失真变化不大。基于这种方法可以为具有不同统计特性的信源设计最佳量化器。表 7-2 给出了对于零均值单位方差的高斯信源，不同 N 值的最佳非均匀量化器。如果用均值为 m，方差为 σ^2 的普通高斯信源替代此信源，则表 7-2 中的 α_i 和$\hat{x}_i$ 大小也要被替换为$m+\sigma\alpha_i$ 和 $m+\sigma\hat{x}_i$，而表中的失真值 D 也要被σ^2D 替换。

表 7-2 高斯信号的最佳非均匀量化器

N	$\pm a_i$	$\pm \hat{x}_i$	D	$H(\hat{X})$
1	—	0	1	0
2	0	0.7980	0.3634	1
3	0.6120	0，1.224	0.1902	1.536
4	0，0.9816	0.4528，1.510	0.1175	1.911
5	0.3823，1.244	0，0.7646，1.724	0.07994	2.203
6	0，0.6589，1.447	0.3177，1.000，1.894	0.057 98	2.443
7	0.2803，0.8744，1.611	0，0.5606，1.188，2.033	0.044 00	2.647
8	0，0.5006，1.050，1.748	0.2451，0.7560，1.344，2.152	0.034 54	2.825
9	0.2218，0.6812，1.198，1.866	0，0.4436，0.9188，1.476，2.255	0.027 85	2.983
10	0，0.4047，0.8339，1.325，1.968	0.1996，0.6099，1.058，1.591，2.345	0.022 93	3.125
11	0.1837，0.5599，0.9656，1.436，2.059	0，0.3675，0.7524，1.179，1.693，2.426	0.019 22	3.253
12	0，0.3401，0.6943，1.081，1.534，2.141	0.1684，0.5119，0.8768，1.286，1.783，2.499	0.016 34	3.372
13	0.1569，0.4760，0.8126，1.184，1.623，2.215	0，0.3138，0.6383，0.9870，1.381，1.865，2.565	0.014 06	3.481
14	0，0.2935，0.5959，0.9181，1.277，1.703，2.282	0.1457，0.4413，0.7505，1.086，1.468，1.939，2.625	0.012 23	3.582
15	0.1369，0.4143，0.7030，1.013，1.361，1.776，2.344	0，0.2739，0.5548，0.8512，1.175，1.546，2.007，2.681	0.010 73	3.677
16	0，0.2582，0.5224，0.7996，1.099，1.437，1.844，2.401	0.1284，0.3881，0.6568，0.9424，1.256，1.618，2.069，2.733	0.009 497	3.765
17	0.1215，0.3670，0.6201，0.8875，1.178，1.508，1.906，2.454	0，0.2430，0.4909，0.7493，1.026，1.331，1.685，2.127，2.781	0.008 463	3.849
18	0，0.2306，0.4653，0.7091，0.9680，1.251，1.573，1.964，2.504	0.1148，0.3464，0.5843，0.8339，1.102，1.400，1.746，2.181，2.826	0.007 589	3.928

（续）

N	$\pm a_i$	$\pm \hat{x}_i$	D	$H(\hat{X})$
19	0.1092，0.3294，0.5551，0.7908，1.042，1.318，1.634，2.018，2.55	0，0.2184，0.4404，0.6698，0.9117，1.173，1.464，1.803，2.232，2.869	0.006 844	4.002
20	0，0.2083，0.4197，0.6375，0.8661，1.111，1.381，1.690，2.068，2.594	0.1038，0.3128，0.5265，0.7486，0.9837，1.239，1.524，1.857，2.279，2.908	0.006 203	4.074
21	0.09918，0.2989，0.5027，0.7137，0.9361，1.175，1.440，1.743，2.116，2.635	0，0.1984，0.3994，0.6059，0.8215，1.051，1.300，1.579，1.908，2.324，2.946	0.005 648	4.141
22	0，0.1900，0.3822，0.5794，0.7844，1.001，1.235，1.495，1.793，2.160，2.674	0.09469，0.2852，0.4793，0.6795，0.8893，1.113，1.357，1.632，1.955，2.366，2.982	0.005 165	4.206
23	0.09085，0.2736，0.4594，0.6507，0.8504，1.062，1.291，1.546，1.841，2.203，2.711	0，0.1817，0.3654，0.5534，0.7481，0.9527，1.172，1.411，1.682，2.000，2.406，3.016	0.004 741	4.268
24	0，0.1746，0.3510，0.5312，0.7173，0.9122，1.119，1.344，1.595，1.885，2.243，2.746	0.08708，0.2621，0.4399，0.6224，0.8122，1.012，1.227，1.462，1.728，2.042，2.444，3.048	0.004 367	4.327
25	0.08381，0.2522，0.4231，0.5982，0.7797，0.9702，1.173，1.394，1.641，1.927，2.281，2.779	0，0.1676，0.3368，0.5093，0.6870，0.8723，1.068，1.279，1.510，1.772，2.083，2.480，3.079	0.004 036	4.384
26	0，0.1616，0.3245，0.4905，0.6610，0.8383，1.025，1.224，1.442，1.685，1.968，2.318，2.811	0.08060，0.2425，0.4066，0.5743，0.7477，0.9289，1.121，1.328，1.556，1.814，2.121，2.514，3.109	0.003 741	4.439
27	0.07779，0.2340，0.3921，0.5587，0.7202，0.8936，1.077，1.273，1.487，1.727，2.006，2.352，2.842	0，0.1556，0.3124，0.4719，0.6354，0.8049，0.9824，1.171，1.374，1.599，1.854，2.158，2.547，3.137	0.003 477	4.491
28	0，0.1503，0.3018，0.04556，0.6132，0.7760，0.9460，1.126，1.319，1.529，1.766，2.042，2.385，2.871	0.07502，0.2256，0.3780，0.5333，0.6930，0.8589，1.033，1.118，1.419，1.640，1.892，2.193，2.578，3.164	0.003 240	4.542

摘自 Max (1960)；© IEEE。

例 7.2.3 如果使用同样电平数目的最佳非均匀量化器来代替图 7-3 所示的均匀量化器，则例 7.2.1 的结果会出现哪些变化？

解：首先根据表 7-2 查找出 $N=8$ 的量化区间和量化值。由于信源是 $N(0, 400)$的信源，即 $m=0$ 和 $\sigma=20$。因此，所有从表中读出的 a_i 和$\hat{x}_i$ 都需要乘以 $\sigma=20$，失真则需要乘以 400。这样就得到 $a_1=-a_7=-34.96$，$a_2=-a_6=-21$，$a_3=-a_5=-10.012$，$a_4=0$，$\hat{x}_1=-\hat{x}_8=-43.04$，$\hat{x}_2=-\hat{x}_7=-26.88$，$\hat{x}_3=-\hat{x}_6=-15.12$，$\hat{x}_4=-\hat{x}_5=-4.902$ 以及失真 $D=13.816$。所以 SQNR 为

307 ~ 308

$$\text{SQNR}=\frac{400}{13.816}=28.95\approx 14.62\text{dB}$$

该数值比均匀量化器性能提高 3.84dB。◀

7.2.2 矢量量化

在标量量化中，对离散时间信源(通常是对连续的时间信源进行抽样得到)的每个输出分别进行量化，然后进行编码。例如，如果使用 4 级电平标量量化器，每个电平编码成 2 个比特，则使用了每信源输出 2 比特。该量化方案如图 7-4 所示。

现在如果在同一时间考虑信源的两个抽样，并将两个抽样当成平面中的一个点，则量化器就将整个平面分割成 16 个量化区间，如图 7-5 所示。可以看出二维空间中的所有区域都是矩形。在二维空间中任意使用 16 个区域，则会得到更好的结果。这就意味着，使用 16 个区间同时量化 2 个信源输出相当于每 2 个信源对应 4 比特输出，或每 1 个信源对

应 2 比特输出。因此，同时量化两个抽样值的每信源输出比特数与标量量化时的每信源输出比特数是相等的。由于放宽了对矩形区间的要求，量化器的性能将得到提升。现在如果同时取 3 个抽样值，将三维空间分割成 64 个区域，这样在相同的每信源输出比特数条件下可以达到更小的量化失真。矢量量化的思想就是取长度为 n 的信源输出分组，并设计在 n 维欧氏空间中的量化器，而不是基于一维空间单个抽样的量化。 309

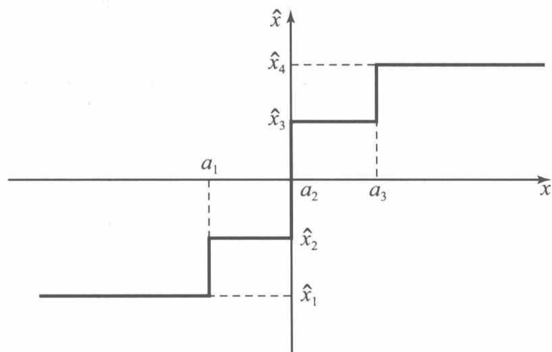


图 7-4 4 级电平标量量化器

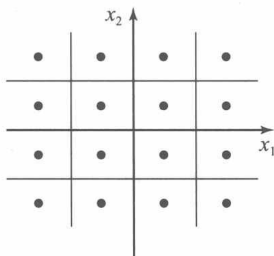


图 7-5 用于 2 个抽样值的 4 级标量量化

假设用$\mathscr{R}_i$ 表示 n 维空间中的量化区间，$1\leqslant i\leqslant K$。N 维空间被这 K 个区间分割。每个长度为 n 的信源输出分组可表示为 $\boldsymbol{x}\in R^n$，如果 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}_i$，则其量化为 $Q(\boldsymbol{x})=\hat{\boldsymbol{x}}_i$。图 7-6 给出了 $n=2$ 时的这种量化方案。由于共有 K 个量化值，用 $\log K$ 个比特足以表示这些值。这就意味着每 n 个信源输出需要 $\log K$ 个比特，或信源码率为

$$R=\frac{\log K}{n}\quad \text{比特 / 信源输出} \tag{7.2.13}$$

量化电平数为 K 的 n 维最佳量化器，应该选择使量化失真最小的各个区间$\mathscr{R}_i$ 和各个量化值$\hat{\boldsymbol{x}}_i$。采用与标量量化器中相同的过程，可以得到最佳矢量量化器最佳设计准则：

1. 区间$\mathscr{R}_i$ 是到$\hat{\boldsymbol{x}}_i$ 的距离比到其他任何$\hat{\boldsymbol{x}}_j$ 距离更近的 n 维空间中所有点的集合，即

$$\mathscr{R}_i=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_i\|<\|x-\hat{\boldsymbol{x}}_j\|,\forall j\neq i\}$$

2. $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ 是区域$\mathscr{R}_i$ 的质心，即

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i=\frac{1}{P(\boldsymbol{X}\in\mathscr{R}_i)}\int_{\mathscr{R}_i}\cdots\int\boldsymbol{x}f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x$$

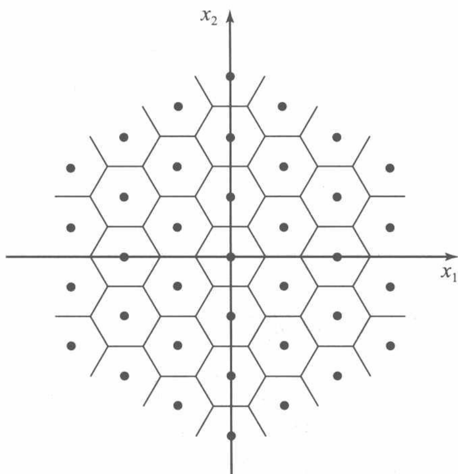


图 7-6 二维空间中的矢量量化

310

设计最佳矢量量化器的实际方法与标量量化器设计方法相同。首先给出一组给定的量化区域，通过准则 2 得出这些区域的最佳量化矢量，再根据准则 1 分割空间，这样反复进行，直到量化失真的改变可以忽略不计。

矢量量化在语音和图像编码中广泛运用着，现已提出许多针对降低其计算复杂度的方法。

7.3 编码

在编码的过程中，不同的量化值会分配给一个二进制序列。由于总共有 $N=2^v$ 个电平，所以 v 个比特足以完成编码过程。在这种方法中，每 v 个比特对应一个抽样，当抽样速率为 f_s 抽样/秒时，比特速率为 $R=vf_s$ 比特/秒。给量化电平分配比特可以通过多种方式。在标量量化器中，一种自然的编码方法是对不同的量化电平按照电平值升序，从最低

电平到最高电平分配给 0 到 $N-1$ 的数值。然后对这些电平 0 到 $N-1$ 分配二进制序列。因此，v个 0 分配给最低量化电平，$\underbrace{0\cdots0}_{v-1}1$ 分配给第二个最低电平，$\underbrace{0\cdots0}_{v-2}10$ 分配给再下一个量化电平，以此类推，$\underbrace{1\cdots1}_{v}$分配给最高量化电平。这种编码类型称为自然二进制编码，简称 NBC。编码的另一种方法是相邻量化的电平只相差一个比特的编码，这种编码类型称为格雷编码(Gray coding)。表 7-3 给出了 $N=16$ 级量化器的 NBC 和格雷编码。

311

表 7-3　16 级量化器的 NBC 和格雷编码

量化电平	电平编号	NBC 码	格雷编码
$\hat{x}_1$	0	0000	0000
$\hat{x}_2$	1	0001	0010
$\hat{x}_3$	2	0010	0011
$\hat{x}_4$	3	0011	0001
$\hat{x}_5$	4	0100	0101
$\hat{x}_6$	5	0101	0100
$\hat{x}_7$	6	0110	0110
$\hat{x}_8$	7	0111	0111
$\hat{x}_9$	8	1000	1111
$\hat{x}_{10}$	9	1001	1110
$\hat{x}_{11}$	10	1010	1100
$\hat{x}_{12}$	11	1011	1101
$\hat{x}_{13}$	12	1100	1001
$\hat{x}_{14}$	13	1101	1000
$\hat{x}_{15}$	14	1110	1010
$\hat{x}_{16}$	15	1111	1011

7.4　波形编码

波形编码的目的是在接收端以尽可能小的失真恢复信源的输出波形。我们在此不关心波形产生的技术，只关心在接收端高保真地恢复信源输出。信源结构不影响波形编码的设计，只有波形的性质会对此设计产生影响。因此，波形编码具有鲁棒性，并且当信源产生的波形具有一定相似性的时候，波形编码器可用于多种信源。本节将研究一些应用于多种信源的基本的波形编码方案。

312

7.4.1　脉冲编码调制

脉冲编码调制(PCM)是最简单且最早的一种波形编码技术。脉冲编码调制器由三个基本部分组成：抽样、量化和编码。PCM 系统的原理方框图如图 7-7 所示。在 PCM 中，我们做出以下假设：

1. 波形(信号)是最大频率为 W 的带限信号。因此，抽样速率 $f_s=2W$ 或更高时，能够完全恢复波形；

2. 信号幅度有限。即存在最大幅度 $x_{\max}$，对于所有 t，都有 $|x_t|\leqslant x_{\max}$；

3. 具有较大数量的量化电平 N，且 N 是 2 的幂($N=2^v$)。

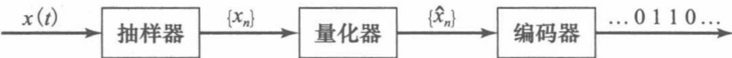


图 7-7　PCM 系统方框图

进入抽样器的波形是带宽为 W 的限带波形。通常在抽样器前放置一个带宽为 W 的滤波器来阻止带宽 W 外的分量进入抽样器。这个滤波器称为预抽样滤波器。抽样速率大于奈奎斯特速率，这就留出一定的保护带，使得抽样值能够进入量化器。量化器可以是均匀量化器，用于形成均匀 PCM 系统，也可以是非均匀量化器。选用哪种量化器由信源输出的特性决定。接下来，量化器的输出被编码成长度为 v 的二进制序列，其中 $N=2^v$ 是量化电平数目。

均匀 PCM。在均匀 PCM 中，我们假定量化器为均匀量化器。由于输入的抽样值范围为$[-x_{\max}, +x_{\max}]$，量化电平数目为 N，可以得到每个量化区间的长度为

$$\Delta=\frac{2x_{\max}}{N}=\frac{x_{\max}}{2^{v-1}} \tag{7.4.1}$$

均匀 PCM 中，选择量化区间的中点为量化值，因此，误差 $\tilde{x}=x-Q(x)$ 是取值范围为$\left(-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right]$的随机变量。在一般的 PCM 应用中，电平数($N$)通常很大，而输入信号的变化范围($x_{\max}$的幅度变化)很小。这意味着每个量化区域长度($\Delta$)较小。在这些假设下，误差 $\tilde{x}=x-Q(x)$ 可以由$\left(-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right]$范围内均匀分布的随机变量来精确地近似。即

$$f(\tilde{x})=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2}\leqslant\tilde{x}\leqslant\frac{\Delta}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

313

因此，利用式(7.4.1)可得由量化引入的失真(量化噪声)为

$$E[\tilde{x}^2]=\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}}\frac{1}{\Delta}\tilde{x}^2\mathrm{d}\tilde{x}=\frac{\Delta^2}{12}=\frac{x_{\max}^2}{3N^2}=\frac{x_{\max}^2}{3\times 4^v} \tag{7.4.2}$$

其中 v 是比特数/信源抽样值。则信号量化噪声比为

$$\text{SQNR}=\frac{P_X}{\tilde{X}^2}=\frac{3\times N^2P_X}{x_{\max}^2}=\frac{3\times 4^vP_X}{x_{\max}^2} \tag{7.4.3}$$

其中 P_X 是每个抽样值的功率。当 $X(t)$是广义平稳过程时，P_X 可由下式求得

$$P_X=R_X(\tau)\big|_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_X(f)\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x$$

注意到由于 $x_{\max}$是 X 的最大可能取值，所以有 $P_X=E[X^2]\leqslant x_{\max}^2$成立。则$\frac{P_X}{x_{\max}^2}<1$(通常情况下$\frac{P_X}{x_{\max}^2}\ll 1$)；因此，$3N^2=3\times 4^v$ 是均匀 PCM 中 SQNR 的上限值。同时也可得出，由于信源动态范围增加导致$\frac{P_X}{x_{\max}^2}$减小，均匀 PCM 中的 SQNR 随信源动态范围的增加而恶化。

以 dB 为单位表示 SQNR，如下式

$$\text{SQNR}\big|_{\text{dB}}\approx 10\log_{10}\frac{P_X}{x_{\max}^2}+6v+4.8 \tag{7.4.4}$$

可以看出每增加一位比特(v 增加 1)，SQNR 增加 6dB。由此可以根据所需的 SQNR 估计需要多少额外的比特。

例 7.4.1 在使用 256 个量化电平的均匀 PCM 中，当信号均匀分布于$[-1, 1]$区间时，得到的 SQNR 为多少?

解：$P_X=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，因此，根据 $x_{\max}=1$ 和 $v=\lg 256=8$ 可以得到

$$\text{SQNR} = 3 \times 4^v \times P_X = 4^v = 65\,536 \approx 48.16\text{dB} \tag{7.4.5}$$ ◀

以 PCM 系统为例的脉冲传输系统，有关其带宽需求问题将在第 10 章详细阐述。本章简要讨论 PCM 系统中带宽需求问题的一些结果。如果一个信号带宽为 W，则完整恢复信号所需的最小采样速率由抽样定理给出，即 $2W$ 抽样值/秒。如果需要一定的保护带，则抽样速率需大于 $2W$。每个抽样点使用 v 个比特编码，因此传输 PCM 信号需要的总速率为 vf_sbps。当使用奈奎斯特速率抽样时，总速率为 $2vW$bps。二进制传输 Rbps（更精确的描述为 R 脉冲/秒）所需最小带宽为 $\frac{R}{2}$（见第 10 章）㊀。因此 PCM 系统所需最小带宽为

314

$$\text{BW}_{\text{req}} = \frac{vf_s}{2} \tag{7.4.6}$$

采用奈奎斯特抽样速率时，给出脉冲传输的绝对最小带宽

$$\text{BW}_{\text{req}} = vW \tag{7.4.7}$$

这说明 PCM 系统将原信号带宽至少扩展了 v 倍。

非均匀 PCM。 只要输入信号的统计特性接近均匀分布，均匀 PCM 就能很好地工作。但是，对一些信号例如语音信号进行编码时，输入信号的分布与均匀分布相差很远。特别是对于语音信号波形，较小幅度信号出现的概率大而大幅度信号出现的概率小。因此，需要设计一个这样的量化器：在小幅度区域有较多的量化区间而在大幅度区域有较少的量化区间。这个量化器是同时具有不同大小的量化区间的非均匀量化器。

进行非均匀量化㊁的一个常用方法是，首先通过一个非线性器件，压缩信号的大幅值（减少信号动态范围），然后对输出信号进行均匀量化。在接收端进行与上述非线性操作相反的逆操作（扩张），以获得抽样值。这种技术称为压扩（压缩-扩张）技术。该系统的方框图如图 7-8 所示。

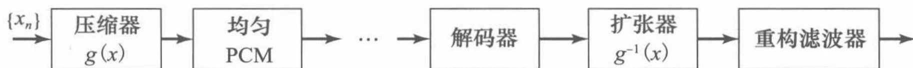


图 7-8 非均匀 PCM 系统的方框图

有两种广泛应用于语音信号编码的压缩扩张器。美国和加拿大使用的 μ 律压缩扩张器，在发送端采用了对数函数，其中 $|x| \leqslant 1$：

$$g(x) = \frac{\log(1+\mu|x|)}{\log(1+\mu)}\text{sgn}(x) \tag{7.4.8}$$

参数 μ 控制压缩和扩张的程度。美国和加拿大标准的 PCM 系统采用 $\mu=255$ 的压缩扩张器，后接一个 8bit/抽样值的均匀量化器。在此系统中采用一个压缩扩张器使系统性能大约提高 24dB。图 7-9 反映了 $\mu=0$，5，255 时 μ 律压缩扩张器的特性曲线。

315

第二种广泛应用的对数压缩是 A 律压缩扩张器。其特性由下式描述

$$g(x) = \frac{1+\log A|x|)}{1+\log A}\text{sgn}(x) \tag{7.4.9}$$

A 的取值接近 87.65。这种压缩扩张器的性能与 μ 律压缩扩张器的性能相近。图 7-10 反映了 $A=1$，2 和 87.56 时 A 律压缩扩张器的特性曲线。

㊀ 更实际的带宽要求是 $\frac{R}{\alpha}$，其中 $1<\alpha<2$。

㊁ 有时，也采用非线性量化（nonlinear quantization）这个术语。但这个说法有歧义，因为所有量化，包括均匀的和非均匀的，都是非线性的。

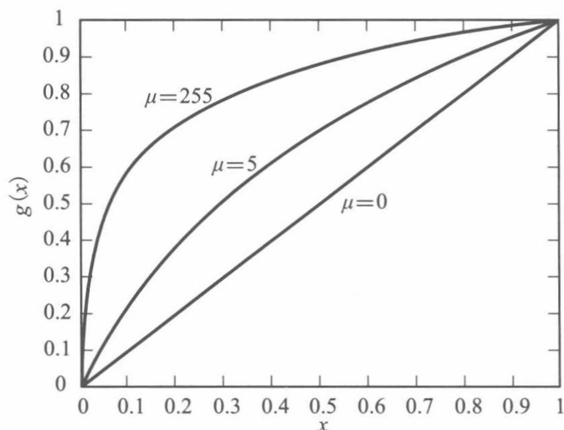


图 7-9　μ 律压缩扩张器的特性曲线

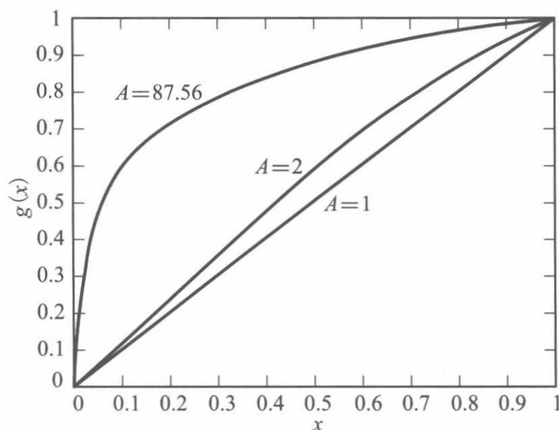


图 7-10　A 律压缩扩张器的特性曲线

7.4.2 差分脉冲编码调制

在 PCM 系统中，对信息信号抽样之后，每一个抽样值由标量量化器进行独立地量化。这意味着之前的抽样值不会对新的抽样值的量化产生影响。然而，当一个限带随机过程以奈奎斯特速率或者更高速率抽样时，抽样值通常是相关的随机变量。除非随机过程的频谱在带宽范围内是平坦的。这说明，前一个抽样值给出了下一个抽样值的部分信息。因此，可以利用这部分信息以提高 PCM 系统的性能。例如，如果前一个抽样值很小，下一个抽样值也很小的概率就很大，那么就没有必要量化很大范围的值来达到较好的性能。 316

在最简单的差分编码调制(DPCM)中，对两个相邻抽样值的差值进行量化。由于相邻抽样值之间的相关性很大，差值变化范围很小，因此要达到特定水平的性能，所需的量化电平更少(也就是比特数更少)。这就意味着 DPCM 能够在使用更小比特率的情况下达到与 PCM 相同水平的性能。

图 7-11 说明了这种简单的 DPCM 方案的方框图。如图所示，量化器的输入并不是简单的 $X_n - X_{n-1}$，而是 $X_n - \hat{Y}'_{n-1}$。稍后将会看到$\hat{Y}'_{n-1}$与 X_n 是密切相关的，而且这样选择的优势在于阻止量化噪声积累。量化器的输入 Y_n 通过标量量化器(均匀或非均匀)量化为 $\hat{Y}_n$。利用关系式

$$Y_n = X_n - \hat{Y}'_{n-1} \tag{7.4.10}$$

317

和

$$\hat{Y}'_n = \hat{Y}_n + \hat{Y}'_{n-1} \tag{7.4.11}$$

可以得到量化器输入端和输出端之间的量化误差

$$\hat{Y}_n - Y_n = \hat{Y}_n - (X_n - \hat{Y}'_{n-1}) = \hat{Y}_n - X_n + \hat{Y}'_{n-1} = \hat{Y}'_n - X_n \tag{7.4.12}$$

在接收端，有

$$\hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1} \tag{7.4.13}$$

比较式(7.4.11)和(7.4.13)，可以看出，在相同激励函数 Y_n 下，$\hat{Y}'_n$ 和$\hat{X}_n$ 满足相同的差分方程。因此，如果$\hat{Y}'_n$ 和$\hat{X}_n$ 的初始条件相同，则它们就是相等的。例如，如果我们使 $\hat{Y}'_{-1} = \hat{X}_{-1} = 0$，则对于所有的 n 都有$\hat{Y}'_n = \hat{X}_n$。将该式代入到式(7.4.12)可得

$$\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n \tag{7.4.14}$$

这表明，X_n 和其恢复值$\hat{X}_n$ 之间的量化误差，与量化器输入和输出之间的量化误差相等。然而，与 X_n 的变化范围相比，Y_n 的变化范围要小得多，因此 Y_n 可以由更少的比特数进行量化。

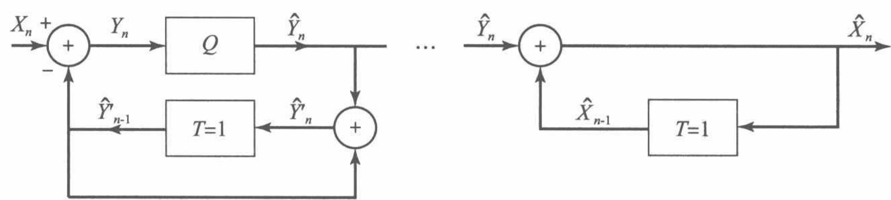


图 7-11　简单的 DPCM 编码解码器

例 7.4.2 语音信号带宽受限于 3kHz，抽样速率为 8kHz。要达到 PCM 在 8 比特/抽样值时的失真性能，DPCM 只需要 4 比特/抽样值。求 PCM 和 DPCM 编码信号所要求的比特率。

解：对于 PCM，有

$$R = vf_s = 8 \times 8000 = 64\,000\text{bps}$$

对于 DPCM

$$R = vf_s = 4 \times 8000 = 32\,000\text{bps}$$

◀

7.4.3　增量调制

增量调制(DM)是如图 7-11 所示的 DPCM 系统的一个简化版本。在增量调制中，量化器是幅度为$\pm\Delta$的 1 比特(两级)量化器。DM 系统的方框图如图 7-12 所示。在简单 DPCM 系统中的分析在本小节中同样适用。

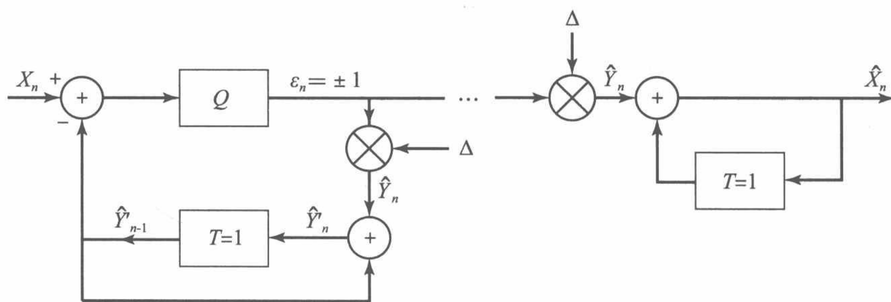


图 7-12　增量调制

在 DM 中，每一个抽样值只使用 1 比特，所以除非 Y_n 的动态范围很小，否则量化噪声会很高。换言之，这意味着 X_n 和 X_{n-1}必须有较高的相关系数。为了实现这一点，我们必须以远高于奈奎斯特采样速率的速率进行采样。因此，在 DM 中，抽样速率通常远大于奈奎斯特速率，但是由于每一个抽样值的比特值只是 1，所以传输波形每秒所需的总比特数可能比 PCM 系统少。

318

DM 系统一个主要的优点是系统的结构非常简单。在接收端，我们采用如下关系式来重构$\hat{X}_n$：

$$\hat{X}_n - \hat{X}_{n-1} = \hat{Y}_n \tag{7.4.15}$$

由上述方程解$\hat{X}_n$，并且假设初始条件为零，有

$$\hat{X}_n = \sum_{i=0}^{n} \hat{Y}_i \tag{7.4.16}$$

这说明为了得到$\hat{X}_n$，只需得到$\hat{Y}_n$ 的累加和。如果抽样值由脉冲代表，累加值将会是简单的积分器。这就简化了 DM 系统的方框图，如图 7-13 所示。

在设计 DM 系统时，步长 Δ 是一个十分重要的参数。大的 Δ 值可以使调制器跟上输入信号的快速变化；但是当输入变化缓慢时，会引起大量的量化噪声。这种情况如图 7-14 所示。对于大的 Δ 值，当输入变化缓慢，大的量化噪声出现，这被称为*颗粒噪声*。太小的

319

Δ 值的情况如图 7-15 所示。在这种情况下，当输入信号迅速变化时就会出现问题。当输入

快速变化(高输入斜率)，输出将要花费很长时间才能跟上输入的变化，在这段时间内就会产生大量的量化噪声。这种由输入斜率过高引起的失真叫做斜率过载失真。

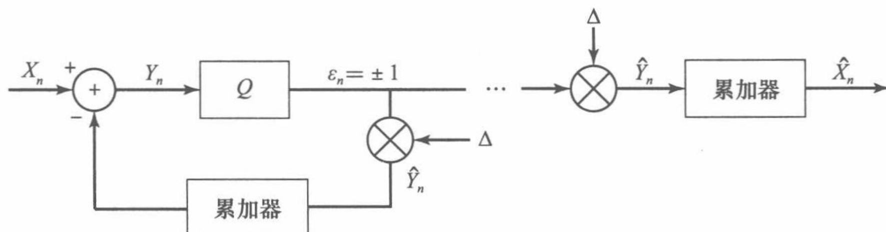
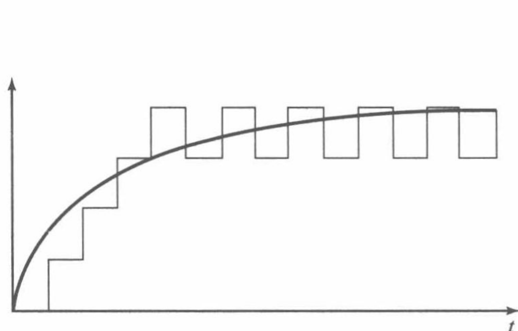


图 7-13 含有积分器的增量调制



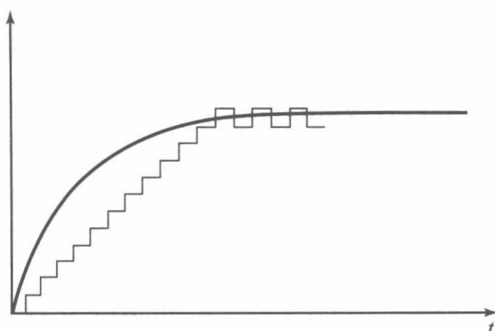


图 7-14 大 Δ 和粒状噪声

图 7-15 小 Δ 和斜率过载失真

自适应增量调制。可以看出，步长太大引起粒状噪声，步长太小引起斜率过载失真。这意味着好的 Δ 的选择应该是“中等”值。但在有些情况下，最佳中等值(即能使均方失真最小的中等值)的性能也不令人满意。在这些情况下，一个有效的办法是根据输入的变化改变步长大小。如果输入变化很快，则步长需大一些，那么输出才能快速地跟上输入且不会导致斜率过载失真。当输入比较平坦时(缓慢变化)，步长大小变小以避免颗粒噪声。这种步长的变化如图 7-16 所示。

为了自适应地改变步长，我们需要设计一个能识别输入信号斜率大小的机制。如果输入信号斜率较小，则量化器的输出$\hat{Y}$在 Δ 和 −Δ 之间来回变换，如图 7-16 所示。这种情况下，粒状噪声是噪声的主要来源，所以我们需要降低步长。然而，在斜率过载的情况下，输出不能很快地跟上输入的变化，量化器的输出是连续的 Δ 或者连续的 −Δ。我们可以看出，两个连续$\hat{Y}_n$ 的符号就是用于改变步长的一个很好的判断准则。如果连续两个输出具有相同的符号，则增大步长；如果是相反的符号，则减小步长。

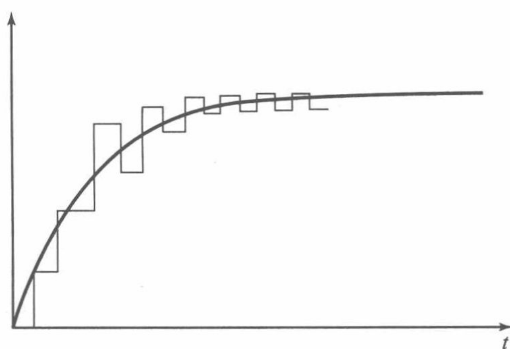


图 7-16 自适应增量调制的性能

320

改变步长的一个简单准则由下式给出

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\varepsilon_n \times \varepsilon_{n-1}} \tag{7.4.17}$$

其中 ε_n 是步长缩放之前量化器的输出，K 是大于 1 的常量。已经证明在 20 至 60kbps 速率范围内，选择 $K=1.5$，自适应增量调制系统处理语音信号时，其性能比 DM 系统提高 5 至 10dB。

7.5 分析-合成技术

与波形编码相反，分析-合成技术是一种基于波形产生机制模型的方法。从信源波形提取的模型参数经过量化、编码然后传输到接收端。在接收端，根据接收到的信息，合成同样的模型进而生成与原始波形相似的输出。这种系统主要用于语音编码。在本节中，我们将简要地介绍线性预测编码(LPC)系统。

语音是声带通过声道激励而产生的结果。这种机制可以通过一个由信号发生器激励的时变滤波器(声道)来建模。声道由咽喉、嘴、舌头、嘴唇和鼻子组成。它们能够在讲话时改变形状，因此，可以将其建模为一个时变系统。激励信号的性质很大程度上取决于语音的种类，即浊音或清音。对于浊音，激励可以建模为一个频率为 f_0 的周期脉冲序列，具体取值取决于说话者。频率的倒数$\frac{1}{f_0}$称为音调周期。对于清音，激励可以被很好地建模为321白噪声。这种模型如图 7-17 所示。声道滤波器通常建模为一个全极点滤波器，由以下差分方程描述

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{n-i} + G w_n \tag{7.5.1}$$

其中 w_n 表示输入序列(白噪声或脉冲)，G 是增益参数，$\{a_i\}$是滤波器系数，而 p 是滤波器极点数目。过程 w_n 表示 X_n 中不包括前面 p 个抽样值的部分，称为更新过程。

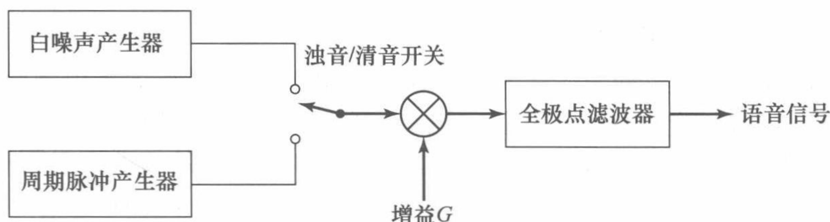


图 7-17 语音产生机制模型

由于声道无法瞬间改变，可知语音信号在短周期内是平稳过程，如 20～30ms。因此，在 20～30ms 的间隔内，可假设全极点滤波器的系数不变。在译码器中，我们观察一个 20～30ms 的语音记录，由此估计模型参数$\{a_i\}$、激励信号类型(白噪声或脉冲)、音调周期$\frac{1}{f_0}$(若语音为浊音)和增益参数 G。

为了详细阐述该过程，假设语音信号经过 3kHz 的低通滤波并以 8000 抽样点/秒的速率进行抽样。将信号抽样值序列划分为含有 160 个抽样的数据块，对应 20ms 的时间间隔。设每个数据块的抽样序列为$\{x_n,\ 1 \leqslant n \leqslant 160\}$。编码器必须测出要发送到接收端的模型参数。

在编码器处，用线性预测来确定滤波器参数。p 阶线性预测器是一个全零点的数字滤波器，输入为$\{x_n\}$，输出为

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{7.5.2}$$

假设 $x_n=0$ 在所考虑区间之外。图 7-18 给出了预测过程的功能方框图。实际语音抽样值 x_n 和预测值$\hat{x}_n$ 之间的差值构成了预测误差 e_n，即

322

$$\mathrm{e}_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k} \tag{7.5.3}$$

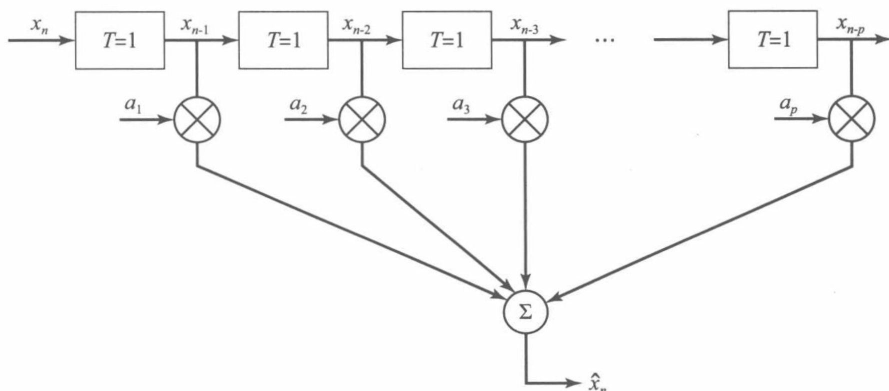


图 7-18 线性预测的功能方框图

为了从 X_n 前面的值中得到尽可能多的信息，选择系数$\{a_i\}$使得平方误差项的平均值(如下式)最小

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_n^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k}\right)^2 \qquad (7.5.4)$$

对$\mathscr{E}_p$关于每个预测滤波器系数$\{a_i\}$求偏导，使导数为零，则可得到一组求解滤波器系数的线性方程，即

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_{n-i} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k} x_{n-i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p \qquad (7.5.5)$$

已经假设在平稳区间 $1 \leqslant n \leqslant N$ 之外有 $x_n = 0$，则上式可写为

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n x_{n-i} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k} x_{n-i} = \sum_{k=1}^{p} a_k \left[\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} x_{n-i}\right] \qquad (7.5.6)$$

如果定义

$$\hat{R}_i = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n x_{n-i} \qquad (7.5.7)$$

323

则(7.5.6)可写为

$$\hat{R}_i = \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{R}_{i-k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p \qquad (7.5.8)$$

该方程称为 Yule-Walker 方程。也可将该方程写成矩阵形式

$$r = \hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{a} \qquad (7.5.9)$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是线性预测器的系数矢量，$\hat{\boldsymbol{R}}$是 $p \times p$ 矩阵，其第$(i,\ j)$个元素为$\hat{R}_{i-j}$，而 $\boldsymbol{r}$ 是分量为$\hat{R}_i$ 的矢量。由$\hat{R}_i$ 的定义容易验证：

$$\hat{R}_i = \hat{R}_{-i} \qquad (7.5.10)$$

因此，矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}$是对称矩阵。同时也可看出，$\hat{\boldsymbol{R}}$中所有与对角线平行的线上元素是相同的，这样的矩阵称为 Toeplitz 矩阵。且有一种有效的递归算法来求其逆矩阵，这样通过求解式(7.5.9)可得预测系数矢量。这种算法即著名的 Levinson-Durbin 算法。可以查阅列在本章后面的参考文献得到关于该算法的细节。

对于预测器系数的最佳选择，平方误差项可以表示为

$$\mathscr{E}_p^{\min} = \hat{R}_0 - \sum_{k=1}^{p} \hat{R}_k \qquad (7.5.11)$$

根据语音生成模型

$$\mathscr{E}_p^{\min} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[x_n - \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k}\right]^2 = G^2\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} w_n^2 \qquad (7.5.12)$$

如果对激励序列$\{w_n\}$归一化，如$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}w_n^2=1$，则可得增益参数的值

$$G=\sqrt{\mathscr{E}_p^{min}} \tag{7.5.13}$$

估计此类激励(脉冲或噪声)以及音调周期(当激励中包含脉冲时)，可使用多种算法。一种简单的方法是将语音数据变换到频域，并从信号频谱中寻找尖锐峰值。如果峰值出现在某个基频处，则激励是以该频率的倒数为周期的周期脉冲串。若语音抽样频谱没有尖锐峰值，则激励为白噪声。

324

对已抽样语音信号的每一个分组，将其预测滤波器的系数、增益、浊音-清音信息和音调周期都进行量化并发送到接收端。用如图7-17所示的模型可将这些参数合成出语音信号。典型情况下，浊音-清音信息需要1比特表示，音调频率需要6比特，增益参数通过对数压扩只需5比特，预测器系数需要8－10比特/系数。由线性预测编码，语音的比特速率可以压缩到2400bps。量化LPC参数也可选择矢量量化，以进一步降低比特率。相反，采用PCM传送语音需要64 000bps的比特率。

LPC广泛应用于语音编码来减少带宽。通过对LPC参数进行矢量量化，在移动(蜂窝)通信系统中，可在低于10 000bps的速率下得到较好质量的语音。

7.6 数字音频传输及记录

音频信号占据了日常通信的很大一部分。如今，成千上万的无线电台以模拟的形式进行音频广播。只要语音信号能让人理解，语音信号广播的质量就是大体可以接受的。另一方面，通过AM无线电广播的音乐信号的质量保真度相对较低，这是因为发送信号的带宽受到了规划的限制(在美国是由联邦通信委员会来管理)。模拟信号的FM无线电广播通过使用大的信道带宽发送信号来提供高保真质量。随着卫星无线系统的应用，数字形式的音频信号商用无线电广播已经投入使用。

在过去的几十年中，通过电话信道传输音频信号，基本完成了由模拟传输向数字传输的转变。下面将介绍电话传输中音频信号数字编码的一些最新发展情况。

受益于模拟信号向数字形式的转换。娱乐产业已经发生了惊人的变化。光盘(CD)播放机和数字音频磁带录音机的发展，使得以前的模拟录音系统遭到淘汰。本章将以CD播放机作为研究对象，分析过去几年发展起来的、用于数字音频系统的复杂信源编解码及信道编译码技术。

7.6.1 电话传输系统中的数字音频信号

目前几乎所有通过电话信道传输的语音信号都是数字的。在过去的50年，电话信道中语音信号的编码一直是个热门的研究领域，发展出了许多语音信源的编码方法，其中许多方法已经得到使用。

325

语音信号编码器的一般结构如图7-19所示。因为语音信号的频率范围限制在3200Hz以下，所以语音信号应首先通过一个抗混叠低通滤波器，再进行抽样。为了保证混叠足够小以至于可忽略，通常采用8000Hz或更高的抽样速率。然后，对模拟抽样进行量化，并以数字方式在电话信道中传输。

在数字语音传输中，广泛使用PCM和DPCM波形编码方案。根据式(7.4.8)，$\mu=255$的对数压缩通常用于非均匀量化。PCM的典型比特率为64 000bps，而DPCM的典型比特率为32 000bps。

PCM和DPCM的编译码通常在电话中心局完成，其中电话线把某一地理区域内的用户连接到电话传输系统。在一种被称为干线的线路上，经过PCM或DPCM编码的语音信号以数字的方式从一个电话中心局传送到另一个电话中心局，并且这个干线能传输许多用

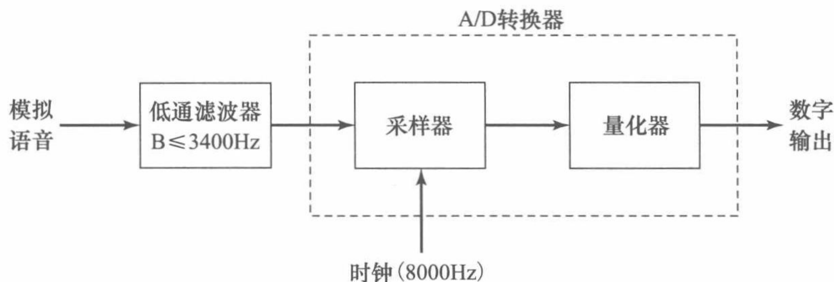


图 7-19 一般语音编码器

户的数字语音信号。这种在公用通信信道上同时传输多路信号的技术称为多路复用技术。在 PCM 和 DPCM 的传输中，来自不同用户的信号在时间上复用，因此称其为时分复用（TDM）。在 TDM 中，选择给定的时间间隔 T_f 作为一帧，每帧再细分为 N 个持续时间为 T_f/N的时隙，其中 N 对应为使用公共信道的用户数目。于是，每个希望使用该信道的用户在每帧中得到一个时隙。在 PCM 中，每个用户在每个时隙中发送 8 比特的抽样值。

通过 PCM 在电话线上进行数字语音的传输，已经建立了一种适用于多用户的标准 TDM 体系结构。在 TDM 体系的第一级，24 路数字用户通过时分复用形成一个 1.544Mbps(24×64kbps 再加上一些控制比特)的高速数据流。得到的复合 TDM 信号通常称为 DS-1 信道。在 TDM 的第二级，4 路 DS-1 信道复用成比特率为 6.312Mbps 的 DS-2 信道。在第三级，7 路 DS-2 信道通过 TDM 复合成比特率为 44.736Mbps 的 DS-3 信道。在 DS-3 信道之上，还有两级或更多的 TDM 层次结构。图 7-20 所示为用于北美电话系统的 TDM 体系结构。 326

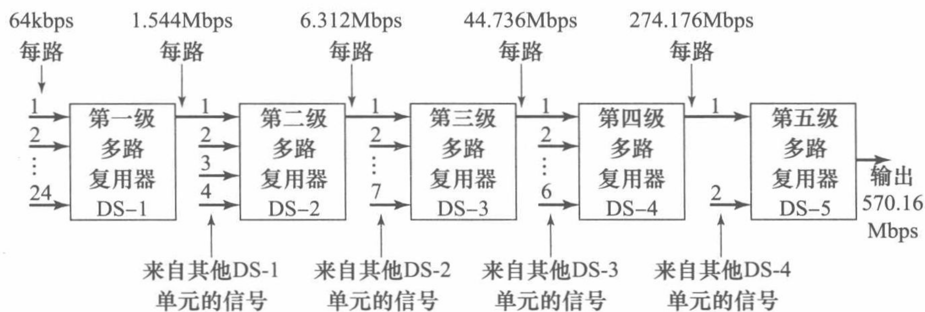


图 7-20 用于北美电话系统的 TDM 体系结构

在用来传输语音信号的移动蜂窝无线系统中，每个用户可得到的比特率很小，不能支持波形编码如 PCM 和 DPCM 所需的高比特率。对于这个应用，采用如 7.5 节所描述的基于 LPC 分析合成方法来估测语音信号短音段的模型参数采集。语音模型参数进行矢量量化后通过信道传输。这样，采用 LPC 可以实现 4800～9600bps 范围的比特率。

在移动蜂窝通信系统中，每个小区基站的作用相当于连接陆地电话系统的接口。只有在用户与基站之间的无线传输才需要使用 LPC 语言压缩。在基站接口处，LPC 编码的语音信号转换为 PCM 或 DPCM，分别以速率 64 000bps 或 32 000bps 在陆地电话系统中传输。因此要注意从移动用户到固定用户的语音信号将经过两种不同类型的编码，而由陆地电话系统连接的不同基站中的移动用户在通信时，其语音信号要经历四次编译码操作。

7.6.2 数字音频录制

在 19 世纪下半叶，留声机的发明使得音频录制得以实现。留声机存在了大约 100 年，

然后被 1982 年出现的光盘取代。在这 100 年间，出现了各种录音技术，最流行的是 1948 年出现的长时间播放唱片(LP)。LP 唱片提供了相对高质量的模拟音频录制。

尽管 LP 唱片被普遍接受且受到广泛欢迎，但是模拟音频录制仍具有许多局限性，包括有限动态范围(典型值 70dB)和相对低的信噪比(典型值在 60dB 左右)。与之相比，管弦乐的动态范围高达 100～120dB。这就意味着，如果我们以较小的音乐电平通过模拟的方式录制音乐，就会出现可以听见的噪声，如果想避免噪声，在高音乐电平时则会达到饱和。

327

数字音频录制和重放则允许我们通过增加动态范围和信噪比来改善录制音乐的高保真度。此外，数字录音更耐久，其性能不会随着播放时间的延长而恶化，而模拟录音往往会出现这种情况。接下来，我们将介绍 1982 年出现的，在商业上获得巨大成功的数字音频系统—光盘(CD)。表 7-4 提供了 LP 唱片和 CD 系统的一些重要指标的对比。后者优势十分明显。

表 7-4 LP 唱片和 CD 系统的比较

指标/特性	LP 唱片	CD 系统
频率响应	30～20kHz ±3dB	20Hz～20kHz +0.5/−1dB
动态范围	70dB 1kHz	>90dB
信噪比	60dB	>90dB
谐波失真	1%～2%	0.005%
持久性	随着不断播放，高频响应性能下降	永久
记录针寿命	500～600 小时	5000 小时

从系统观点来看，CD 系统包含了现代数字通信系统所具有的大部分组成元素，包括模数转换(A/D)和数模转换(D/A)、内插、调制/解调和信道编/译码。CD 数字音频系统的组成方框图如图 7-21 所示。接下来，我们将介绍信源编码和译码器的主要特征。

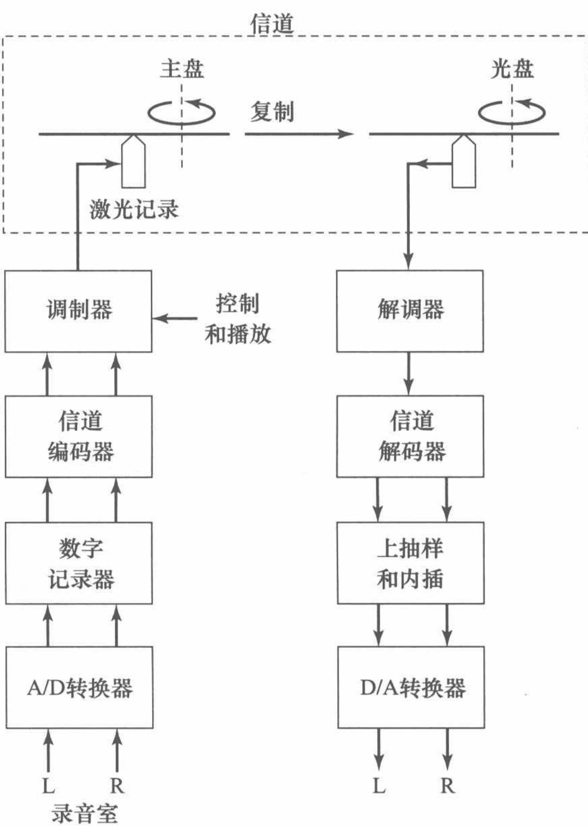


图 7-21 CD 数字音频系统

在录音室或音乐厅里，对来自左(L)和右(R)麦克风的两路音频信号进行抽样，并通过一个 A/D 转化器进行数字化。回顾以前知识，可听见的声音频带大约为 20kHz。因此，相应的奈奎斯特抽样速率为 40kHz。为了留出一定的频率保护带以防止混叠，CD 系统中的抽样速率一般为 44.1kHz。这个频率与用于磁带音频信号数字录音的视频记录设备一致。

L 信号和 R 信号的抽样都使用 16 比特/抽样值的均匀 PCM 进行量化。根据式(7.4.4)给出的 SQNR 计算公式，16 比特均匀量化会得到 90dB 以上的 SQNR。此外，总的谐波失真为 0.005%。然后对来自数字录制设备的 PCM 字节进行编码，

以预防在读取过程中的信道误码，接着将其送至调制器。

在调制器处，除了光盘内容表之外，还添加了一些数字控制和显示信息。这些信息支持CD播放机具有的可编程性。

运用激光技术，把调制器输出的数字信号刻录到表面涂有光阻材料的玻璃磁盘表面。通过一系列过程，最后将信息转换为塑料盘片上的信息坑，这样就产生了用于生产CD的主盘。这种磁盘表面会涂上一层反射铝，外面再涂上一层保护漆。

在CD播放机中，激光以1.25m/s的恒定速率光扫描磁盘上的磁道，阅读数字机路信号。L和R信号经过解调之后通过信道译码器，再通过D/A转换器，数字音频信号就重新转换为模拟信号。

328～329

进入D/A转换器的数字音频信号L和R具有16比特的精度。从原理上讲，抽样速率为44.1kHz的两路16比特信号的数模转换相对比较简单。然而，一个16比特D/A转化器的实现却十分昂贵。而不太昂贵的12比特精度(或更低)的D/A转换器却很容易得到。问题是需要为采用低精度的D/A转换设计一种方案，使用低成本的D/A转换器同时保持数字音频信号的16比特精度。

这个问题的解决方案是，通过内插进行过抽样并在模拟转换之前进行数字滤波，用以扩展数字音频信号的带宽。基本方法如图7-22。16比特的L和R数字音频信号，通过在连续的16比特信号抽样值中插入$U-1$个零点得到U倍上抽样。这个过程有效地使得抽样速率增加到$U\times 44.1$kHz。然后高速L和R信号通过有限长度冲激响应(FIR)数字滤波器进行滤波，产生高速、高精度的输出上抽样和滤波相结合是实现数字内插器的一种实际方案。FIR滤波器的设计是为了获得线性相位以及大约20kHz的带宽。该滤波器的目的是消除由上抽样过程产生的频谱镜像，因而有时称之为反镜像滤波器。

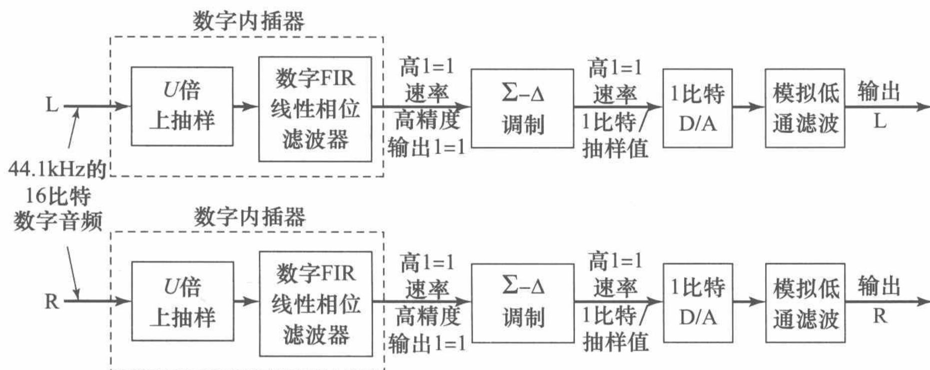


图7-22 过抽样与数字滤波

如果观察FIR数字滤波器输出的高抽样速率、高精度L和R数字音频信号，就可以发现连续的抽样值基本上是相同的，只是低阶比特不一致。因此，可以用差值表示数字音频信号的连续抽样值，这样就可以降低信号的动态范围。如果过抽样因子U充分大，就可以采用增量调制使得量化输出降低到1比特/抽样值的精度。这样可以极大地简化D/A转换器。实际中通常采用过抽样因子的值为256，抽样速率达到11.2896MHz。

回顾以前关于普通增量调制系统的知识，其一般结构如图7-23所示。假如将积分器从译码器处移到DM的输入端，会产生两种影响：第一，对输入信号的低频分量进行了预加重处理，这样就增加了进入DM系统中信号的相关性；第二，简化了DM译码器，因为译码器中的微分器(逆向系统)可以通过积分器相互抵消，于是译码器便简化为一个简单的低通滤波器。此外，编码器的两个积分器可以由放置于量化器前端的一个积分器代替。最

330

后得到的系统如图 7-24 所示，称之为Σ-Δ 调制器(SDM)。图 7-25 显示了使用单个数字积分器的 SDM(一阶 SDM)，该数字积分器的系统函数为

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

这样 SDM 就通过在一个 1 比特 D/A 转换器之后放置一个抗混叠保护和使信号平滑的普通模拟滤波器(如 Butterworth 滤波器)简化了 D/A 转换过程。模拟滤波器的输出具有的通带大约为 20kHz，这样就可以滤除有用信号带宽范围外的任何噪声。在目前流行的 CD 播放器中，通常将内插器、SDM、1 比特 D/A 转换器及低通平滑滤波器都集成在单个芯片中。

331

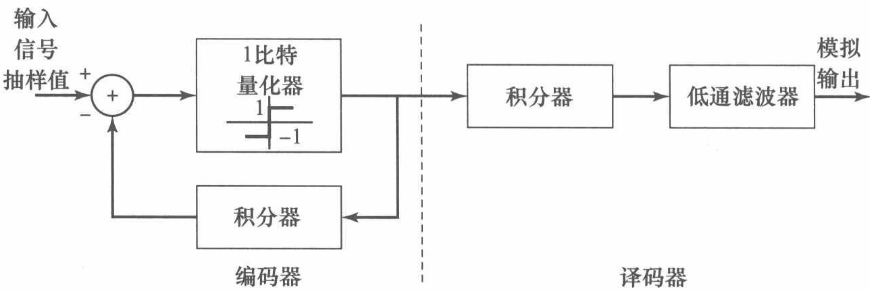


图 7-23 增量调制

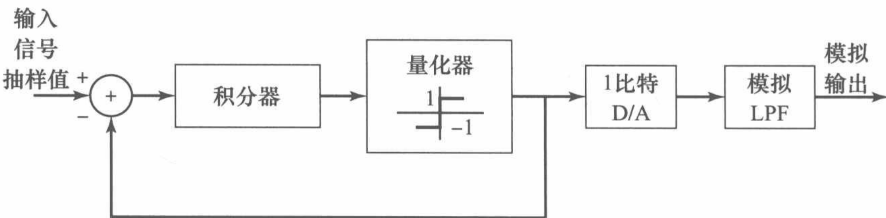


图 7-24 Σ-Δ 调制

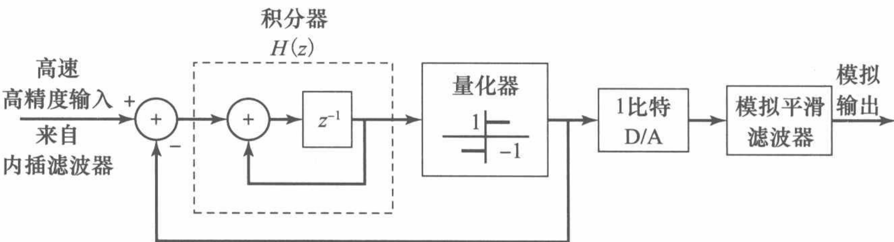


图 7-25 一阶Σ-Δ 调制

7.7 JPEG 图像编码标准

JPEG 标准，由联合图像专家组(Joint Photographic Experts Group)提出，是一种被广泛应用于静态图像的有损压缩标准。虽然存在多种图像压缩标准，JPEG 仍是目前最广泛采纳的标准。JPEG 标准可达到非常优秀的图像质量且适用于彩色和灰度图像。标准易于实现还可通过计算复杂性可接受的软件来完成。

JPEG 属于变换编码技术类，即不直接压缩信号(在此指图像信号)，压缩的是它的变换。在图像编码中最广泛使用的变换技术是 DCT(离散余弦变换)。DCT 的主要优点是高度的能量压缩特性和变换快速算法的可实现性。DCT 能量压缩特性使得只有一小部分变换系数是有意义的值，所以几乎所有的能量都集中在这些特殊分量中。

亮度函数为 $x(m, n)$ 的 $N\times N$ 图像的 DCT 变换 $(0\leqslant m, n\leqslant N-1)$ 可利用以下公式得到：

$$X(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}x(k,l) \tag{7.7.1}$$

$$X(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}x(k,l)\cos\left[\frac{(2k+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2l+1)v\pi}{2N}\right] \quad u,v\neq 0 \tag{7.7.2}$$

系数 $X(0, 0)$ 通常称为 DC 分量，其他系数为 AC 分量。

JPEG 编码器包括三个部分：DCT、量化器、编码器，如图 7-26 所示。

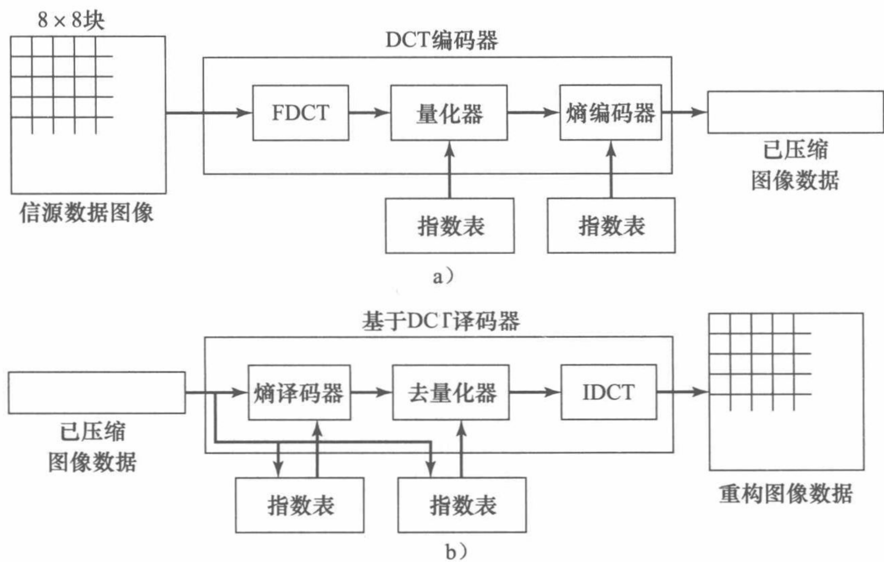


图 7-26 JPEG 编码器的方框图

DCT。一个图像包括排列于 $m\times n$ 阵列中的许多像素。DCT 图像转换的第一步是将图像阵列划分为 8×8 的子阵列。子阵列的大小是在复杂性和质量之间的一个折中选择。在一些其他标准中，也可以选择 4×4 或 16×16 的子阵列。如果行数或列数（m 或 n）不是 8 的整数倍，则复制最后一行（或列）使其成为 8 的倍数。译码器将会去除这些复制的行或列。

生成子阵列后，每个子阵列的 DCT 将被计算得到。这个过程将生成 64 个 DCT 系数，从 DC 分量 $X(0, 0)$ 开始到 $X(7, 7)$ 为止。该过程如图 7-27 所示。

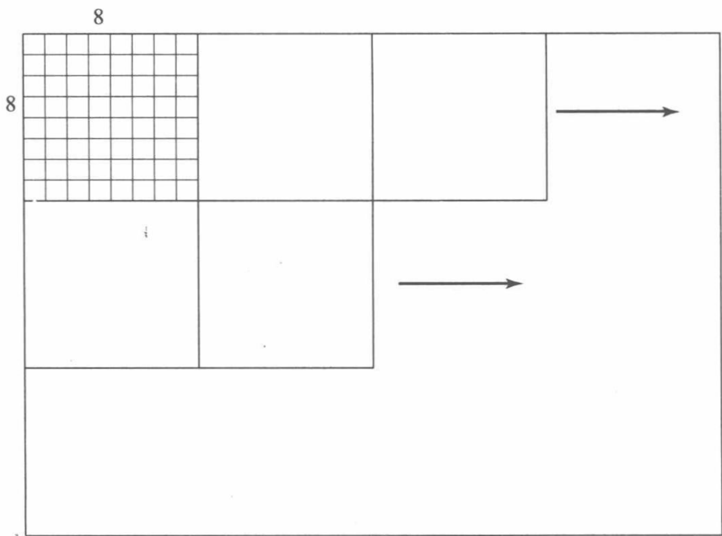


图 7-27 JPEG 中的 DCT 变换

332
~
333

量化器。因为DCT的能量压缩特性，只有DCT系数的低频分量才有意义。因为DC分量包含了大部分能量，同时也由于一个子阵列的DC分量和前一个子阵列的DC分量之间存在很强的相关性因此对DC分量的量化采用均匀差分量化。而对于AC分量的量化则采用均匀量化。虽然都使用均匀量化，但不同的均匀量化有不同的步长。不过，所有的量化器都有相同的量化区间数：256。

一个64元素的量化表确定了对每个DCT分量进行均匀量化的步长。这些步长是通过心里视觉实验获得的。量化的输出结果是一个8×8阵列，其只有左上角的元素不为零，其余位置的元素大部分是零。不同系数量化步长的抽样量化表如表7-5所示。

表7-5 JPEG量化表

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

量化过程之后，已经量化的DCT系数通过Z形抽样排列成一个矢量，如图7-28所示。利用这种类型的抽样，可以获得长度为64的矢量$\boldsymbol{X}$，它仅在前几个分量上取值非零。

编码。上述方案中的量化步骤提供了图像的有损压缩。在此步骤之后，采用熵编码的方案可以提供抽样值的无损压缩(将在12章中介绍)。JPEG标准中规定的一种熵编码方案是Huffman编码，将在12.3.1节讨论。在这种情况下，Huffman编码是建立在对不同幅度指定码字的编码表的基础上。由于量化子阵列包含大量的零元素，通常采用一些扫描长度编码的方式来压缩这些零元素。更多细节请查阅本章结尾列出的参考资料。

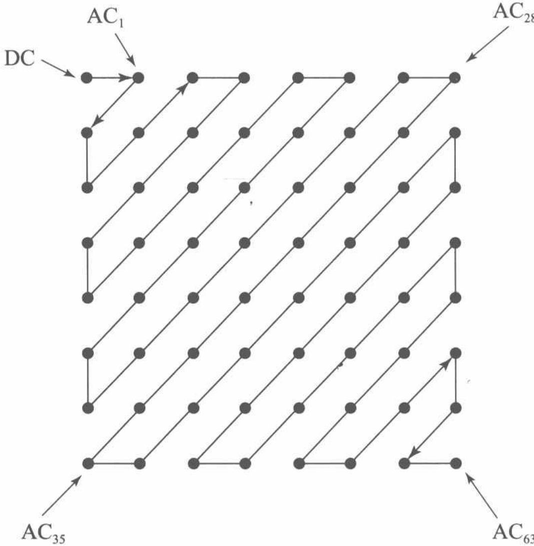


图7-28 DCT系数的Z形采样

JPEG中的压缩与图像质量。与速率有关，JPEG可同时对灰度和彩色图像实现中等到优质的图像质量，且实现的压缩比很高。当速率为0.2～0.5比特/像素时，可获得对某些应用来说中等偏上的图像质量。当速率增加到0.5～0.75比特/像素时，会得到足够的高质量图像。在0.75～1.5比特/像素时，可获得质量非常好的图像，对几乎所有应用都够了。最终，在1.5～2比特/像素时，生成的图像几乎与原始图像没有差别。所有这些速率对大多数严格要求的应用都是足够的。

334

7.8 小结及深入阅读

本章的重点是模拟信号到数字信号的转换。首先描述了限带信号的抽样定理，证明了对于带宽为W的模拟信号以每秒$2W$个样值的速率抽样时，可以在不损失保真度和信息的情况下，从抽样值中重建模拟信号。这个最小的每秒$2W$个样值的抽样速率称为奈奎斯特速率。

模拟信号转换为数字信号的第2步是将抽样值量化为一组离散的幅值电平。最简单的量化是标量量化，即独立地量化每个样值。标量量化器可以采用均匀量化或非均匀量化。本章描述了两种方法并根据信号量噪比(SQNR)对其性能进行了分析。此外还介绍了矢量量化器，这种量化器同时对k个样值的数据块进行量化。一般来讲，矢量量化的性能优于标量量化，并且广泛用于图像信号处理。 335

模拟信号转换为数字信号的第3步是编码，这也是最后一步。在编码过程中，采用比特序列对应量化电平值。

本章介绍了几种波形编码技术，用于在接收端尽可能无失真地恢复信源的输出波形。这些方法包括均匀和非均匀的脉冲编码调制(PCM)、差分脉冲编码调制(DPCM)、增量调制(DM)以及自适应增量调制(ADM)。另一种波形编码方法是基于模拟信号模型的重建，并且利用线性预测技术估计模型参数，将参数传输至接收端。接收端则利用模型参数重建信源并生成信源的输出。这种方法称为分析合成技术，分析是在发送端完成的，用于估计模型参数；合成则是在接收端进行的，用以重建信源并生成信源的输出信号。这种技术在语音编码中广泛应用。

本章最后两节介绍了模拟数字转换的应用，包括在电话系统的数字音频传输、光盘的数字音频记录以及基于JPEG标准的图像编码。

Jayant和Noll(1984)以及Gersho和Gray(1992)详细分析了各种量化和波形编码技术。其中Gersho和Gray(1992)的著作还包括了矢量量化的详细论述。分析-合成技术和线性预测编码的内容在有关语音编码的著作中有详尽的论述，特别是Markel和Gray(1976)，Rabiner和Schafer(1979)以及Deller，Proakis和Hansen(2000)都对这部分内容进行了阐述。JPEG标准在Gibson(1998)的著作中有详尽描述。 336

习题

7.1 假设信号$x(t)$的带宽为40kHz。

1. 此信号的最小抽样速率是多少？
2. 如果需要10kHz的保护带宽，则最小抽样速率是多少？
3. 信号$x_1(t)=x(t)\cos(80000\pi t)$的最大抽样间隔是多少？

7.2 对于一个带宽为6000Hz的低通信号，理想地重构信号所必需的最小抽样频率为多少？如果需要保护带为2000Hz，则所需的抽样速率是多少？如果重构滤波器具有形如下式的频率响应，则理想重构所需的最小抽样频率以及K值各是多少？

$$H(f)=\begin{cases}K & |f|<7000\\ K-K\dfrac{|f|-7000}{3000} & 7000<|f|<10\,000\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.3 假设信号$x(t)=A\mathrm{sinc}(1000t)$以2000抽样值/秒的抽样速率进行抽样。确定为了理想重构此信号所需的最通用的重构滤波器类型。

7.4 带宽为W的低通信号$x(t)$以抽样间隔T_s进行抽样，并且信号通过下式从抽样中重构：

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)p(t-nT_s)$$

其中$p(t)$是任意形状的脉冲(不需要限制时间在区间$[0,T_s]$内)。

1. 写出$x_p(t)$的傅里叶变换。
2. 列出从$x_p(t)$中理想重构$x(t)$的条件。
3. 确定所需的重构滤波器。

7.5 带宽为W的低通信号$x(t)$以奈奎斯特速率进行抽样，且生成如下信号：

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

1. 求$x_1(t)$的傅里叶变换。
2. 如果利用LTI系统，能从$x_1(t)$中重构$x(t)$吗？为什么？
3. 如果利用线性时变系统，能从$x_1(t)$中重构$x(t)$吗？如何重构？

7.6 带宽为W的低通信号$x(t)$以抽样间隔T_s进行抽样，抽样值用$x(nT_s)$表示。通过对抽样值进行线性内插生成新信号$x_1(t)$，即

$$x_1(t)=x(nT_s)+\frac{t-nT_s}{T_s}[x((n+1)T_s)-x(nT_s)],\quad nT_s\leqslant t\leqslant(n+1)T_s$$

1. 求$x_1(t)$的功率谱。
2. 在什么条件下，可将原始信号从抽样信号中重构？所需的重构滤波器是哪一种？

7.7 带宽为50Hz的低通信号$x(t)$以抽样间隔T_s进行抽样，得到的抽样值如下式：

$$x(nT_s)\begin{cases}-1 & -4\leqslant n<0\\ 1 & 0<n\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

1. 求$x(0.005)$。
2. 此信号是功率信号还是能量信号？求其功率值或能量值。

7.8 设带宽W为任意值，$x(t)$是带宽为W的低通信号

1. 证明：信号集$\{\varphi_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$表示一个正交信号集，其中$\varphi_n=\mathrm{sinc}(2Wt-n)$。为了生成一个正交集应该如何对这些信号进行加权？
2. 证明由抽样值关系式：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{sinc}(2Wt-n)$$

进行的重构是一个正交扩展关系。

3. 根据第2问的结论，证明：对所有的n都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{sinc}(2Wt-n)\mathrm{d}t=Kx(nT_s)$$

并求出K值。

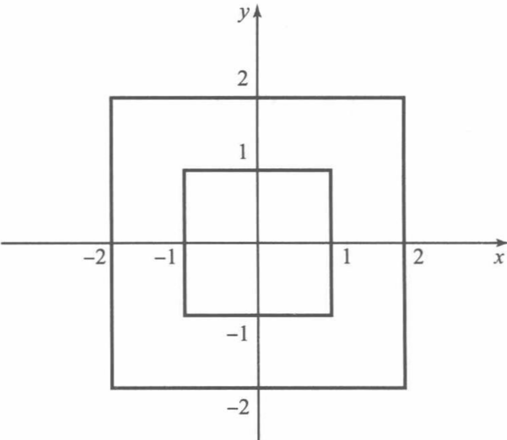
7.9 $X(t)$是广义平稳高斯过程，其中$P_X=10$，

1. 根据表7-1，为该信源设计一个16级电平的最佳均匀量化器。
2. 如果使用上问的量化器，导致的失真是多少？
3. 如果量化电平数由8增加到16，SQNR改善了多少(以dB为单位)？

7.10 根据表7-1，对例7.2.1给出的信源设计一个最佳量化器，并将此量化器的失真与例中得到的失真相比较。

7.11 重新解习题7.9，用表7-2代替表7-1，为该高斯信源设计一个最佳非均匀量化器。

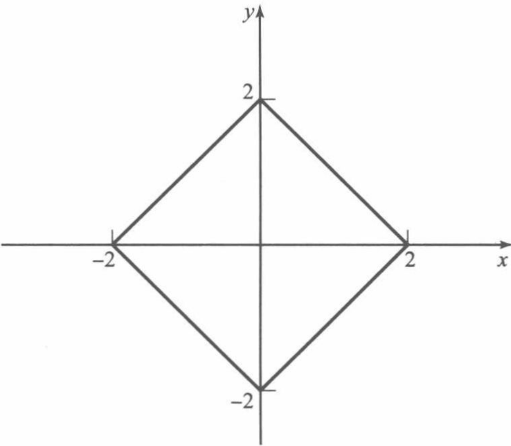
7.12 对两个随机变量X和Y进行编码，已知X和Y均匀分布于两个正方形之间的区域之内，如习题7.12图所示。



习题7.12图

1. 求$f_X(x)$和$f_Y(y)$。
2. 假设每个随机变量X和Y都采用4电平均匀量化器进行量化，则失真是多少？
3. 假设不使用标量量化器，而使用矢量量化器对X和Y进行量化，且与上问中失真相同，则每对(X, Y)所得到的比特数/信源输出是多少？

7.13 两个随机变量X和Y均匀分布于如习题7.13图所示的正方形区域内。



习题7.13图

1. 求$f_X(x)$和$f_Y(y)$。
2. 假设每个随机变量X和Y都采用4电平均匀量化器进行量化，则失真是多少？每对(X, Y)所得到的比特数是多少？
3. 假设不使用标量量化器，而使用矢量量化器对X和Y进行量化，与上问中每对(X, Y)所得到的比特数/信源输出相同，则该矢量量化器带来的失真是多少？

7.14 当抽样均匀分布于区间[−2, 2]时，重新求解例7.4.1。

7.15 一个平稳随机过程，自相关函数为$R_X(\tau)=\frac{A^2}{2}\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos 2\pi f_0\tau$，且已知随机过程的幅度不超过6。设$A=6$。

1. 为了保证SQNR不低于60dB，需要多少个量化电平？
2. 假设在第一问条件下对信号进行量化，信号带宽近似为W，则传输二进制PCM信号所需的最小带宽是多少？

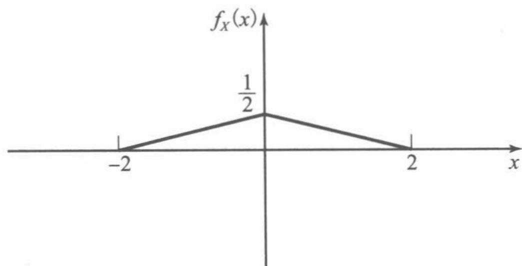
7.16 一个信号可以使用低通平稳过程$X(t)$来建模，在任意时刻t_0，其概率密度函数如习题图7.16图所示。

该过程带宽为5kHz，用PCM系统传输

1. 如果以奈奎斯特速率进行抽样，且使用32电平的均匀量化器进行量化，得到的SQNR是

多少？比特率是多少？

2. 如果信道的可用带宽是 40kHz，则能达到的最高 SQNR 是多少？
3. 如果不用奈奎斯特速率抽样，要求至少 2kHz 的保护带，信道带宽仍是 40kHz，则所能达到的最高 SQNR 是多少？



习题 7.16 图

7.17 一个平稳信源，分布为三角概率密度函数 $f_X(x)=\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{x}{2}\right)$。该信源采用如下的 4 电平均匀量化器进行量化：

$$Q(x)=\begin{cases}1.5 & 1<x\leqslant 2\\ 0.5 & 0<x\leqslant 1\\ -0.5 & -1<x\leqslant 0\\ -1.5 & -2\leqslant x\leqslant -1\end{cases}$$

1. 求出已量化信源的熵。
2. 确定表示量化误差，即 $\hat{X}=X-Q(X)$ 的随机变量的概率密度函数。

7.18 随机过程 $X(t)=Y\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$，其中 Y 和 Θ 是两个相互独立的随机变量，分别均匀分布于$[-3, 3]$和$[0, 2\pi]$

1. 求出 $X(t)$的自相关函数和功率谱密度。
2. 如果 $X(t)$ 由均匀 PCM 系统传输，要求 SQNR 不低于 40dB，则每抽样所需的比特数和最小带宽是多少(用 f_0 表示)？
3. 若需 SQNR 增加 24dB，则每抽样值需增加多少比特？此时所需的最小带宽是多少？

7.19 一个零均值 WSS 随机过程 $X(t)$的 PCM 系统中的自相关函数：

$$R_x(\tau)=2\mathrm{sinc}^2(10^4\tau)$$

$X(t)$的最大值为 10，PCM 中的量化器使用的电平个数为 $N=128$。

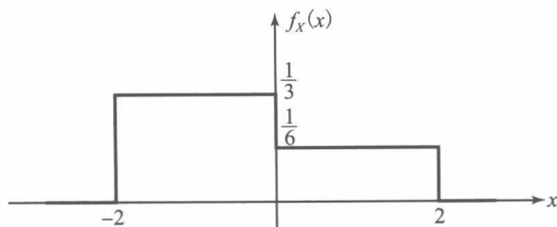
1. 如果抽样保护间隔为 2.5kHz，比特率为 R，SQNR(以 dB 为单位)以及最小传输带宽 B_T 是多少？
2. 如果最小 SQNR 为 56dB，N 和最小传输带宽是多少？(假设保护间隔为 2.5kHz)设计的系统中 SQNR 是多少？
3. 如果传输总带宽为 93kHz，可得最高 SQNR 是多少？影响的系统参数(W_G，N，f_s)和传输率是多少？

7.20 $X(t)$表示零均值 WSS 高斯随机过程，其自相关函数为

$$R_X(\tau)=4\mathrm{sinc}^2(10^4\tau)$$

1. 该过程的功率是多少？
2. 确定该过程中的功率谱密度 $S_x(f)$。
3. 该过程的带宽是多少？
4. 假设该过程通过了带宽为 5kHz 的理想低通滤波器，输出表示为 $Y(t)$，确定 $Y(t)$的功率谱密度 $S_y(f)$以及输出过程的总功率。
5. 确定随机变量 $X(0)$、$X(10^{-4})$和 $X(1.5\times10^{-4})$的概率密度函数。
6. 证明随机变量 $X(0)$和 $X(10^{-4})$是独立的，$X(0)$和$X(1.5\times10^{-4})$不是独立的。

7.21 在一个 PCM 系统中，信号 $X(t)$的带宽为 5kHz，信号以保护间隔为 2kHz 抽样，抽样值的概率密度函数如习题 7.21 图所示：

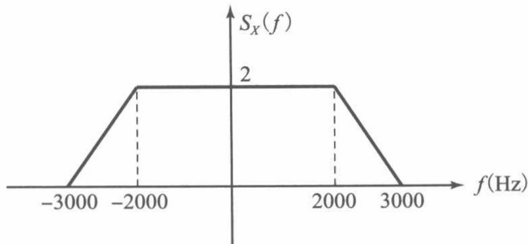


习题 7.21 图

量化器使用 $N=128$ 电平，量化后，量化电平以二进制编码传输。

1. 最终比特率是多少？
2. 最终的 SQNR(以 dB 为单位)是多少？
3. 所需的传输带宽是多少？
4. 如果有效传输带宽是 70kHz，可得最大 SQNR 为多少？

7.22 一个 WSS 的信源功率谱密度如习题 7.22 图所示，信号的最大幅度为 200。



习题 7.22 图

1. 该过程的功率是多少？
2. 假设采用 512 量化电平的均匀 PCM 系统传输信号，则 SQNR 是多少？如果抽样保护间隔为 1kHz，所需最小传输带宽是多少？
3. 如果传输带宽为 47kHz，设计一个能获得最

高 SQNR 以及最大保护间隔的 PCM 系统。

7.23 一个零均值平稳信源 $X(t)$，其功率谱密度如下：

$$S_X(f)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+f^2} & |f|\leqslant 200\text{Hz}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

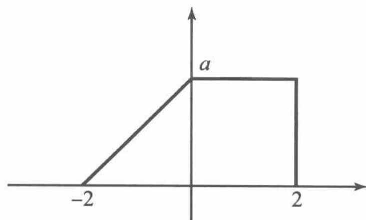
此信源幅度在 10 以内，以奈奎斯特速率对该信源进行抽样，使用 8 比特/抽样值的均匀 PCM 对抽样编码。

1. 求出得到的 SQNR 是多少？
2. 如果要求 SQNR 至少增加 20dB，则量化电平数需要变化多少？
3. 在第 2 问中，传输 PCM 信号所需的最小带宽是多少？

（提示：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$，当 $x>20$ 时，可利用近似式 $x\approx\frac{\pi}{2}$。）

7.24 信号 $X(t)$ 带宽为 12 000Hz，任何时刻其幅度是一个随机变量。幅度的概率密度函数如习题 7.24 图所示。采用均匀 PCM 传输。

1. 证明：$a=\frac{1}{3}$。
2. 求 $X(t)$ 的功率。
3. 如果采用 32 电平的 PCM 系统，则 SQNR 是多少？
4. 第 3 问中所需的最小传输带宽是多少？
5. 如果需要 SQNR 至少增加 20dB，则传输带宽应增加多少？



习题 7.24 图

7.25 一个零均值 WSS 随机过程 $X(t)$，其功率谱密度可由下式给出：

$$S_X(f)=\begin{cases}\frac{f+5000}{5000} & -5000\leqslant f\leqslant 0\\ \frac{-f+5000}{5000} & 0<f\leqslant 5000\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

该过程最大幅度是 600。

1. 求该过程功率大小。
2. 为了保证保护间隔为 2000Hz，需要的速率 f_s 是多少？
3. 如果对该过程采用具有 256 量化电平的 PCM 系统（以第 2 问的抽样速率抽样），则 SQNR 为多少 dB？
4. 第 3 问所需的比特率为多少？
5. 如果 PCM 系统的输出采用二进制系统传输，所需的最小传输带宽是多少？
6. 如果需要 SQNR 至少增加 25dB，则所需量化电平数、SQNR 和传输带宽各为多少？

7.26 在分析 PCM 系统时，总是假设发送比特能够无差错地接收。然而，实际信道会产生误码。假设 PCM 系统的输出是通过错误概率为 P_2 的信道进行发送。进一步假设，P_2 足够小，使得传输每个抽样量化编码 v 比特的过程中，不发生错误或者至多有一个错误。这意味着每个传输比特发生错误的概率是 P_2，v 比特无差错传输的概率近似等于 $1-vP_2$。同时假设，对每个量化值的二进制表示采用自然二进制编码（NBC），即最低量化电平映射为全 0 序列，最高量化电平映射为全 1 序列，其他所有电平映射到相应的数值。

1. 证明：如果最低有效比特位发生错误，则对量化值的影响等于电平间距 Δ；如果下一位发生错误，则对量化值的影响等于 2Δ，如果错误发生在最高有效位，则其对量化值的影响是 $2^{v-1}\Delta$。
2. 根据第 1 问的结论，证明：由信道误码导致的均方误差可由下式给出：

$$D_{\text{channel}}=P_2\Delta^2\frac{4^v-1}{3}$$

其中 $\Delta=\frac{2x_{\max}}{N}=\frac{x_{\max}}{2^{v-1}}$ 是相邻电平的间距。

3. 根据第 2 问的结论，推断总失真是量化失真与由信道误差引起的传输失真之和，可以表示为下式：

$$D_{\text{total}}=\frac{x_{\max}^2}{3\times N^2}(1+4P_2(N^2-1))$$
$$=\frac{x_{\max}^2}{3\times 4^v}(1+4P_2(4^v-1))$$

4. 最后证明：信噪比定义为信号功率与总噪声功率的比，可由下式给出：

$$\text{SNR}=\frac{3N^2\overline{\breve{X}^2}}{1+4P_2(N^2-1)}$$
$$=\frac{3\times 4^v\overline{\breve{X}^2}}{1+4P_2(4^v-1)}$$

其中有

$$\breve{X}=\frac{X}{x_{\max}}$$

7.27 在 CD 播放机中，抽样速率为 44.1kHz，对抽样值采用 16 比特/抽样值的量化器进行量化。求持续时间为 50 分钟的音乐所需的比特数。

337
~
344

上机习题

7.1 确定质心

利用 MATLAB 确定一个零均值、单位方差高斯分布的量化区间的质心，其中量化区间的边界为(−5，−4，−2，0，1，3，5)。高斯分布由 m 文件 normal.m 给出。虽然高斯分布支持(−∞，∞)，但是这里采用数倍于分布的标准差就足够了。例如，$(m-10\sigma, m+10\sigma)$，其中 m 和 σ 分别是高斯随机变量的期望值和标准差。

7.2 均匀量化器失真

利用 MATLAB 确定均匀量化器的均方差。该均匀量化器是为零均值、$\sigma^2=4$ 的高斯信源而设计，具有 12 个量化电平，每个长度都是 1. 量化区间关于分布的期望值对称。

1. 指出量化区间的边界。
2. 指出 12 个量化区间。
3. 根据对应的量化区间和得到的均方差失真，确定 12 个量化值。

7.3 设计 Lloyd-Max 量化器

利用 MATLAB 为零均值、单位方差的高斯信源设计一个 10 电平的 Lloyd-Max(非均匀)量化器。

1. 确定量化边界和量化值。
2. 确定均方差失真。

7.4 均匀 PCM

利用均匀 PCM 估计正弦信号在量化过程中产生的量化误差。

1. 对下式给出的正弦信号分别以抽样间隔 $T_s=0.1$ 进行两次量化：
$$s(t)=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 10$$
其中一次是 8 电平，另一次是 16 电平。在同一张图中，画出原始信号和两个量化后的信号，并对结果进行比较
2. 分别计算 8 电平和 16 电平的量化 SQNR

7.5 均匀 PCM 的量化误差

利用均匀 PCM，估计高斯信源在量化过程中产生的量化误差。

1. 生成 500 个零均值、单位方差的高斯随机变量，通过均匀 64 电平的 PCM 量化器对其进行量化编码。画出生成的 500 点序列。
2. 计算 64 电平量化器的 SQNR。
3. 确定该序列的前五个数值，以及对应的量化值和 PCM 码字。
4. 对于 500 点序列，量化误差定义为输入值和量化值之间的差值，画出量化误差。

7.6 非均匀 PCM

利用非均匀 PCM，估计高斯信源在量化过程中产生的量化误差。

1. 生成 500 个零均值、单位方差的高斯随机变量，分别采用 16，64，128 电平量化器与 $\mu=255$ 的非线性对它们进行量化。画出每种情况的输入-输出量化器特性，以及对应的误差序列。
2. 计算每个量化器的 SQNR。

345～346

第8章

加性高斯白噪声信道中的数字调制方法

第 7 章介绍了将信源输出转换为二进制数字序列的方法。本章将分析加性高斯白噪声(AWGN)信道中数字序列的传输。AWGN 信道是描述包括各种有线和无线物理通信信道的最简单的数学模型之一。这些信道基本上是模拟信道，因此需将传输的数字序列转换成模拟信号波形。

本章将主要关注 AWGN 信道中携带数字信息的模拟信号波形的特征、设计方法及性能。首先将讨论基带信道中的信号传输，基带信道通常是指包括零频率($f=0$)在内的频带，当数字信息通过基带信道传输时，不需要使用载波频率传输数字调制信号。另一方面，许多通信信道，例如电话信道、无线信道、卫星信道等，其通频带远离零频率 $f=0$，这类信道称为带通信道。在这些信道中，携带信息的信号被施加到正弦载波信号上，将信息信号的频谱变换到适当频带，然后在信道中传输，即信号是经载波调制后传输的。

本章仅分析单次通信，即仅传输对应单个消息的信号，后续无信号传输的情况。数字信号序列和码间干扰将在第 10 章讨论。

347

为了分析信号的性能特征，需要建立各种模拟信号的几何表示。接下来将描述几种不同的用于数字信息传输的模拟信号波形，并给出这些信号的几何表示形式。进一步将介绍这些信号的最佳解调和检测方式，并用错误概率评估这些信号在 AWGN 信道中的性能。在第 9 章中，将根据传输性能、带宽要求和设备实现复杂度，比较不同调制方法。

8.1 信号波形的几何表示

在数字通信系统中，调制器输入通常为二进制数字信息比特序列。调制器将每个信息位映射成两种不同信号波形之一，如 $s_1(t)$或 $s_2(t)$。这样，一个信息比特 0 可以用信号波形 $s_1(t)$表示，比特 1 可以用信号波形 $s_2(t)$表示。这类二进制数字调制称为二进制调制。另外，调制器也可以采用 $M=2^k$ 种不同的信号波形，如 $s_m(t)$，$1\leqslant m\leqslant M$，每次传输 k 比特($k>1$)。这种调制器就称为 M 进制(非二进制)调制。本节给出这种信号波形的一种矢量表示形式。这种表示形式能够简洁地刻画信道中数字信息传输所用的信号波形，简化性能分析。利用矢量表示形式，波形通信信道可以表示为矢量信道，显著降低分析复杂度。

假设一组 M 个信号波形 $s_m(t)$，$1\leqslant m\leqslant M$，用于在信道中传输数字信息。从这组 M 个波形的集合中，首先构建一组 $N\leqslant M$ 个正交波形，其中 N 是信号空间的维度。可以采用格莱姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化方法。

格兰姆-施密特正交化方法。先考虑第一个波形 $s_1(t)$，假设其能量为$\mathscr{E}_1$。正交信号集的第一个波形可以直接构造为

$$\psi_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_1}} \tag{8.1.1}$$

即 $\psi_1(t)$就是将 $s_1(t)$归一化为单位能量得到的。

第二个波形根据 $s_2(t)$得到，先计算 $s_2(t)$在 $\psi_1(t)$上的投影，即

$$c_{21}=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t \tag{8.1.2}$$

从 $s_2(t)$中减去 $c_{21}\psi_1(t)$就得到

$$d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\psi_1(t) \tag{8.1.3}$$

348

这时，$d_2(t)$与$\psi_1(t)$正交，但是不具有单位能量。假设$d_2(t)$的能量为$\mathscr{E}_2$，那么与$\psi_1(t)$正交且具有归一化能量的信号波形为

$$\psi_2(t) = \frac{d_2(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_2}} \tag{8.1.4}$$

$$\mathscr{E}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d_2^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.1.5}$$

更一般地，对第k个信号的正交化得到

$$\psi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_k}} \tag{8.1.6}$$

其中，

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\psi_i(t) \tag{8.1.7}$$

$$\mathscr{E}_k = \int_{-\infty}^{\infty} d_k^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.1.8}$$

并且

$$c_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t)\psi_i(t)\,\mathrm{d}t, \qquad i = 1, 2, \cdots, k-1 \tag{8.1.9}$$

重复以上正交化过程，直至所有M个信号波形$\{s_m(t)\}$都得到正交化处理，并且构造出$N \leqslant M$个正交波形。如果在某一步有$d_k(t)=0$，那么就没有新的$\psi(t)$，也就不引入新的维度。N个正交波形$\{\psi_n(t)\}$构成N维信号空间的归一化正交基。如果M个信号波形都是线性独立的，即每个信号波形都不是其他信号波形的线性组合，那么信号空间的维度N就等于M。

例 8.1.1 对图 8-1a 中的 4 个信号波形进行格兰姆-施密特正交化。波形$s_1(t)$的能量为$\mathscr{E}_1=2$，则$\psi_1(t)=s_1(t)/\sqrt{2}$。然后，可以发现$c_{21}=0$，则$\psi_1(t)$与$s_2(t)$正交。可得$\psi_2(t)=s_2(t)/\sqrt{\mathscr{E}_2}=s_2(t)/\sqrt{2}$。要得到$\psi_3(t)$，先计算$c_{31}$和$c_{32}$，得到$c_{31}=0$和$c_{32}=-\sqrt{2}$。因此有

$$d_3(t) = s_3(t) + \sqrt{2}\psi_2(t)$$

由于$d_3(t)$具有单位能量，有$\psi_3(t)=d_3(t)$。最终可以得到$c_{41}=\sqrt{2}$，$c_{42}=0$和$c_{43}=1$，则有

$$d_4(t) = s_4(t) - \sqrt{2}\psi_1(t) - \psi_3(t) = 0$$

349

因此，$s_4(t)$是信号$\psi_1(t)$和$\psi_3(t)$的线性组合，相应地，信号空间维度为$N=3$。信号$\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$和$\psi_3(t)$如图 8-1b 所示。◀

构造好正交波形集$\{\psi_n(t)\}$后，就可以将M个信号$\{s_m(t)\}$确切地表示为$\{\psi_n(t)\}$的线性组合。因此，可以有

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}\psi_n(t), \quad m = 1, 2 \cdots, M \tag{8.1.10}$$

其中线性组合的加权系数为

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\psi_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.1.11}$$

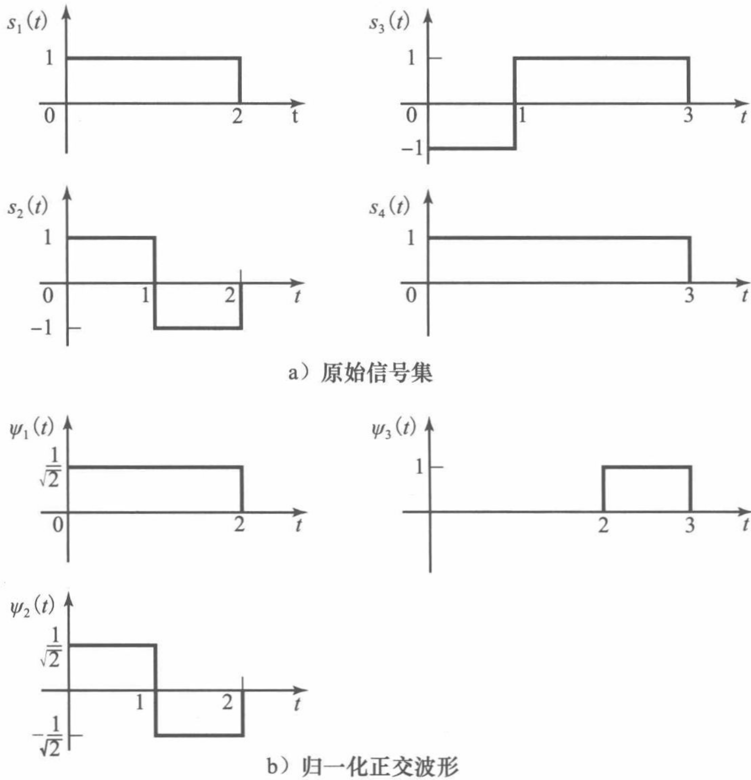
由于基信号$\{\psi_n(t)\}$是归一化正交的，每个信号波形的能量与权重系数的关系可以表示为

$$\mathscr{E}_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}^2$$

基于式(8.1.10)，每个信号波形可以表示为矢量

$$\boldsymbol{s}_m = (s_{m1}, s_{m2}, \cdots, s_{mN}) \tag{8.1.12}$$

或者，等价地表示为N维信号空间中的一个点，坐标为$\{s_{mi},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$。可以看



a）原始信号集

b）归一化正交波形

图 8-1　对信号$\{s_i(t)\}$进行格兰姆-施密特正交化的示例。

到，两个信号的内积等于其矢量表示形式的内积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{s}_m \cdot \boldsymbol{s}_n \tag{8.1.13}$$

并且，将 $m=n$ 代入式(8.1.13)，可得如下特例

$$\mathscr{E}_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\mathrm{d}t = \|\boldsymbol{s}_m\|^2 \tag{8.1.14}$$

即第 m 个信号波形的能量等于矢量长度的平方，或者等价于 N 维信号空间中原点到信号点的距离平方。还应该注意的是，正交基信号的选择不是唯一的，因此信号波形的矢量表示也不是唯一的。不过，信号空间的维度 N 和表示信号的矢量的长度与正交基选择无关。

例 8.1.2 利用图 8-1b 给出的归一化正交信号集，确定图 8-1a 中 4 个信号的矢量表示形式。由于信号空间的维度为 3，每个信号可以用 3 个分量表示，分别代表信号在 3 个归一化正交基上号 $\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$和 $\psi_3(t)$的投影。这样，可以得到 $\boldsymbol{s}_1=(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{s}_2=(1, \sqrt{2},\ 0)$，$\boldsymbol{s}_3=(0,\ -\sqrt{2},\ 1)$，$\boldsymbol{s}_4=(\sqrt{2},\ 0,\ 1)$。这些信号矢量如图 8-2所示。◀

350
~
351

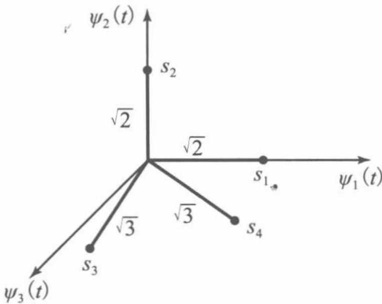


图 8-2　对应信号$\{s_i(t)\}$，$i=1$，2，3，4 的信号矢量

最后，可以看到采用格兰姆-施密特方法得到的基信号$\{\psi_n(t)\}$并不唯一。例如，图 8-3给出了另一组三维空间的基信号。采用这组基信号，相应的信号表示为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{s}_2=(1,\ -1,\ 0)$，$\boldsymbol{s}_3=(-1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{s}_4=(1,\ 1,\ 1)$。应该注意到，基信号的变化不改变空间的维度、信号矢量的长度(能量)，或者两个矢量的内积。基信号的变化本质就是信号点围绕原点的旋转

和/或平移。

尽管格兰姆-施密特方法能够保证获得信号集表示的正交基，很多情况下，包括前面的例子，很容易用一种基于观察的方法构造基信号。本章最后的问题中会利用这种方法。

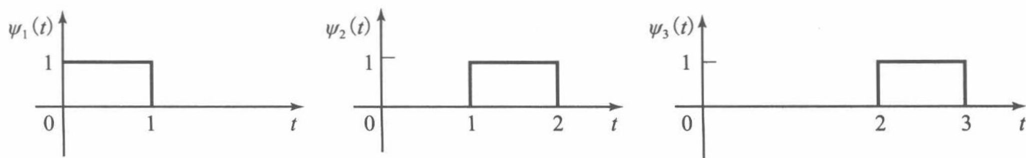


图 8-3 另一组基信号

8.2 二进制调制方式

本节将讨论两种不同的二进制调制方法：二进制对极信号和二进制正交信号。我们将说明某些常用的二进制调制方式，包括二进制脉冲幅度调制(PAM)，二进制幅移键控(PAM)，二进制幅移键控(ASK)，二进制脉冲位置调制(PPM)和二进制频移键控(FSK)，都是这两种调制方式的特例。假设需要传输的信息是二进制序列，由 0 和 1 组成，按照 R_b 比特/秒(bps)的比特率产生。

8.2.1 二进制对极信号

二进制对极(antipodal)信号是最简单的二进制调制方法。在此方法中，信息比特 1 用宽度为 T 的脉冲 $p(t)$ 表示，而信息比特 0 则用 $-p(t)$ 表示。由于一个信号的脉冲与另一个信号的脉冲极性相反，这种信号称为**二进制对极信号**，并且由于每个信号携带 1 比特信息，比特间隔 T_b 与信号持续时间 T 相等，即 $T_b=T$。图 8-4 是一个二进制对极信号的例子，其中 $p(t)$ 是一个幅度为 A 的矩形脉冲。这类信号中，二进制信息由信号幅度表示，因此这种调制方式也称为二进制脉冲幅度调制。脉冲以速率按照 $R_b=1/T_b$ 比特/秒的比特率发送，其中 T_b 是比特间隔。脉冲波形会决定传输信号的谱特征，这将在第 10 章介绍。

352

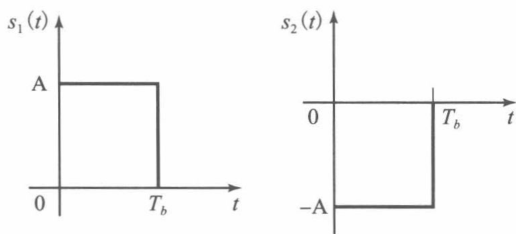


图 8-4 二进制 PAM 信号

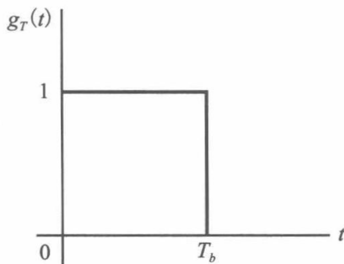


图 8-5 单位幅度和持续时间 T_b 的矩形脉冲

在这个例子中，二进制 PAM 信号波形可以表示为

$$s_m(t) = A_m g_T(t),\quad 1 \leqslant t < T_b,\quad m = 1,2 \tag{8.2.1}$$

其中 A_m 有两个可能的取值($m=1$ 时为 A，$m=2$ 时为 $-A$)，$g_T(t)$是一个单位幅度的矩形脉冲，如图 8-5 所示。两个波形中的每个信号能量为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m &= \int_0^{T_b} s_m^2(t)\mathrm{d}t,\quad m = 1,2 \\ &= A^2\int_0^{T_b} g_T^2(t)\mathrm{d}t = A^2 T_b\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

因此，两个信号波形具有相等的能量，即对于 $m=1$，2 均有$\mathscr{E}_m=A^2T_b$。每个信号波形携

带1比特信息。定义每比特信息的信号能量为$\mathscr{E}_b$，则有$A=\sqrt{\mathscr{E}_b/T_b}$。

二进制 PAM 的两个信号波形有简单的几何表示形式。信号波形可以表示为

353

$$s_m(t)=s_m\psi(t),\quad m=1,2 \tag{8.2.3}$$

其中$\psi(t)$是如图8-6所示的矩形脉冲，$s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$s_2(t)=-\sqrt{\mathscr{E}_b}$。注意二进制PAM信号波形可在几何上唯一地表示为在一个维度(实线)上的两个矢量，每个矢量幅度为$\sqrt{\mathscr{E}_b}$，如图8-7a所示。为了简单起见，通常将从原点发出的两个矢量简化为在$\sqrt{\mathscr{E}_b}$和$-\sqrt{\mathscr{E}_b}$的两个端点。如图8-7b所示。

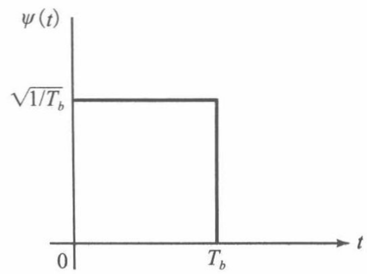


图8-6 二进制PAM信号的单位能量基函数

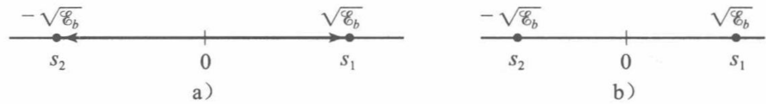


图8-7 二进制PAM信号的几何表示

例8.2.1 考虑如图8-8所示的两个对极信号波形。说明这些信号的几何表示，与如图8-4所示两个矩形脉冲的几何表示相同。

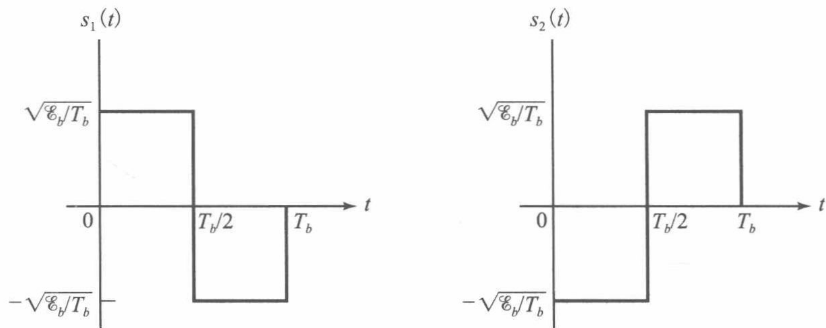


图8-8 例8.2.1中的二进制对极信号

解：注意两个信号脉冲能量为$\mathscr{E}_b$。这些信号的波形可以表示为

354

$$s_m(t)=s_m\psi(t),\quad m=1,2$$

其中$\psi(t)$是如图8-9所示的单位能量波形，$s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$s_2(t)=-\sqrt{\mathscr{E}_b}$。因此，图8-8中的两个对极信号波形的几何表示，与如图8-4所示信号的完全相同。◀

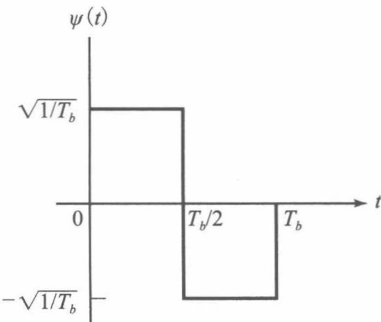


图 8-9

根据上述讨论，可以得到的结论是，任意一对极性相反的信号波形都可以表示为在实线上的两个矢量(两个信号点)，其中一个矢量是另一个的负数，如图8-7所示。通常单位能量波形可以表示为$\psi(t)=\frac{p(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_p}}$，其中$\mathscr{E}_p$是信号$p(t)$的能量。

二进制幅移键控(ASK)。二进制幅移键控是二进制对极信号的一种特例，用两个基带信号$\pm p(t)$调制正弦载波信号$\cos 2\pi f_c t$的幅度，即

$$\begin{aligned}s_1(t)&=p(t)\cos 2\pi f_c t,\quad 0\leqslant t<T_b\\ s_2(t)&=-p(t)\cos 2\pi f_c t,\quad 0\leqslant t<T_b\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

在$p(t)$为矩形脉冲的特例中，两个信号可以表示为

$$s_1(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_c t,\quad 0\leqslant t<T_b$$
$$s_2(t)=-\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_c t,\quad 0\leqslant t<T_b \tag{8.2.5}$$

其中$\mathscr{E}_b$ 表示信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$的能量，如习题 8.5 所示。这种情况下的二进制 ASK 信号波形如图 8-10 所示。

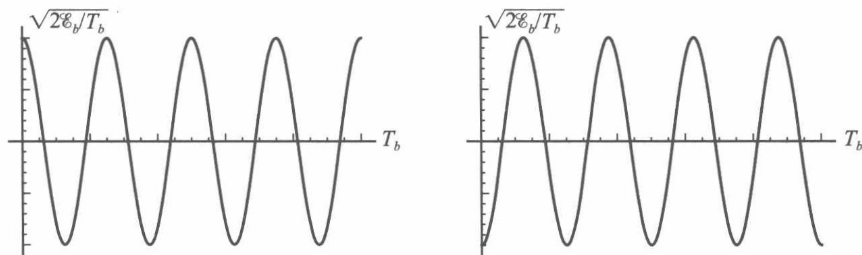


图 8-10　二进制 ASK 信号波形

二进制 ASK 信号的几何表示与如图 8-7 所示的二进制对极信号相似，这些信号的几何表示所用的单位能量信号为

355

$$\psi(t)=-\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos 2\pi f_c t,\quad 0\leqslant t<T_b \tag{8.2.6}$$

二进制 ASK 信号与如图 8-4 所示的二进制对极信号主要的不同之处是频谱特征。图 8-4所示的波形是基带(低通)信号，频谱在 $f=0$ 附近，而式(8.2.4)中的已调波信号是带通信号，频谱在$\pm f_c$ 附近。

8.2.2　二进制正交信号

另一种可用于二进制信息序列传输的脉冲调制方式是二进制正交信号。在二进制正交信号中，信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$具有相等的能量$\mathscr{E}_b$ 且相互正交，即

$$\int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t=\mathscr{E}_b$$
$$\int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t=\mathscr{E}_b \tag{8.2.7}$$
$$\int_0^{T_b} s_1(t)s_2(t)\mathrm{d}t=\mathscr{E}_b$$

由于两个信号已经是正交的，表示这些信号的正交基的任务就简化成对每个信号能量的归一化，即

$$\psi_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_b}}$$
$$\psi_2(t)=\frac{s_2(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_b}} \tag{8.2.8}$$

采用这个正交基，可以将信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$写成

$$s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_1(t)+0\psi_2(t)$$
$$s_2(t)=0\psi_1(t)+\sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_2(t) \tag{8.2.9}$$

356

相应的矢量表示为

$$\mathbf{s}_1=(\sqrt{\mathscr{E}_b},0)$$
$$\mathbf{s}_2=(0,\sqrt{\mathscr{E}_b}) \tag{8.2.10}$$

信号空间的矢量图如图 8-11a 所示，对应的两个信号点如图 8-11b 所示。可以观察到两个信号矢量相互垂直，因此两个信号相互正交，即二者点积为零。

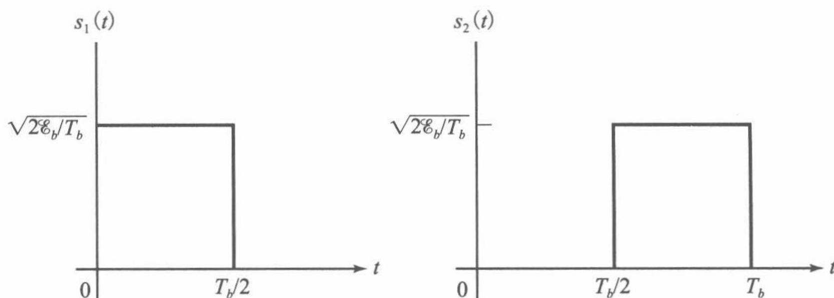
图 8-11 二进制正交信号波形的几何表示

二进制脉冲位置调制(PPM)。二进制脉冲位置调制是一种二进制正交信号。在二进制 PPM 中，两个脉冲的不同仅仅是脉冲的位置。如图 8-12 所示的信号波形 $s_1(t)$和 $s_2(t)$，就是一种 PPM 信号。由于两个信号互不交叠，因此二者相互正交，即

$$\int_9^{T_b} s_1(t)s_2(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{8.2.11}$$

可以看到，两个信号波形具有相等的能量，即

$$\mathscr{E}_b = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t \tag{8.2.12}$$



357

图 8-12 二进制 PPM(正交信号)中的信号脉冲

为了在几何上将这两个波形表示为矢量，需要两个正交基函数，其波形如图 8-13 所示。相应地，信号波形 $s_1(t)$和 $s_2(t)$可以表示为

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{11}\psi_1(t) + s_{12}\psi_2(t) \\ s_2(t) &= s_{21}\psi_1(t) + s_{22}\psi_2(t) \end{aligned} \tag{8.2.13}$$

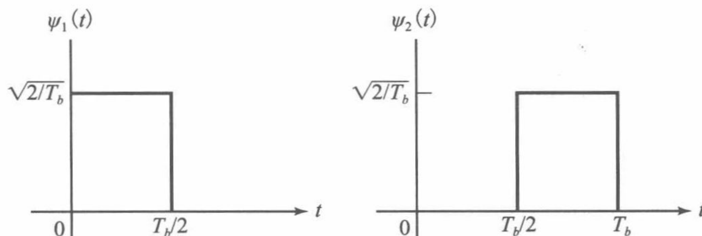


图 8-13 二进制 PPM 信号的正交基函数

易见其中

$$\begin{aligned} s_{11} &= \int_0^{T_b} s_1(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\mathscr{E}_b} \\ s_{12} &= \int_0^{T_b} s_1(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t = 0 \\ s_{21} &= \int_0^{T_b} s_2(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t = 0 \\ s_{22} &= \int_0^{T_b} s_2(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\mathscr{E}_b} \end{aligned} \tag{8.2.14}$$

则两个信号波形可以表示为式(8.2.10)中的二维矢量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$，也如图 8-11 所示。

二进制频移键控(FSK)。二进制频移键控是另一种二进制正交信号。在二进制 FSK 中，两个信号波形为

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_1 t,\ 0 \leqslant t < T_b \\
s_2(t) &= \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_2 t,\quad 0 \leqslant t < T_b
\end{aligned}
\tag{8.2.15}
$$

其中 $f_1=k_1/2T_b$，$f_2=k_2/2T_b$，k_1 和 k_2 是不同的正整数。显然，两个正弦信号的频率间隔为 $\Delta f=|f_1-f_2|=m/2T_b$，$m=|k_2-k_1|$ 为正整数。信号波形见图 8-14。易证，在这些条件下，信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 有相等的能量 $\mathscr{E}_b$ 且相互正交(参见习题 8.6)，即 358

$$
\int_0^{T_b} s_1^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_b} s_2^2(t)\mathrm{d}t = \mathscr{E}_b
$$

且

$$
\int_0^{T_b} s_1(t)s_2(t)\mathrm{d}t = 0
$$

二进制 FSK 的两个基信号波形为

$$
\psi_1(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos 2\pi f_1 t,\quad 0 \leqslant t < T_b \tag{8.2.16}
$$

$$
\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos 2\pi f_2 t,\quad 0 \leqslant t < T_b \tag{8.2.17}
$$

因此，

$$
s_1(t) = \sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_1(t) \text{ 且 } s_2(t) = \sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_2(t) \tag{8.2.18}
$$

相应地，这些二进制 FSK 波形具有与如图 8-11 所示的二进制正交波形相同的几何表示。

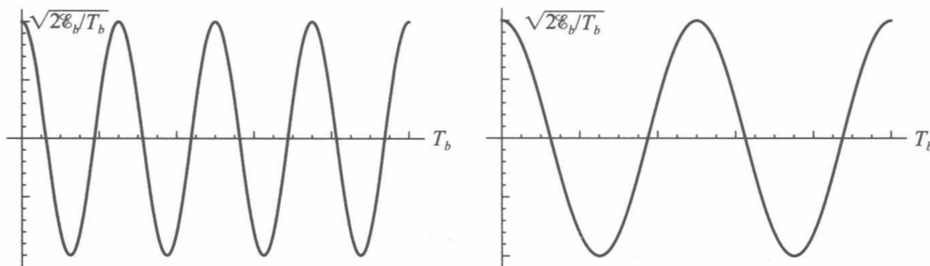


图 8-14　二进制 FSK 信号波形

二进制 FSK 信号与二进制 PPM 信号的基本差别在于其频谱特征，如图 8-15 所示。可以发现，PPM 信号的频率在频谱在 $f=0$ 附近，而 FSK 信号是带通信号。因此，PPM 信号是基带信号，适合在基带信道中传输；而 FSK 信号是带通信号，适合在带通信道中传输。可以看到，尽管这两类信号频谱特征不同，但是在加性高斯白噪声(AWGN)的信道中传输时具有相同的性能，就是因为它们具有相同的几何表示。 359

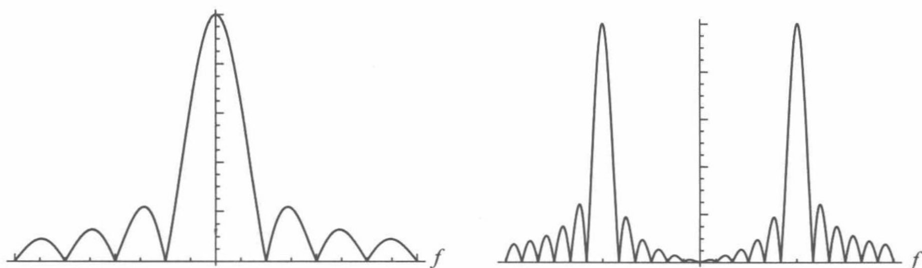


图 8-15　二进制 PPM(左)信号和二进制 FSK(右)信号的频谱特征

例 8.2.2 考虑两个正交信号波形，如图 8-16 所示。说明这两个信号波形是一种二进制正交信号，并且具有与图 8-11 相似的几何表示。

解： 由图可见，两个信号波形满足式(8.2.11)的正交条件，且能量均为$\mathscr{E}_b$。利用图 8-13 所示的正交信号基 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$，信号 $s_1'(t)$和 $s_2'(t)$可以表示为

$$\begin{aligned} s_1'(t) &= s_{11}'\psi_1(t) + s_{12}'\psi_2(t) \\ s_2'(t) &= s_{21}'\psi_1(t) + s_{22}'\psi_2(t) \end{aligned} \tag{8.2.19}$$

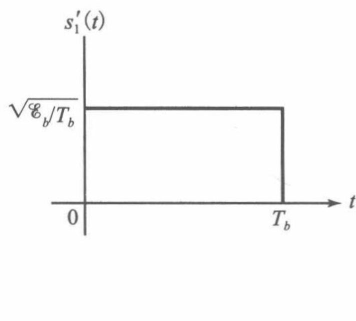
其中

$$\begin{aligned} s_{11}' &= \int_0^{T_b} s_1'(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\mathscr{E}_b/2} \\ s_{12}' &= \int_0^{T_b} s_1'(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\mathscr{E}_b/2} \\ s_{21}' &= \int_0^{T_b} s_2'(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\mathscr{E}_b/2} \\ s_{22}' &= \int_0^{T_b} s_2'(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t = -\sqrt{\mathscr{E}_b/2} \end{aligned} \tag{8.2.20}$$

360

矢量 $\boldsymbol{s}_1'=(\sqrt{\mathscr{E}_b/2}, \sqrt{\mathscr{E}_b/2})$和 $\boldsymbol{s}_2'=(\sqrt{\mathscr{E}_b/2}, -\sqrt{\mathscr{E}_b/2})$如图 8-17 所示。可以看到，矢量 $\boldsymbol{s}_1'$ 和 $\boldsymbol{s}_2'$ 相互垂直(正交)，只是图 8-11a 所示的正交矢量的相位旋转形式。

注意，由于信号 $\boldsymbol{s}_1'(t)$和 $\boldsymbol{s}_2'(t)$[译者注：原文误为 $s_1(t)$和 $s_2(t)$]相互正交，只需要对其进行归一化，并将结果作为归一化正交基。采用这种方法，我们可以得到式(8.2.10)的矢量表示，其几何表示如图 8-11所示。◀



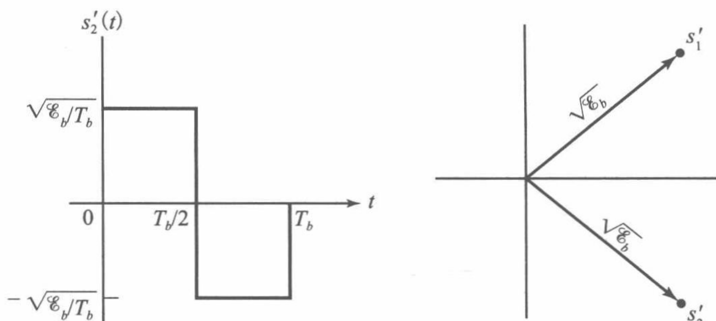


图 8-16 两种正交信号波形

图 8-17 图 8-16 所示正交波形的信号矢量

8.3 AWGN 下的二进制调制信号的最佳接收机

本节将描述接收机恢复发送信息时所进行的信号处理过程。首先描述存在加性噪声干扰的信道。

加性高斯白噪声信道。 假设通信信道中的信号传输受到加性噪声的干扰，如图 8-18 所示。因此在持续时间为 T_b 的信号间隔中，接收信号可以表示为

361

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad m = 1,2 \tag{8.3.1}$$

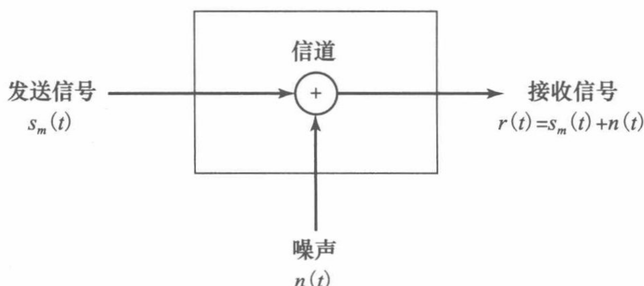


图 8-18 接收信号通过 AWGN 信道的模型

其中 $n(t)$ 表示 AWGN 过程的样本函数，功率谱密度为 $\boldsymbol{S}_n(f)=N_0/2$ W/Hz。基于对信号间隔中 $r(t)$ 的观察，希望设计一个最小化判决错误概率的最佳接收机。具体地，主要考虑在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T_b$ 中接收信号 $r(t)$ 的处理。

如图 8-19 所示，为便于分析将接收机分为两个部分，信号解调器和信号检测器。8.4.1 节将说明这种分解不会影响系统的总体最优性。信号解调器的功能是将接收到的信号波形 $r(t)$ 转换成为矢量 $\boldsymbol{y}$，其维度与发送信号波形的维度相等。检测器的功能是判定发送端发送的是两种可能的信号波形中的哪一个，这种判决的依据是基于对矢量 $\boldsymbol{y}$ 的观察而得出的。

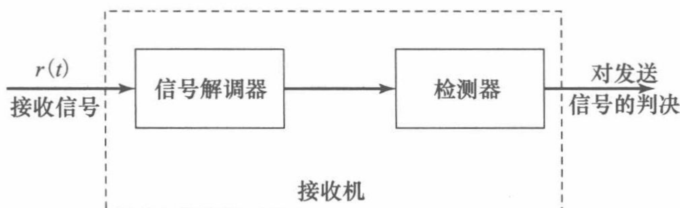


图 8-19 数字调制信号的接收机

信号解调器的两种实现将在 8.3.1 节和 8.3.2 节分别介绍。第一种是基用信号相关器，第二种是基于匹配滤波器。在信号解调器之后的最佳检测器的设计目标是最小化错误概率。

8.3.1 相关型解调器

本节将介绍相关型解调器对二进制对极信号（二进制 PAM）和二进制正交信号（二进制 PPM）的接收信号处理过程。先从二进制对极信号开始。

二进制对极信号。二进制对极信号通常可以表示为

$$s_m(t)=s_m\psi(t),\quad m=1,2 \tag{8.3.2}$$

其中 $\psi(t)$ 为单位能量矩形信号脉冲，$\psi(t)=\dfrac{p(t)}{\sqrt{\mathscr{E}_p}}$。采用矩形脉冲的特定情况下的 $\psi(t)$ 如图 8-6所示。已知二进制对极信号 $s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$s_2(t)=-\sqrt{\mathscr{E}_b}$。因此，接收信号为

$$r(t)=s_m\psi(t)+n(t),\quad 0\leqslant t<T_b,\quad m=1,2 \tag{8.3.3}$$

如图 8-20 所示，在一个相关型解调器中，接收信号 $r(t)$ 与波形 $\psi(t)$ 相乘，乘积在 $0\leqslant t<T_b$ 上积分，得到 $r(t)$ 与 $\psi(t)$ 的互相关。从数学上看这个互相关运算的结果为 362

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_0^t r(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t[s_m\psi(\tau)+n(\tau)]\psi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=s_m\int_0^t\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t n(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{8.3.4}$$

在 $t=T_b$ 时刻对相关器输出抽样，可得

$$y(T_b)=s_m+n \tag{8.3.5}$$

其中 n 是加性噪声项，其定义为

$$n=\int_0^{T_b}\psi(\tau)n(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.6}$$

由于 $n(t)$ 是一个高斯白噪声过程的样本函数，因此噪声项 n 是一个高斯随机变量，均值为零，方差为

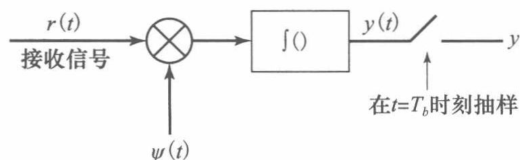


图 8-20 二进制对极信号的互相关器

$$\sigma^2 = E(n^2) = \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} E(n(t)n(\tau))\psi(t)\psi(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\psi(t)\psi(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\psi^2(t)\mathrm{d}t = \frac{N_0}{2} \tag{8.3.7}$$

这里利用了式(5.3.3)的白噪声自相关函数特征。因此，对于给定信号(给定 s_m)的传输，相关器的输出 $y=y(T_b)$是一个高斯随机变量，均值为 s_m，方差为$N_0/2$，即

$$f(y|s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\mathrm{e}^{-(y-s_m)^2/N_0},\quad m=1,2 \tag{8.3.8}$$

这两个条件概率密度函数(PDF)如图 8-21 所示。相关器的输出送入检测器，检测器判定发送比特是 0 还是 1，这部分内容将在 8.3.3 节中介绍。

363

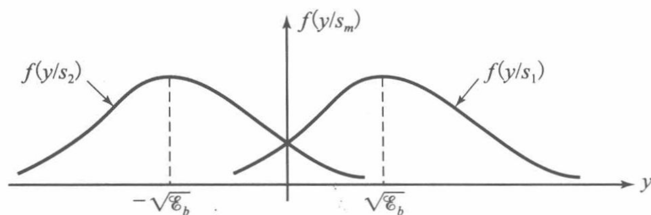


图 8-21 二进制对极信号的相关器输出的条件概率密度函数

例 8.3.1 设矩形脉冲 $\psi(t)$如图 8-6 所示，发送信号为 $s_1(t)$和 $s_2(t)$，画出相关器的无噪声输出信号示意图。

解： 设 $n(t)=0$，相关器输出的信号波形为

$$y(t) = \int_0^t s_m\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau = s_m\int_0^t\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对应 $s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$s_2(t)=-\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$y(t)$如图 8-22 所示。由于脉冲 $\psi(t)$在积分区间 $0\leqslant t<T_b$ 上为定值，因此相关器实际上就是一个积分器。可以看到相关器输出信号最大值出现在 $t=T_b$；而且，相关器的输出结果必须在每个比特间隔结束时清零，这样在下一个信号间隔中，相关器的输出才能用于接收信号的解调。这种积分器称为**积分-转储滤波器**。

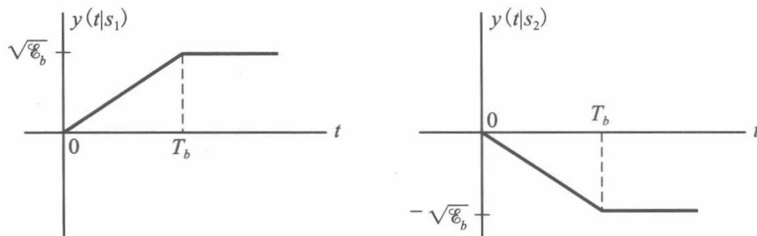


图 8-22 发送信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$时互相关器无噪声输出 ◀

例 8.3.2 若采用如图 8-8 所示的二进制对极信号来传输信息，说明相关型解调器的输出与前面讨论的采用矩形脉冲信号时的输出完全相同。

364

解： 这种情况下，$\psi(t)$如图 8-9 所示，并且接收信号为

$$r(t) = s_m\psi(t) + n(t)$$

互相关输出为

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau = s_m\int_0^t\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t n(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

在 $t=T_b$ 时，有

$$y(T_b) = s_m + n$$

互相关输出中的信号分量 s_m 与采用矩形脉冲信号时相关器的输出完全一样，并且噪声项 n 为零均值，方差 $\sigma^2=N_0/2$。 ◀

例 8.3.3 通过对接收信号波形抽样，并将其与可能的发送信号抽样形式进行互相关，相关型解调器可以在离散时间下实现。考虑基于图 8-5 所示的矩形脉冲的二进制对极信号，按照 $F_s=20/T_b$ 的速率(抽样间隔为 $T_s=T_b/20$)，对接收的信号波形 $r(t)$ 与发送脉冲 $s(t)$ 抽样。$r(t)$ 与 $s(t)$ 的互相关数值结果为

$$y(kT_s)=\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{k}r(nT_s)s(nT_s),\quad k=1,2,\cdots,20$$

当发送信号为 $s(t)$ 和 $-s(t)$ 时，对 $1\leqslant k\leqslant 20$ 计算并画出 $y(kT_s)$。$s(t)$ 是如图 8-5 所示的矩形脉冲，$r(t)$ 无噪声。对比此图与图 8-22 中连续时间相关器的输出结果。

解： 图 8-23 给出了两个二进制对极信号的离散时间相关器输出结果。与连续时间相关器的输出相似。

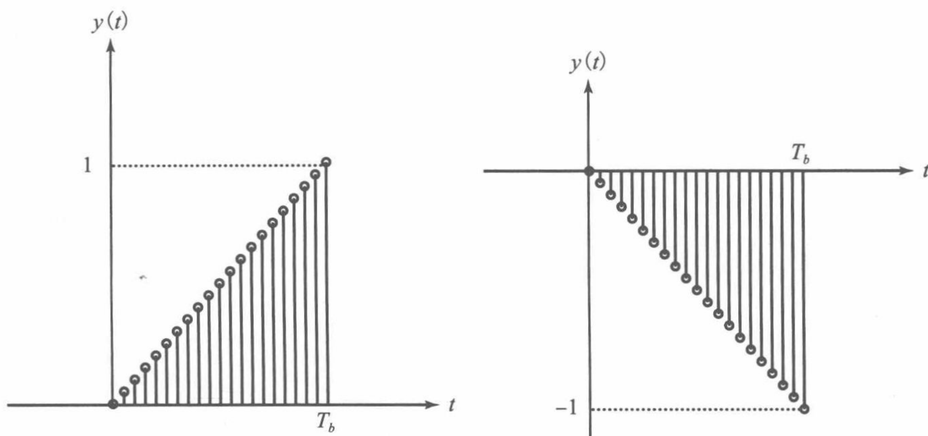


图 8-23 例 8.3.3 的相关器输出 ◀

二进制正交信号。 考虑式(8.2.13)给出的两个正交信号，如图 8-12 所示。其中 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 是如图 8-13 所示的正交基函数，$\boldsymbol{s}_1=(\sqrt{\mathscr{E}_b},\ 0)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(0,\ \sqrt{\mathscr{E}_b})$ 是两个信号矢量。用这两个信号传输 0 和 1 组成的二进制信息序列，发送速率为 $R_b=1/T_b$ 比特/秒。在 AWGN 的条件下，接收信号为

$$r(t)=s_m(t)+n(t),\quad 0\leqslant t<T_b,\quad m=1,2 \tag{8.3.9}$$

由于两个可能的发送信号是二维的，接收信号 $r(t)$ 分别与 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 基信号波形进行相关计算，如图 8-24 所示。相关器输出波形为

365

$$y_m(t)=\int_0^t r(\tau)\psi_m(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2 \tag{8.3.10}$$

该信号在 $t=T_b$ 时的抽样结果为

$$y_m=y_m(T_b)=\int_0^{T_b} r(\tau)\psi_m(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2 \tag{8.3.11}$$

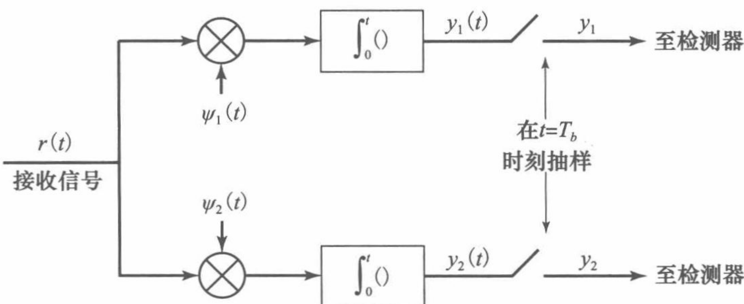


图 8-24 二进制正交信号的相关型解调器

假设发送信号为 $s_1(t)=s_{11}\psi_1(t)$，则 $r(t)=s_{11}\psi_1(t)+n(t)$。第 1 个相关器的输出为

$$y_1=\int_0^{T_b}[s_{11}\psi_1(\tau)+n(\tau)]\psi_1(\tau)\mathrm{d}\tau=s_{11}+n_1=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1 \tag{8.3.12}$$

其中 $s_{11}=\sqrt{\mathscr{E}_b}$是信号分量，$n_1$ 是噪声分量，定义为

$$n_1=\int_0^{T_b}n(\tau)\psi_1(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.13}$$

第 2 个相关器的输出为

$$y_2=\int_0^{T_b}[s_{11}\psi_1(\tau)+n(\tau)]\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.14}$$

$$=s_{11}\int_0^{T_b}\psi_1(\tau)\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^{T_b}n(\tau)\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.15}$$

$$=\int_0^{T_b}n(\tau)\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau=n_2 \tag{8.3.16}$$

由于 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$是正交的，因此第 2 个相关器的输出为噪声分量 n_2。于是，接收信号矢量为

$$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2) \tag{8.3.17}$$

$$=(\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1,n_2) \tag{8.3.18}$$

容易验证，当发送信号为 $s_2(t)=s_{22}\psi_2(t)$时，两个相关器的输出为 $y_1=n_1$ 和 $y_2=s_{22}+n_2=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_2$。因此，接收信号矢量为

$$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2) \tag{8.3.19}$$

$$=(n_1,\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_2) \tag{8.3.20}$$

366～367

互相关器的输出矢量 $\boldsymbol{y}$ 送入检测器，由检测器判定接收信号矢量对应于发送 1 还是发送 0。

容易确定观测信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 的统计特征。由于 $n(t)$是一个高斯白噪声过程的样本函数，因此噪声项 n_1 与 n_2 是零均值高斯随机变量，方差为 $\sigma^2=N_0/2$。而且，n_1 与 n_2 的相关为

$$E(n_1n_2)=\int_0^{T_b}\int_0^{T_b}\mathscr{E}(n(t)n(\tau))\psi_1(t)\psi_2(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^{T_b}\int_0^{T_b}\frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\psi_1(t)\psi_2(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\psi_1(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t=0 \tag{8.3.21}$$

即 n_1 与 n_2 无关，又因为它们都是高斯的，所以也是统计独立的。相应地，发送信号为 $s_1(t)$时，相关器输出分量$(y_1,\ y_2)$的条件联合概率密度函数为

$$f(y_1,y_2\mid\boldsymbol{s}_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^2\mathrm{e}^{-(y_1-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/N_0}\,\mathrm{e}^{-y_2^2/N_0} \tag{8.3.22}$$

当发送信号为 $s_2(t)$时，相关器输出分量$(y_1,\ y_2)$的条件联合概率密度函数为

$$f(y_1,y_2\mid\boldsymbol{s}_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^2\mathrm{e}^{-y_1^2/N_0}\,\mathrm{e}^{-(y_2-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/N_0} \tag{8.3.23}$$

由于噪声分量 n_1 与 n_2 统计独立，因此可以看到式(8.3.22)和式(8.3.23)给出的$(y_1,\ y_2)$的联合概率密度函数可以分解成边沿概率密度函数的乘积，即

$$f(y_1,y_2\mid\boldsymbol{s}_m)=f(y_1\mid\boldsymbol{s}_m)f(y_2\mid\boldsymbol{s}_m),\quad m=1,2 \tag{8.3.24}$$

例如，图 8-25 给出了发送信号 $s_1(t)$时的概率密度函数 $f(y_1\mid\boldsymbol{s}_1)$和 $f(y_2\mid\boldsymbol{s}_1)$。

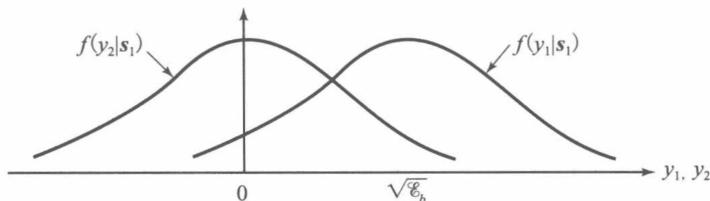


图 8-25 两个正交信号的互相关器输出$(y_1,\ y_2)$的条件概率密度函数

例 8.3.4 考虑图 8-12 中的两个正交信号，假设发送信号波形为 $s_2(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_2(t)$，无噪声时，画出图 8-24 所示两个相关器的输出波形。另一个信号波形为 $s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b}\psi_1(t)$，其中，$\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$是图 8-13 所示的基函数。

368

解： 无噪声条件下，发送 $s_2(t)$时，如图 8-26 所示，两个相关器的输出为

$$y_1(t)=\int_0^t s_2(\tau)\psi_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\sqrt{\mathscr{E}_b}\int_0^t \psi_2(\tau)\psi_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$y_2(t)=\int_0^t s_2(\tau)\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\sqrt{\mathscr{E}_b}\int_0^t \psi_2^2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

注意，无噪声条件下，因为 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$是互不交叠的正交信号，所以在 $0\leqslant t\leqslant T_b$ 内第 1 个相关器的输出为零。

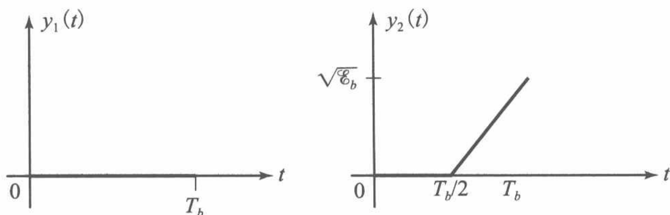


图 8-26　发送 $s_2(t)$时相关器输出信号波形 ◀

例 8.3.5 通过对接收信号抽样，并且与可能发送信号的样值序列进行互相关运算，可以在离散时间下实现如图 8-24 所示的二进制正交信号的相关型解调器。考虑基于图 8-12 所示矩形脉冲的正交信号，则有

$$r(t)=s_i(t)+n(t),\quad i=1,2$$

按照 $F_s=20/T_b$的速率对接收的信号波形 $r(t)$与发送脉冲 $s_1(t)$和 $s_2(t)$抽样。离散时间相关器的输出为 $(T_s=T_b/20)$

$$y_1(kT_s)=\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{k}r(nT_s)s_1(nT_s),\qquad 1\leqslant k\leqslant 20$$

$$y_2(kT_s)=\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{k}r(nT_s)s_2(nT_s),\qquad 1\leqslant k\leqslant 20$$

计算并画出 $s_1(t)$和 $s_2(t)$分别为输入信号时的 $y_1(kT_s)$和 $y_2(kT_s)$，设 $r(t)$无噪声。并与图 8-26 所示连续时间相关器输出结果进行对比。

解： 图 8-27 给出了无噪声时对应两个二进制正交信号的离散时间相关器输出结果。与连续时间相关器的输出相似。

369

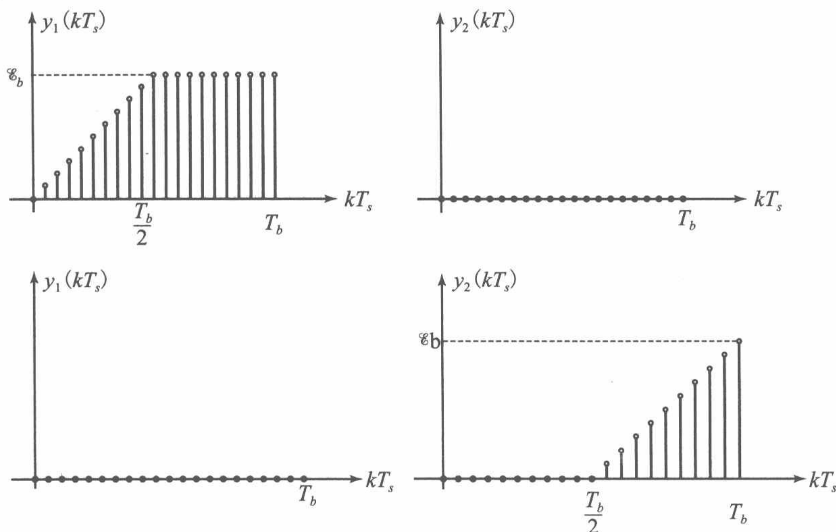


图 8-27　发送 $s_1(t)$(上)和 $s_2(t)$(下)时例 8.3.5 的相关器输出信号波形 ◀

例 8.3.6 若采用图 8-16 所示的二进制正交信号波形，求发送信号 $s_1'(t)$时两个相关器的输出。

解： 图 8-16 所示的两个正交信号可以表示为图 8-13 所示的两个互不交叠正交基信号 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$的线性组合，即

$$s_1'(t)=s_{11}'\psi_1(t)+s_{12}'\psi_2(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b/2}\psi_1(t)+\sqrt{\mathscr{E}_b/2}\psi_2(t)$$

$$s_2'(t)=s_{21}'\psi_1(t)+s_{22}'\psi_2(t)=\sqrt{\mathscr{E}_b/2}\psi_1(t)-\sqrt{\mathscr{E}_b/2}\psi_2(t)$$

发送 $s_1'(t)$时，接收信号为 $r(t)=s_1'(t)+n(t)$。两个相关器的输出为

$$y_m=\int_0^{T_b}r(\tau)\psi_m(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2$$

将 $s_1'(t)$代入积分式，并利用 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$的正交性，可以得到

370

$$y_1=\sqrt{\mathscr{E}_b/2}+n_1$$

$$y_2=\sqrt{\mathscr{E}_b/2}+n_2$$

其中噪声分量为

$$n_m=\int_0^{T_b}n(\tau)\psi_m(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2$$

已经证明，n_1 与 n_2 是统计无关的零均值高斯随机变量，方差均为 $\sigma^2=N_0/2$。因此，发送信号 $s_1'(t)$的条件下，相关器输出分量(y_1，y_2)的联合概率密度函数为

$$f(y_1,y_2\mid \boldsymbol{s}_1')=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^2\mathrm{e}^{-(y_1-\sqrt{\mathscr{E}_b/2})^2/N_0}\,\mathrm{e}^{-(y_2-\sqrt{\mathscr{E}_b/2})^2/N_0}\tag{8.3.25}$$ ◀

8.3.2 匹配滤波器型解调器

除了利用互相关实现解调的方法，还可以利用下面介绍的滤波器型解调器。与上一节相似，将介绍二进制对极信号和二进制正交信号两种情况下的解调器原理。

二进制对极信号。 我们已经注意到，对于二进制对极信号，接收信号为

$$r(t)=s_m\psi(t)+n(t),\quad 0\leqslant t<T_b,\quad m=1,2\tag{8.3.26}$$

其中 $\psi(t)$为时长 T_b 的单位能量脉冲。假设将接收信号 $r(t)$通过一个线性时变滤波器，其冲激响应为

$$h(t)=\psi(T_b-t),\quad 0\leqslant t<T_b\tag{8.3.27}$$

滤波器的输出为

$$y(t)=\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\tag{8.3.28}$$

若在 $t=T_b$ 时刻对滤波器输出抽样可得

$$y(T_b)=\int_0^{T_b}r(\tau)h(T_b-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由于 $h(T_b-\tau)=\psi(\tau)$，所以有

371

$$\begin{aligned}y(T_b)&=\int_0^{T_b}[s_m\psi(\tau)+n(\tau)]\psi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^{T_b}s_m\psi^2(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^{T_b}n(\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau=s_m+n\end{aligned}\tag{8.3.29}$$

因此，$t=T_b$ 时刻滤波器输出与互相关器的输出完全一致。

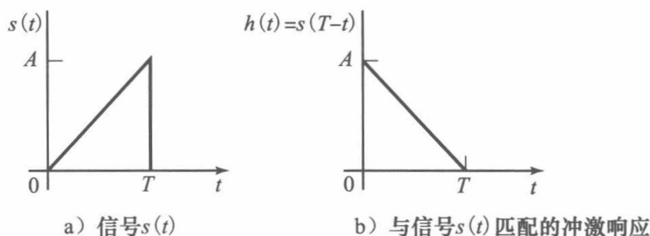


图 8-28 信号 $s(t)$及匹配 $s(t)$的滤波器

设 $s(t)$为限定在 $0\leqslant t<T_b$ 区间上的信号，冲激响应为 $h(t)=s(T-t)$的滤波器称为匹配信号 $s(t)$的匹配滤波器。图 8-28 给出一个信号及其匹配滤波器的示意图。$h(t)=s(T-t)$对信号 $s(t)$的响应为

$$y(t) = \int_0^t s(\tau)s(T-t+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.30}$$

此结果就是 $s(t)$ 的时间自相关函数，如式(2.3.37)所示。图 8-28 中三角信号脉冲的输出响应 $y(t)$ 如图 8-29 所示。可以发现，自相关函数 $y(t)$ 是时间 t 的偶函数，峰值在 $t=T$ 处，并且峰值 $y(T)$ 等于信号 $s(t)$ 的能量。

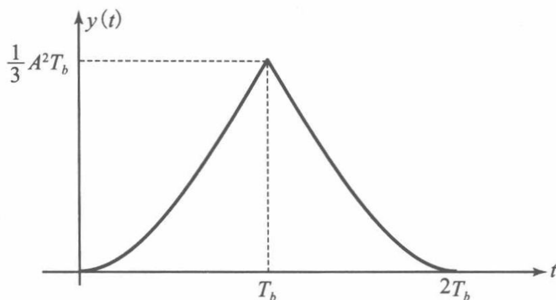


图 8-29　匹配滤波器的输出是信号 $s(t)$ 的自相关函数

例 8.3.7 对于图 8-28a 所示的信号 $s(t)$，计算其抽样序列的匹配滤波器输出，即可实现时间离散的匹配滤波器。选择抽样速率 $F_s=20/T_b$（抽样间隔 $T_s=T_b/20$）。画出匹配滤波器的输出。

372

解： 匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = s(T_b - t)$$

时间连续的输出是 $h(t)$ 与 $s(t)$ 的卷积，即

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此，时间离散的匹配滤波器输出为

$$y(kT_s) = \frac{1}{20}\sum_{m=1}^{k} h(mT_s)s(kT_s - mT_s) = \frac{1}{20}\sum_{m=1}^{k} s(20T_s - mT_s)s(kT_s - mT_s)$$

图 8-30 给出了 $y(kT_s)$ 的示意图。

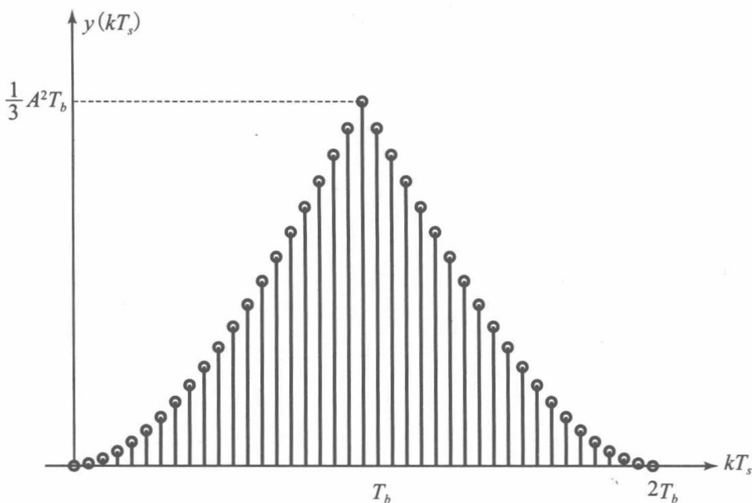


图 8-30　例 8.3.7 中匹配滤波器输出　◀

二进制正交信号。 如前所述，二进制正交信号是二维信号，因此，需要两个相关器实现解调。要取代相关器，也需要两个线性时变滤波器。具体地，考虑接收信号

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leqslant t < T_b, \quad m = 1,2 \tag{8.3.31}$$

其中 $s_m(t)(m=1, 2)$ 是式(8.2.13)给出的两个正交信号，如图 8-12 所示；$\psi_m(t)(m=1, 2)$ 是图 8-13 所示的两个正交基信号。两个分别匹配 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 的匹配滤波器的冲激响应定义

为

373

$$h_1(t)=\psi_1(T_b-t),\quad 0\leqslant t<T_b$$
$$h_2(t)=\psi_2(T_b-t),\quad 0\leqslant t<T_b \tag{8.3.32}$$

当接收信号 $r(t)$通过两个滤波器时，其输出为

$$y_m(t)=\int_0^t r(\tau)h_m(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2 \tag{8.3.33}$$

如果在 $t=T_b$ 时刻对滤波器输出抽样，可得

$$y_m(T_b)=\int_0^{T_b} r(\tau)h_m(T_b-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{T_b} r(\tau)\psi_m(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad m=1,2 \tag{8.3.34}$$

比较两个滤波器在 $t=T_b$ 时刻的输出与式(8.3.11)的互相关器输出结果，可以发现它们是相同的。因此相关型解调器与匹配滤波器型解调器在 $t=T_b$ 时刻的输出相同。

匹配滤波器的性质。匹配滤波器具有一些有趣的性质，可以表述如下。如果信号 $s(t)$受到 AWGN 干扰，匹配 $s(t)$的滤波器的冲激响应能够最大化输出信噪比(SNR)。

为了证明这个性质，假设接收信号 $r(t)$由信号 $s(t)$和噪声 $n(t)$组成，噪声的均值为零，功率谱密度为 $S_n(f)=N_0/2$ W/Hz。设信号 $r(t)$通过冲激响应为 $h(t)$的滤波器，$0\leqslant t\leqslant T_b$，在 $t=T_b$ 时刻对滤波器输出抽样。对信号和噪声分量的滤波器响应为

$$y(t)=\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t s(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t n(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.3.35}$$

在抽样时刻 $t=T$ 信号和噪声分量为

$$y(T)=\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^T n(\tau)h(T-\tau)\mathrm{d}\tau=y_s(T)+y_n(T) \tag{8.3.36}$$

374

其中 $y_s(T)$表示信号分量，$y_n(T)$表示噪声分量。接下来的问题是如何选择滤波器的冲激响应，从而最大化定义如下的输出 SNR

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{y_s^2(T)}{E(y_n^2(T))} \tag{8.3.37}$$

式(8.3.37)中的分母就是滤波器输出中的噪声项的方差。计算 $E(y_n^2(T))$可得

$$\begin{aligned}E(y_n^2(T))&=\int_0^T\int_0^T E(n(\tau)n(t))h(T-\tau)h(T-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T\delta(t-\tau)h(T-\tau)h(T-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.3.38}$$

可见，噪声方差与噪声的功率谱密度及冲激响应 $h(t)$的能量有关。

将 $y_s(T)$和 $E(y_n^2(T))$代入式(8.3.37)中，可以得到输出 SNR 的表达式为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\mathrm{d}t}=\frac{\left[\int_0^T h(\tau)s(T-\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T h^2(T-t)\mathrm{d}t} \tag{8.3.39}$$

由于 SNR 的分母依赖于 $h(t)$的能量，在分母为常数的条件下，最大化$(S/N)_o$的分子就可以得到基于 $h(t)$的最大输出 SNR。实现分子最大化最简单的方法是利用柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwartz)不等式，即若 $g_1(t)$和 $g_2(t)$是有限能量信号，则

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)\mathrm{d}t \tag{8.3.40}$$

其中等号成立的条件是 $g_1(t)=Cg_2(t)$，C 为常数。若设 $g_1(t)=h(t)$，且 $g_2(t)=s(T-t)$，显然当 $h(t)=Cs(T-t)$时，即 $h(t)$与信号 $s(t)$匹配时，$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ 被最大化。缩放因子 C^2 可以

从$(S/N)_o$的表达式中删除，因为在分子和分母中都有这一项。

匹配滤波器的输出(最大)SNR为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{2}{N_0}\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2\mathscr{E}_s}{N_0} \tag{8.3.41}$$

375

其中$\mathscr{E}_s$是信号$s(t)$的能量。可见匹配滤波器的输出SNR取决于信号$s(t)$的能量，但是与$s(t)$的细节特征无关。这是匹配滤波器另一个有趣的特征。

匹配滤波器的频率域解释。对于匹配滤波器，有一种有趣的频率域解释。由于$h(t)=s(T-t)$，因此这种关系的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}H(f) &= \int_0^T s(T-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t = \left[\int_0^T s(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT} \\ &= S^*(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\end{aligned} \tag{8.3.42}$$

可见，匹配滤波器的频率响应就是发送信号频谱的复共轭乘以相位因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}$，这个相位因子代表抽样时延$T$。换言之，$|H(f)|=|S(f)|$，即匹配滤波器与发送信号频谱具有相同的幅值响应。另一方面，$H(f)$的相位等于信号$S(f)$相位的负值，且相移为T的线性函数。

这样，如果频谱为$S(f)$的信号$s(t)$通过匹配滤波器，则输出为$Y(f)=|S(f)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}$。因此输出信号的波形为

$$\begin{aligned}y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f\end{aligned} \tag{8.3.43}$$

在$t=T$时刻对匹配滤波器的输出进行抽样，可得

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\mathrm{d}f = \int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t = \mathscr{E}_s \tag{8.3.44}$$

其中最后一步服从帕斯瓦尔(Parseval)关系。

匹配滤波器输出噪声的功率谱密度为

$$\boldsymbol{S}_0(f) = |H(f)|^2 N_0/2 \tag{8.3.45}$$

因此，匹配滤波器输出的噪声总功率为

$$\begin{aligned}P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S}_0(f)\mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}|H(f)|^2\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{S}(f)|^2\mathrm{d}f = \frac{N_0\mathscr{E}_s}{2}\end{aligned} \tag{8.3.46}$$

376

输出SNR就是信号功率

$$P_s = y_s^2(T) \tag{8.3.47}$$

与噪声功率P_n的比值，即

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\mathscr{E}_s^2}{N_0\mathscr{E}_s/2} = \frac{2\mathscr{E}_s}{N_0} \tag{8.3.48}$$

这与式(8.3.41)的结果一致。

例8.3.8 考虑在AWGN信道中采用二进制正交PPM信号来传输信息，如图8-12所示。假设噪声均值为零，功率谱密度为$N_0/2$。求发送信号$s_1(t)$时，匹配滤波器解调器的冲激响应和输出信号波形。

解：二进制PPM信号维度$N=2$。因此需要两个基函数来表示信号。根据图8-13，选择$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$为

$$\psi_1(t) = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T_b}{2} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\psi_2(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}, & \dfrac{T_b}{2}\leqslant t\leqslant T_b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这些波形如图 8-31a 所示。两个匹配滤波器的冲激响应为

$$h_1(t)=\psi_1(T_b-t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}, & \dfrac{T_b}{2}\leqslant t\leqslant T_b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$h_2(t)=\psi_2(T_b-t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T_b}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其波形如图 8-31b 所示。

若发送 $s_1(t)$，两个匹配滤波器的无噪声响应如图 8-31(c)所示。对 $y_1(t)$和 $y_2(t)$在 $t=T_b$ 时刻抽样，可得 $y_{1s}(T_b)=\sqrt{\mathscr{E}_b}$和 $y_{2s}(T_b)=0$。因此两个匹配滤波器输出在 $t=T_b$ 时刻抽样的矢量为

377

$$y=(y_1,y_2)=(\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1,n_2) \tag{8.3.49}$$

其中 $n_1=y_{1n}(T_b)$和 $n_2=y_{2n}(T_b)$是匹配滤波器输出的噪声分量，即

$$y_{kn}(T_b)=\int_0^{T_b}n(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2 \tag{8.3.50}$$

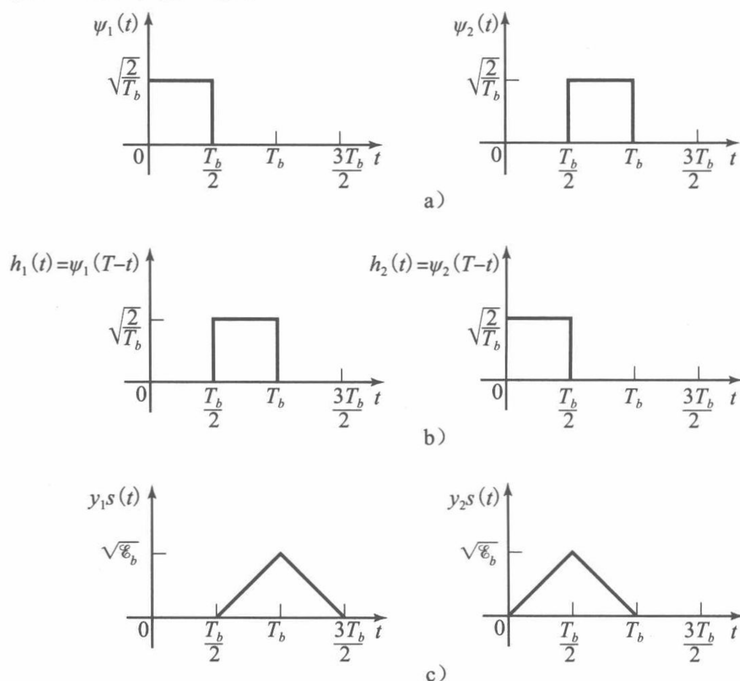
显然，$E(n_k)=E(y_{kn}(T_b))=0$。它们的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_n^2=E(y_{kn}^2(T_b))&=\int_0^{T_b}\int_0^{T_b}E(n(\tau)n(t))\psi_k(t)\psi_k(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\int_0^{T_b}\delta(t-\tau)\psi_k(\tau)\psi_k(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\psi_k^2(t)\mathrm{d}t=\frac{N_0}{2}\end{aligned} \tag{8.3.51}$$

可以得到第 1 个匹配滤波器的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{\sqrt{\mathscr{E}_b}}{N_0\,\mathscr{E}_b/2}=\frac{2\,\mathscr{E}_b}{N_0}$$

由于$\mathscr{E}_b$ 是每个信息比特的信号能量，上式与前面的结果一致。而且，两个匹配滤波器对发送信号 $s_2(t)$的输出为$(y_1,\ y_2)=(n_1,\ \sqrt{\mathscr{E}_b}+n_2)$。◀



378

图 8-31　例 8.3.8 的基函数与匹配滤波器响应

8.3.3　二进制信号最佳检测器的性能

本节介绍检测器对解调器的输出进行判决的最佳判决准则。为了推导这个准则，假设连续的信号间隔中的接收信号统计独立，这样检测器在对一个比特间隔中的接收信号进行判决时，只需要考虑这个比特间隔内的输入。

二进制对极信号。已知任意信号(比特)间隔中解调器的输出为

$$y = s_m + n, \quad m = 1,2 \tag{8.3.52}$$

其中 $s_m = \pm\sqrt{\mathscr{E}_b}$ 且 n 为零均值高斯随机变量，方差为 $\sigma_n^2 = N_0/2$。条件概率密度函数 $p(y|s_m)$，$m=1$，2 见式(8.3.8)和图 8-21。

由于检测器的输入是一个标量，显然检测器将 y 与阈值 α 比较，若 $y>\alpha$，判断发送的信号是 $s_1(t)$；否则，判断发送的信号是 $s_2(t)$。这个方案的最优性将在 8.4.1 节进行分析。在本章后文中，将说明这个判决准则可以最大化正确判决的概率，或者等价地说可以最小化错误判决概率。

对于二进制对极信号，平均错误概率是阈值 α 的函数

$$P_2(\alpha) = P(s_1)\int_{-\infty}^{\alpha} f(y|s_1)\mathrm{d}y + P(s_2)\int_{\alpha}^{\infty} f(y|s_2)\mathrm{d}y \tag{8.3.53}$$

其中 $P(s_1)$和 $P(s_2)$是两个可能发送信号的先验概率。现在要求出能够使平均错误概率最小的阈值 α 的取值，记为 α^*。对 $P_2(\alpha)$相对于 α 的微分，并设导数为零，可得

$$P(s_1)f(\alpha|s_1) + P(s_2)f(\alpha|s_2) = 0$$

等价于

$$\frac{f(\alpha|s_1)}{f(\alpha|s_2)} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \tag{8.3.54}$$

将式(8.3.8)给出的条件概率密度函数代入式(8.3.54)，且 $s_1=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，$s_2=-\sqrt{\mathscr{E}_b}$，则有

379

$$\mathrm{e}^{-(\alpha-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/N_0}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/N_0} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \tag{8.3.55}$$

或者，等价于

$$\mathrm{e}^{4\alpha\sqrt{\mathscr{E}_b}/N_0} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

显然，最佳阈值为

$$\alpha^* = \frac{N_0}{4\sqrt{\mathscr{E}_b}}\ln\frac{P(s_2)}{P(s_1)} \tag{8.3.56}$$

可以发现，如果 $P(s_1)>P(s_2)$，则 $\alpha^*<0$，如果 $P(s_2)>P(s_1)$，则 $\alpha^*>0$。实际上，两种可能的发送信号通常是等概率的，即先验概率 $P(s_1)=P(s_2)=1/2$。这种情况下，式(8.3.56)可以导出阈值 $\alpha^*=0$，且平均错误概率为

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y|s_1)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f(y|s_2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(y|s_1)\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(y-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/N_0}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{8.3.57}$$

对变量进行简单替换，即 $x=(y-\sqrt{\mathscr{E}_b})/\sqrt{N_0/2}$，上式的积分可以表示为

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{2\mathscr{E}_b/N_0}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \tag{8.3.58}$$

其中 $Q(x)$是正态(高斯)概率密度函数的尾部区域面积，定义为

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u \tag{8.3.59}$$

对于$Q(x)$的更多性质，见式(5.1.7)后的讨论。可以发现错误概率只取决于 SNR 值 $2\mathscr{E}_b/N_0$，而与脉冲波形的细节特征无关。而且，式(5.1.8)至式(5.1.10)表明错误概率随着 SNR 增长而趋近于零。

二进制正交信号。对于二进制正交信号，解调器的输出为二维矢量，已知任意信号(比特)间隔中解调器的输出为$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2)$，其中$y_1$和$y_2$是两个互相关器或者匹配滤波器的输出。如果发送信号$s_1(t)$时，解调器的输出为

380

$$y_1=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1$$

$$y_2=n_2$$

其中噪声分量n_1与n_2是统计独立的零均值高斯随机变量，方差为$\sigma^2=N_0/2$。对于两个正交信号等概率出现的情况，即$P(s_1)=P(s_2)=1/2$，检测器可以直接比较y_1和y_2达到最小化平均错误概率。若$y_1>y_2$，检测器判断发送信号为$s_1(t)$；否则，判断发送信号为$s_2(t)$。这个方案的最优性将在8.4.1节讨论。基于这种判决准则，假设发送信号为$s_1(t)$，错误概率$y_1-y_2<0$。由于y_1和y_2是高斯随机变量，方差相等，且统计独立，二者之差为

$$z=y_1-y_2=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1-n_2 \tag{8.3.60}$$

差值z也是高斯随机变量，均值为$\sqrt{\mathscr{E}_b}$，方差为$\sigma^2=N_0$。相应地，z的概率密度函数为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\mathrm{e}^{-(z-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/2N_0} \tag{8.3.61}$$

而平均错误概率为

$$P_2=P(z<0)=\int_{-\infty}^{0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{\mathscr{E}_b/N_0}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=Q\left(\sqrt{\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{8.3.62}$$

比较式(8.3.58)给出的二进制对极信号的平均错误概率，与二进制正交信号的平均错误概率，可以发现，对于同样的比特错误概率P_2，二进制对极信号需要的信号能量比正交信号的少2倍(3dB)。两类信号的误比特率P_2如图8-32所示。

一般二进制等概率信号的性能。对于等概消息，对二进制对极信号和正交信号的分析显示，

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\quad \text{对于二进制对极信号} \tag{8.3.63}$$

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\quad \text{对于二进制正交信号} \tag{8.3.64}$$

381

其中$\mathscr{E}_b$是每比特能量，$N_0/2$是噪声功率谱密度。

对于比特错误概率有两个有趣的发现。第一，错误概率依赖于$\mathscr{E}_b/N_0$，并且与信号和噪声的细节无关。第二，$2\mathscr{E}_b/N_0$也是匹配滤波器(相关型)解调器的输出。比值$\mathscr{E}_b/N_0$通常称为信号噪声比或者每比特信噪比(SNR/bit)。

还可以发现两种情况下，错误概率可以表示为两个信号s_1与s_2的距离。根据图8-7，可以发现在二进制对极信号的情况下，两个信号的距离为$d_{12}=2\sqrt{\mathscr{E}_b}$。将$\mathscr{E}_b=d_{12}^2/4$代入式(8.3.63)，可得

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right) \tag{8.3.65}$$

与此类似，对于二进制正交信号，根据图8-11，有$d_{12}=\sqrt{\mathscr{E}_b}$，代入式(8.3.64)同样可导出式(8.3.65)。

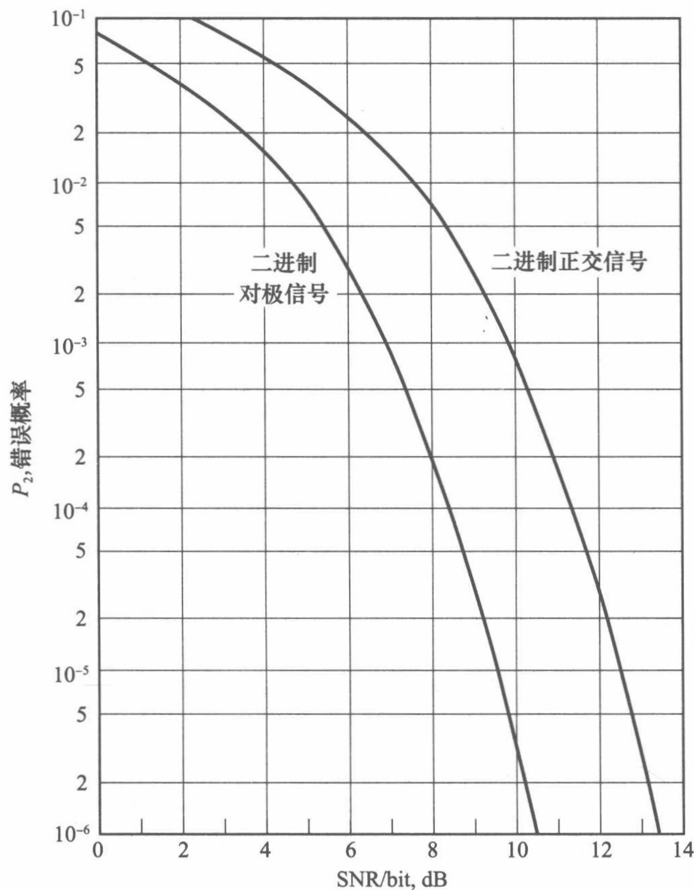


图 8-32　二进制信号的错误概率

式(8.3.65)表明错误概率依赖于欧氏空间中两个信号点之间的距离。一般来说，两个信号点之间的欧氏距离可以直接用两个信号波形表示为

$$d_{12}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) - s_2(t)]^2 \mathrm{d}t \tag{8.3.66}$$

可以发现，式(8.3.65)可以用于计算任意消息等概发生的二进制通信系统受到 AWGN 干扰的错误概率。

例 8.3.9 采用如图 8-33 所示的信号波形 $s_1(t)$和 $s_2(t)$在 AWGN 信道中传输数据。求该系统的比特错误概率。

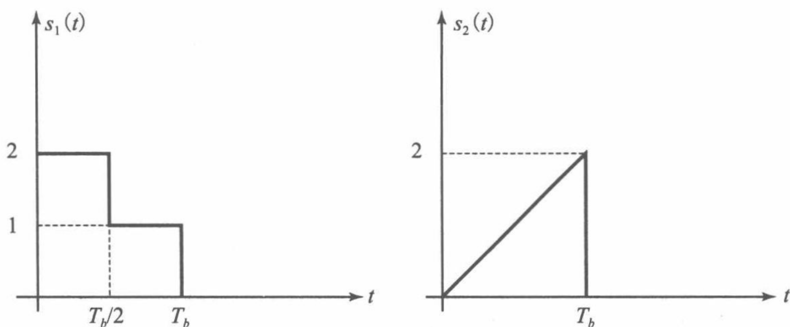


图　8-33

解：两个信号可表示为

$$s_1(t)=\begin{cases}2 & 0\leqslant t<T_b/2\\ 1 & T_b/2\leqslant t<T_b\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$s_2(t)=\begin{cases}2t/T_b & 0\leqslant t<T_b\\ 0 & 其他\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}d_{12}^2&=\int_0^{T_b}(s_1(t)-s_2(t))^2\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{T_b/2}(2-2t/T_b)^2\,\mathrm{d}t+\int_{T_b/2}^{T_b}(1-2t/T_b)^2\,\mathrm{d}t\\&=\left[-\frac{T_b}{6}\left(2-\frac{2t}{T_b}\right)^3\right]_0^{T_b/2}+\left[-\frac{T_b}{6}\left(1-\frac{2t}{T_b}\right)^3\right]_{T_b/2}^{T_b}\\&=\frac{4}{3}T_b\end{aligned}$$

382 ~ 383

代入式(8.3.65)，可得

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{2T_b}{3N_0}}\right)$$ ◀

8.4 M 进制数字调制

在 8.2 节和 8.3 节中，介绍了利用两种二进制信号，即对极信号或正交信号，进行每次 1 比特的传输。这一节要考虑利用多于两种的信号，同时传输多个比特的方法。在这种情况下，二进制信息序列被分成长为 k 比特的数据块，称为符号(symbol)。每个块(符号)可以用 $M=2^k$ 个信号波形之一表示，持续时间为 T。这种调制方式称为 M 进制调制。定义信号(符号)速率 R_s 为每秒发送的信号(符号)数。显然

$$R_s=\frac{1}{T}$$

并且，由于每个符号携带 $k=\log_2 M$ 比特信息，比特率为

$$R_b=kR_s=\frac{k}{T}$$

比特间隔为

$$T_b=\frac{1}{R_b}=\frac{T}{k}$$

如图 8-34 所示。

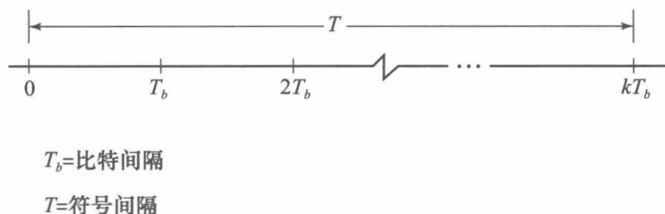


图 8-34 符号间隔与比特间隔的关系

M 个信号波形可以是一维的或多维的。一维 M 进制信号就是二进制 PAM(对极)信号的扩展。

8.4.1 AWGN 中 M 进制信号的最佳接收机

在 8.3 节中介绍了 AWGN 下二进制对极信号和正交信号的最佳接收机。本节导出 AWGN 下 M 进制信号的最佳接收机。

如上所述，调制器的输入序列可以分为 k 比特的块，称为符号，并且 $M=2^k$ 个符号中的每一个分别对应集合$\{s_m(t),\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$中的一个信号波形。每个波形在符号(信号)间隔或者 T 的时隙内发送。具体地，考虑间隔 $0\leqslant t<T$ 中的信息传输。

384

假设信道中的信号受到加性高斯白噪声干扰，如图 8-18 所示。这样，接收信号可以表示为

$$r(t)=s_m(t)+n(t),\quad 0\leqslant t<T \tag{8.4.1}$$

其中 $n(t)$表示 AWGN 过程的样本函数，功率谱密度为 $S_n(f)=\frac{N_0}{2}$ W/Hz。基于对信号间隔中接收信号的观察，希望设计出一种在最小化错误概率的意义上最佳的接收机。

信号解调器。与二进制信号下的分析一样，也将接收机的设计分为两个部分：信号解调器和检测器。信号解调器的作用是将接收信号 $r(t)$转换成 N 维矢量 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N)$，$N$ 是发送信号波形的维度。检测器的作用是根据矢量 $\boldsymbol{y}$ 判断发送的是 M 个信号中的哪一个。

已知每个 M 进制信号波形都是 N 维的，可以表示为

$$s_m(t)=\sum_{k=1}^{N}s_{mk}\psi_k(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.4.2}$$

其中$\{s_{mk}\}$是信号矢量

$$\boldsymbol{s}_m=(s_{m1},s_{m2},\cdots,s_{mN}),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.4.3}$$

的坐标；$\psi_k(t)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 是支撑 N 维信号空间的 N 个正交基信号波形。这样，集合$\{s_m(t),\ 1\leqslant m\leqslant M\}$中 M 个可能信号均可以表示成 N 维基信号$\{\psi_k(t)\}$的加权线性组合。

对于符号间隔中的噪声波形 $n(t)$，基信号$\{\psi_k(t)\}$不能支撑噪声空间。不过，我们将说明落在信号空间之外的噪声项与信号检测无关。

作为二进制信号解调器的推广，我们可以采用如图 8-35 所示的 N 个并列的互相关器构成的相关型解调器，也可以采用如图 8-36 所示的 N 个并列的匹配滤波器构成的匹配滤波器型解调器。具体地，假设接收信号 $r(t)$通过 N 个并列的互相关器。在信号间隔结束时，相关器的输出为

385

$$\int_0^T r(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t=\int_0^T[s_m(t)+n(t)]\psi_k(t)\mathrm{d}t$$
$$y_k=s_{mk}+n_k,\quad k=1,2,\cdots N \tag{8.4.4}$$

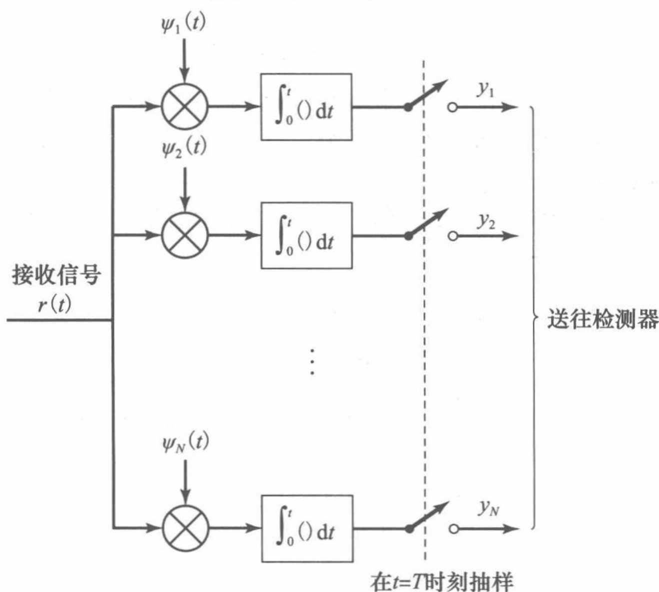


图 8-35　相关型解调器

其中

$$s_{mk}=\int_0^T s_m(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots N,$$
$$n_k=\int_0^T n(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots N \tag{8.4.5}$$

式(8.4.4)等价于

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{n} \tag{8.4.6}$$

其中信号的矢量表示为 $\boldsymbol{s}_m$，其分量为 s_{mk}，$k=1$，2，$\cdots N$。这些分量的取值取决于发送信号是 M 个信号中的哪一个。$\boldsymbol{n}$ 的分量，即$\{n_k\}$，是来自加性噪声的随机变量。

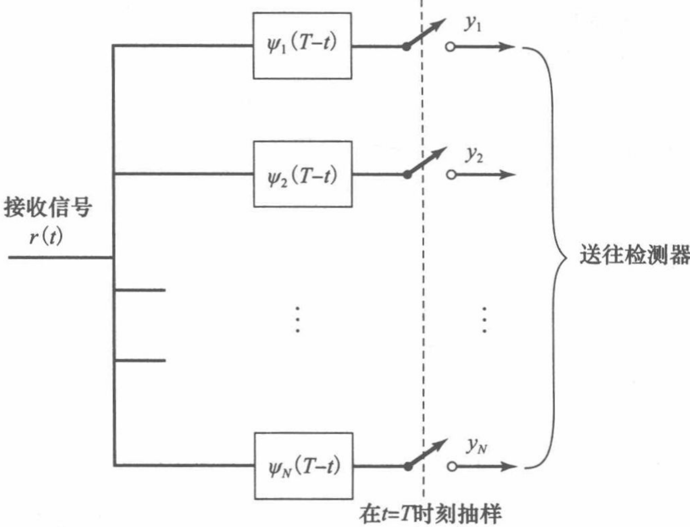


图 8-36 匹配滤波器型解调器

实际上，间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 中的接收信号 $r(t)$ 可以表示为

$$r(t)=\sum_{k=1}^{N}s_{mk}\psi_k(t)+\sum_{k=1}^{N}n_k\psi_k(t)+n'(t)=\sum_{k=1}^{N}y_k\psi_k(t)+n'(t) \tag{8.4.7}$$

$n'(t)$定义为

$$n'(t)=n(t)-\sum_{k=1}^{N}n_k\psi_k(t) \tag{8.4.8}$$

$n'(t)$是一个零均值高斯噪声过程，表示原始噪声过程 $n(t)$ 与其在基信号$\{\psi_k(t)\}$上投影项的差值。后面我们将说明在判断发送信号是哪一个时，与 $n'(t)$ 无关。因此，完全可以根据相关器输出的信号和噪声分量 $y_k=s_{mk}+n_k$，$k=1$，2，$\cdots N$ 进行判决。

由于信号$\{s_m(t)\}$是确知的，信号分量$\{s_{mk}\}$也是确知的。噪声分量$\{n_k\}$是高斯随机变量，对任意 k，其均值为

386~387

$$E(n_k)=\int_0^T E(n(t))\psi_k(t)\mathrm{d}t=0 \tag{8.4.9}$$

协方差为

$$\begin{aligned}E(n_kn_m)&=\int_0^T\int_0^T E(n(t)n(\tau))\psi_k(t)\psi_m(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^T\int_0^T\frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\psi_k(t)\psi_m(\tau)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\frac{N_0}{2}\int_0^T\psi_k(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t=\frac{N_0}{2}\delta_{km}\end{aligned} \tag{8.4.10}$$

其中 $m=k$ 时 $\delta_{km}=1$，其他情况 $\delta_{km}=0$。因此，N 个噪声分量$\{n_k\}$是零均值不相关的高斯

随机变量，方差均为$\sigma^2=N_0/2$，且概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{n})=\prod_{i=1}^{N}f(n_i)=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{N}-\frac{n_i^2}{N_0}} \tag{8.4.11}$$

根据前面的推导可知，在发送第m个信号的条件下，相关器输出$\{y_k\}$是的高斯随机变量，均值为

$$E(y_k)=E(s_{mk}+n_k)=s_{mk} \tag{8.4.12}$$

方差为

$$\sigma_y^2=\sigma_n^2=N_0/2 \tag{8.4.13}$$

由于噪声分量$\{n_k\}$是不相关的高斯随机变量，它们也是统计独立的。因此，在发送第m个信号的条件下，相关器输出$\{y_k\}$是统计独立的高斯变量。这样，随机变量$(y_1, y_2, \cdots, y_N)=\boldsymbol{y}$的条件概率密度函数(PDF)为

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)=\prod_{k=1}^{N}f(y_k|s_{mk}),\quad m=1,2,\cdots M \tag{8.4.14}$$

其中

$$f(y_k|s_{mk})=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\mathrm{e}^{-(y_k-s_{mk})^2/N_0},\quad k=1,2,\cdots N \tag{8.4.15}$$

388

将式(8.4.15)代入式(8.4.14)，可以得到联合条件概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left[-\sum_{k=1}^{N}(y_k-s_{mk})^2/N_0\right] \tag{8.4.16}$$

$$=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp[-\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{s}_m\|^2/N_0],\quad m=1,2,\cdots M \tag{8.4.17}$$

最后要说明的一点是，相关器输出$(y_1, y_2, \cdots, y_N)$是*充分统计量*，可以支持获知发送信号是M个信号中的哪一个的判断。也就是说不需要从$n'(t)$中提取其他相关信息。实际上，$n'(t)$与N个相关器的输出$\{y_k\}$无关，即

$$\begin{aligned}E(n'(t)y_k)&=E(n'(t)s_{mk})+E(n'(t)n_k)=E(n'(t)n_k)\\&=E\Big(\Big(n(t)-\sum_{j=1}^{N}n_j\psi_j(t)\Big)n_k\Big)\\&=\int_0^T E(n(t)n(\tau))\psi_k(\tau)\mathrm{d}\tau-\sum_{j=1}^{N}E(n_jn_k)\psi_j(t)\\&=\frac{N_0}{2}\psi_k(t)-\frac{N_0}{2}\psi_k(t)=0\end{aligned} \tag{8.4.18}$$

由于$n'(t)$均值为零，意味着$n'(t)$与r_k无关。而$n'(t)$和$\{y_k\}$是高斯变量且统计无关，则它们也是统计独立的。这就是说，$n'(t)$不包含任何与信号波形判决相关的信息，所有相关信息都包含在相关器的输出$\{y_k\}$中。因此，可以忽略$n'(t)$。

例 8.4.1 考虑在基带 AWGN 信道中传送$M=4$的 PAM 信号，信号波形为

$$s_m(t)=s_m\psi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

其中$\psi_k(t)$是时间T内的单位能量矩形脉冲，$\{s_m\}$的四个信号点是$\pm d$和$\pm 3d$。信号相对原点对称，且相邻信号点距离均为$2d$。加性噪声为零均值高斯白噪声过程，功率谱密度为$N_0/2$。求解调器输出的接收信号概率密度函数，并画出示意图。

解：接收信号可以表示为

$$r(t)=s_m(t)+n(t)$$

389

解调器输出为

$$y(T)=\int_0^T r(t)\psi(t)\mathrm{d}t=\int_0^T[s_m(t)+n(t)]\psi(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{n}$$

其中 n 为零均值高斯随机变量，方差为 $\sigma^2=N_0/2$。因此，$y\equiv y(T)$ 的概率密度函数为

$$f(y\mid s_m)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-(y-s_m)^2/N_0},\quad m=1,2,\cdots,M$$

其中 $s_m=(2m-1-M)d$。

$M=4$ 的 PAM 信号的概率密度函数如图 8-37 所示。 ◀

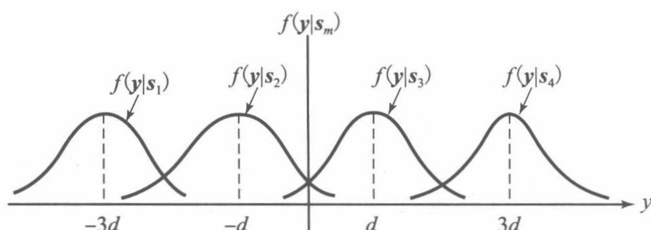


图 8-37 加性高斯白噪声下 $M=4$ 的 PAM 信号的概率密度函数

例 8.4.2 考虑在基带 AWGN 信道中传送 $M=4$ 的正交信号，4 个信号点为

$$s_1=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,0)$$
$$s_2=(0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0)$$
$$s_3=(0,0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0)$$
$$s_4=(0,0,0,\sqrt{\mathscr{E}_s})$$

加性噪声为零均值高斯白噪声过程，功率谱密度为 $N_0/2$。求解调器输出的接收信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数，假设发送信号为 $s_1(t)$，画出矢量 $\boldsymbol{y}$ 的每个分量的 PDF 示意图。

解：对应发送信号 $s_1(t)$ 的信号矢量为

$$s_1=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,0)$$

根据式(8.4.6)，相应的接收信号矢量为

390

$$\boldsymbol{y}=s_1+\boldsymbol{n}=(\sqrt{\mathscr{E}_s}+n_1,n_2,n_3,n_4)$$

其中噪声分量 n_1，n_2，n_3，n_4 为相互统计独立的零均值高斯随机变量，方差均为 $\sigma^2=N_0/2$。因此，根据式(8.4.16)，矢量分量 y_1，y_2，y_3，y_4 的联合概率密度为

$$f(\boldsymbol{y}\mid s_1)=\frac{1}{(\pi N_0)^2}e^{-[(y_1-\sqrt{\mathscr{E}_s})^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2]/N_0}$$

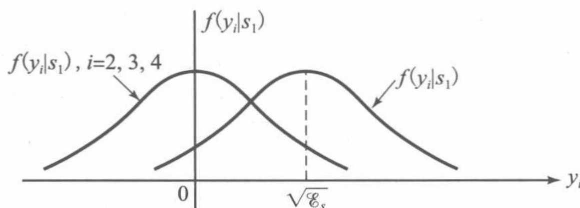


图 8-38 例 8.4.2 中矢量 $\boldsymbol{y}$ 的接收信号分量的 PDF

矢量 $\boldsymbol{y}$ 的每个分量的 PDF 如图 8-38 所示。可以看到 y_2，y_3，y_4 的 PDF 是相同的。 ◀

最佳检测器。从上述分析可见，一个信号在 AWGN 信道上传输时，不论是相关型解调器还是匹配滤波器型解调器，其输出矢量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 都包含了接收信号中全部有用信息。矢量 $\boldsymbol{y}$ 是两个矢量之和。第一个矢量是等价于发送信号的信号矢量 s_m，第二个矢量是噪声矢量 $\boldsymbol{n}$。矢量 s_m 是信号星座图中的一个信号点。噪声矢量 $\boldsymbol{n}$ 是 N 维随机矢量，包含 N 个独立同分布的分量，每个分量都是零均值高斯随机变量，方差为 $N_0/2$。由于噪声分量是独立的，且具有相同的均值和方差，因此噪声矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分布在 N 维空间中球形对称。发送 s_m 时，接收矢量 $\boldsymbol{y}$ 代表接收信号 s_m 与球形对称的噪声矢量 $\boldsymbol{n}$ 的叠加，因此可以表示为以 s_m

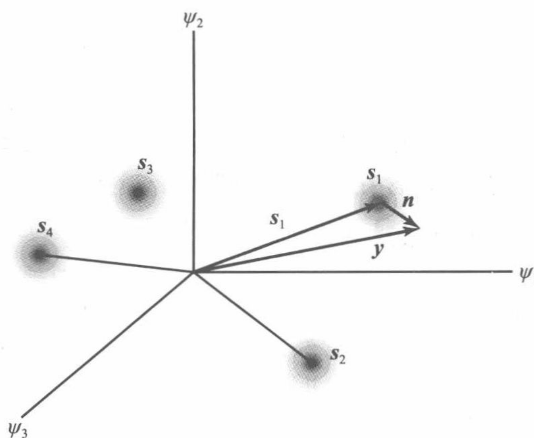


图 8-39 $N=3$，$M=4$ 时的信号星座图、噪声云以及接收信号矢量。假设发送信号为 s_i

为中心的球形云。这个云越靠近中心的部分密度越高，越偏离 $\boldsymbol{s}_m$ 的部分密度越低，在这些低密度点上接收到信号的可能性越低。噪声的方差$N_0/2$决定了以 $\boldsymbol{s}_m$ 为中心的噪声云的密度。对于较低的$N_0/2$，噪声云紧密围绕 $\boldsymbol{s}_m$，密度随着偏离 s_m 的距离增大而急剧下降。对于较高的$N_0/2$，噪声云扩散范围较大，相比低方差的情况，偏离 $\boldsymbol{s}_m$ 较大距离的点出现概率较高。图 8-39 给出了 $N=3$，$M=4$ 时的信号星座图、噪声云以及接收信号矢量。

我们希望设计一个信号检测器，能够在每个信号区间根据接收到的信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 的观测值，对该区间内的信号进行判断，确定发送的是哪一个信号。并且保证正确判决的概率最大。为此，考虑一个基于计算后验概率的判决准则，后验概率的定义为

$$P(\text{发送信号为 } \boldsymbol{s}_m \mid \boldsymbol{y}) \qquad m=1,2,\cdots,M \tag{8.4.19}$$

391

并简记为 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$。该评价准则根据后验概率集$\{P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})\}$中的最大值选择相应的信号。在本节最后将证明该准则能够使正确判决概率最大化，也就是使错误判决概率最小化。

显然，没有任何接收信息 $\boldsymbol{y}$ 时，最好的判决就是选择最大先验概率 $P(\boldsymbol{s}_m)$的信号 $\boldsymbol{s}_m$。收到了信息 y 之后，可以用后验（条件）概率 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$取代先验概率，然后接收机选择 $\boldsymbol{s}_m$ 使 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$最大化。这个准则就称为最大后验概率(MAP)准则。

利用贝叶斯准则，可以将后验概率表示为

$$P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})=\frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)P(\boldsymbol{s}_m)}{f(\boldsymbol{y})} \tag{8.4.20}$$

其中 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$是给定 $\boldsymbol{s}_m$ 观察矢量 $\boldsymbol{y}$ 的条件概率密度，$P(\boldsymbol{s}_m)$是发送第 m 个信号的先验概率。式(8.4.20)的分母可以表示为

$$f(\boldsymbol{y})=\sum_{m=1}^{M}f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)P(\boldsymbol{s}_m) \tag{8.4.21}$$

根据式(8.4.20)和式(8.4.21)可知，后验概率 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$的计算需要知道先验概率 $P(\boldsymbol{s}_m)$和 $m=1, 2, \cdots, M$ 时的条件概率密度 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$。

当 M 个信号等于先验概率时，即对于所有 m，$P(s_m)=1/M$，MAP 准则的计算可以简化。而且，我们注意到式(8.4.20)分母与发送哪一个信号无关。这样，发现能最大化 $P(s_m|y)$的信号的判决准则等价于发现能最大化 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$的信号。

392

条件概率度 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$，或其任意单调函数，通常称为*似然函数*。在 M 个信号中选择能最大化 $f(y|s_m)$的信号，这个判决准则就称为*最大似然*(ML)*准则*。如果先验概率 $P(\boldsymbol{s}_m)$ 相等，即每个信号$\{\boldsymbol{s}_m\}$等概率出现，基于 MAP 准则的检测器与基于 ML 准则的检测器会给出同样的判决。

在 AWGN 信道中，似然函数 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$由式(8.4.16)给出。为了简化计算，可以采用 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$的自然对数，该函数具有单调性，即

$$\ln f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)=\frac{N}{2}\ln(\pi N_0)-\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}(y_k-s_{mk})^2 \tag{8.4.22}$$

通过 $\boldsymbol{s}_m$ 来最大化 $\ln f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$等价于发现能够最小化欧氏距离

$$D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)=\sum_{k=1}^{N}(y_k-s_{mk})^2 \tag{8.4.23}$$

的信号 $\boldsymbol{s}_m$。称 $D(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$，$m=1, 2, \cdots, M$ 为*距离测度*。因此，对于 AWGN 信道，基于 ML 准则的判决规则就简化为找到与接收信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 距离最小的发送信号 $\boldsymbol{s}_m$。称此判决规则为*最小距离检测*。

对基于 ML 准则的最佳检测规则的另一种解释是将式(8.4.23)的距离测度展开为

$$D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)=\sum_{n=1}^{N}y_n^2-\sum_{n=1}^{N}2y_ns_{mn}+\sum_{n=1}^{N}s_{mn}^2=\|\boldsymbol{y}\|^2-2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_m+\|\boldsymbol{s}_m\|^2 \tag{8.4.24}$$

其中$\|\boldsymbol{y}\|^2$ 一项是所有信号共有的，因此可以在测度计算中忽略。修正后的距离测度为

$$D'(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m) = -2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_m + \|\boldsymbol{s}_m\|^2 \tag{8.4.25}$$

注意选择最小化 $D'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$ 的信号 $\boldsymbol{s}_m$ 等价于选择最大化测度 $C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m) = -D'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$ 的信号，即

393

$$C(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m) = 2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_m - \|\boldsymbol{s}_m\|^2 \tag{8.4.26}$$

式中 $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_m$ 一项是接收信号矢量在发送信号矢量 $\boldsymbol{s}_m$ 上的投影。该投影值是接收信号与第 m 个发送信号之间相关性的度量。因此，我们将 $C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$，$m=1, 2, \cdots, M$ 称为相关测度，用以判决发送信号是 M 个信号中的哪一个。最后一项 $\|\boldsymbol{s}_m\|^2 = \mathscr{E}_m$，$m=1, 2, \cdots, M$ 可以视为偏差项，用以补偿信号能量不等的信号集合，如 PAM。如果所有信号能量相等，在相关测度 $C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$ 和距离测度 $D'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$ 的计算中，$\|\boldsymbol{s}_m\|^2$ 项可以忽略。

总之，最佳 ML 检测器计算一组 M 个距离 $D(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$ 或 $D'(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$，选择对应最小距离测度的信号。等价地，最佳 ML 检测器计算一组 M 个相关测度 $C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m)$，选择对应于最大相关测度的信号。

以上对最佳检测器的分析都是对最重要的情况即所有信号等概的情况进行的。在此情况下，MAP 准则等价于 ML 准则。不过，当信号不等概时，最佳 MAP 检测器的判决是以式(8.4.20)给出的后验概率 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$ 为依据的，或者等价于后验概率测度

$$PM(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m) = f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)P(\boldsymbol{s}_m) \tag{8.4.27}$$

下面的例子说明如何对于 PAM 信号进行这种计算。

例 8.4.3 考虑二进制 PAM 信号，两个可能的信号点是 $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathscr{E}_b}$，其中 $\mathscr{E}_b$ 是比特能量。先验概率为 $P(\boldsymbol{s}_1)$ 和 $P(\boldsymbol{s}_2)$。求发送信号受到 AWGN 干扰时的最佳 MAP 检测器的测度。

解： 二进制 PAM 信号的(一维)接收信号矢量为

$$y = \pm\sqrt{\mathscr{E}_b} + n$$

其中 $n = y_n(T)$ 是零均值高斯随机变量，方差为 $\sigma_n^2 = N_0/2$。因此，两个信号的条件 PDF $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$ 分别为

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-(y-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/2\sigma_n^2}$$

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\mathrm{e}^{-(y+\sqrt{\mathscr{E}_b})^2/2\sigma_n^2}$$

那么，式(8.4.27)定义的 $\mathrm{PM}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_1)$ 和 $\mathrm{PM}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_2)$ 是

$$\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_1) = f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)P(\boldsymbol{s}_1)$$

$$\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_2) = f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_2)P(\boldsymbol{s}_2)$$

若 $\mathrm{PM}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_1) > \mathrm{PM}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_2)$，选择 s_1 作为发送信号；否则，选择 s_2。这个判决规则可以表示为

394

$$\frac{\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_1)}{\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} 1 \tag{8.4.28}$$

但是

$$\frac{\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_1)}{\mathrm{PM}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_2)} = \frac{P(\boldsymbol{s}_1)}{P(\boldsymbol{s}_2)}\exp\left\{\left[(y+\sqrt{\mathscr{E}_b})^2 - (y-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2\right]/2\sigma_n^2\right\}$$

则式(8.4.28)可以表示为

$$\frac{(y+\sqrt{\mathscr{E}_b})^2 - (y-\sqrt{\mathscr{E}_b})^2}{2\sigma_n^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \ln\frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

或者等价于

$$y \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{4\sqrt{\mathscr{E}_b}} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \ln\frac{P(s_2)}{P(s_1)} \tag{8.4.29}$$

这是最佳检测器的最终形式。将来自解调器输入 y，与阈值 $(N_0/4\sqrt{\mathscr{E}_b})\ln[P(s_1)/P(s_2)]$ 比较。可以发现这与 8.3.3 节中式(8.3.56)给出的二进制对极信号(二进制 PAM)的判决准则完全一致。

有趣的是，在先验概率不等的情况下，要计算此阈值必须知道的不仅是先验概率的取值，还包括功率谱密度 N_0 和信号能量 $\mathscr{E}_b$。当两个信号等概时，阈值为零。这种情况下，检测器不需要知道这些参数

的取值。◀

下面证明 M 个信号等先验概率时根据 ML 准则最小化错误概率的判决规则。N 维空间中接收信号矢量为 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$时，发送信号 $\boldsymbol{s}_m(t)$的判决区域记为 R_m。发送信号 $\boldsymbol{s}_m(t)$时，错误判决概率为

$$P(e|\boldsymbol{s}_m) = \int_{R_m^c} f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{8.4.30}$$

其中 R_m^c 是 R_m 的补集。平均错误概率为

$$\begin{aligned} P_M &= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M} P(e|\boldsymbol{s}_m) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M}\int_{R_m^c} f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M}\left[1 - \int_{R_m} f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right] \end{aligned} \tag{8.4.31}$$

对于 $m\neq k$，如果 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_m)$大于 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_k)$，则选择信号 $\boldsymbol{s}_m$ 最小化错误概率 P_M。

395

类似地，对于 MAP 准则，当 M 个信号不等概时，平均差错概率为

$$P_M = 1 - \sum_{m=1}^{M}\int_{R_m} P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{8.4.32}$$

当每个特定的区域 R_m 由 $P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})$超过其他可能后验概率的信号点构成时，$P_M$ 达到最小值。

8.4.2 差错概率的联合界

前面已经介绍了若干二进制通信系统及其对应的最佳检测方案，也给出了用 SNR/bit($\mathscr{E}_b/N_0$)表示的这些系统的差错概率。大多数差错概率表达式都是在等先验概率条件下推导的，并采用最大似然规则作为最佳检测规则。

已经证明，对于 AWGN 信道中二进制等概率信号，无论哪种信号，差错概率都可表示为

$$P_2 = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.33}$$

其中 d 为星座图上两个信号点之间的(欧氏)距离，它与信号波形的关系为

$$d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) - s_2(t))^2 \mathrm{d}t$$

接下来一个自然的问题是，对于 M 进制信号是否存在类似的差错概率的简单表达式。如上所述，式(8.4.31)给出了 M 进制等概率信号的差错概率表达式。不过，该表达式不能进一步简化为一个封闭形式的表达式，原因在于判决区域通常是不规则的，在这种区域中的高斯函数的积分也没有封闭形式。但是，在一般的 M 进制等概率信号系统中，存在一个简单的差错概率上界，称此上界为联合界。下面给出这个联合界的推导。

设 M 进制等概率信号系统中，发送信号为 $s_m(t)$。差错概率就是接收机检测出的信号不是 $s_m(t)$的概率。记 E_i 为接收机检测到消息 i 的事件，则

$$\begin{aligned} P_m &= P(\text{差错}\,|\,\text{发送}\ s_m(t)) \\ &= P\left(\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{M} E_i\,\Big|\,\text{发送}\ s_m(t)\right) \leqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{M} P(E_i\,|\,\text{发送}\ s_m(t)) \end{aligned} \tag{8.4.34}$$

396

接收机检测到消息 $s_i(t)$的必要(但不充分)条件是，发送信号为 $s_m(t)$时，相比 $\boldsymbol{s}_m$，$\boldsymbol{s}_i$ 更靠近接收机的输出矢量 $\boldsymbol{y}$，即

$$D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_i) < D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)$$

于是可得

$$P(E_i\,|\,\text{发送}\ s_m(t)) \leqslant P(D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_i) < D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)) \tag{8.4.35}$$

但是 $P[D(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{s}_i)<D(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{s}_m)]$是二进制等概率信号的系统差错概率，如式(8.4.33)所定义，即

$$P(D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_i)<D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m))=Q\left(\frac{d_{mi}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.36}$$

根据式(8.4.35)和式(8.4.36)，可得

$$P(E_i\mid 发送\ m)\leqslant Q\left(\frac{d_{mi}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.37}$$

将式(8.4.37)代入式(8.4.34)，可得

$$P_m\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{M}Q\left(\frac{d_{mi}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.38}$$

定义一个信号集的最小距离为对应信号星座图中任意两个信号点之间距离的最小值，即

$$d_{\min}=\min_{\substack{1\leqslant m,m'\leqslant M\\m\neq m'}}d_{mm'} \tag{8.4.39}$$

那么，对于 $1\leqslant i,\ m\leqslant M$，有 $d_{mi}\geqslant d_{\min}$，又因为 Q 函数是减函数[见式(5.1.7)之后的讨论]，可以得到

$$Q\left(\frac{d_{mi}}{\sqrt{2N_0}}\right)\leqslant Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.40}$$

将式(8.4.40)的不等式关系代入式(8.4.38)中，有

$$P_m\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{M}Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)=(M-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{8.4.41}$$

显然，这个界独立于 m，无论发送的信号是哪一个，这个界都有效。可以得到结论为

397

$$P_M=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}P_m\leqslant(M-1)Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)\leqslant\frac{M-1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{d_{\min}^2}{4N_0}} \tag{8.4.42}$$

上式中最后一步利用了式(5.1.8)的不等式 $Q(x)\leqslant 1/2\mathrm{e}^{-x^2/2}$。式(8.4.42)称为差错概率的联合界。

由式(8.4.42)可见，联合界有两个表达形式。第一个是以 Q 函数表示的；第二个是以指数函数表示的。联合界提供了差错概率的一个非常有用的界，特别是在大信噪比的情况下。信噪比较小时，界就变松而无用了。要分析系统在小信噪比下的性能，就需要更有力的计算边界的技术。

联合界也显示了信号集最小距离对性能的影响，特别是在大信噪比条件下。一个好的信号集应该提供尽可能最大的 $d_{\min}$ 取值。换言之，要设计一个好的信号集，对应的星座图中的信号点应该尽可能分散。

8.5 M 进制脉冲幅度调制

从二进制 PAM 到 M 进制 PAM 的推广相对直接。根据 k 比特符号选择 $M=2^k$ 种信号幅度之一。通常，基带信道中的 M 进制 PAM 信号波形可以表示为

$$s_m(t)=A_m p(t),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.1}$$

$$=s_m\psi(t),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.2}$$

其中 $p(t)$是一个低通脉冲信号，时长为 T，$\psi(t)=p(t)/\sqrt{\mathscr{E}_p}$是其归一化的形式。$p(t)$为矩形脉冲的特例下，信号可以表示为

$$\begin{aligned}s_m(t)&=A_m g_T(t),\quad 0\leqslant t<T,\quad m=1,2,\cdots,M\\&=s_m\psi(t),\quad 0\leqslant t<T,\quad m=1,2,\cdots,M\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

其中脉冲 $g_T(t)$ 及基函数 $\psi(t)$ 分别如图 8-40a 和 b 所示。可以看到 M 个信号波形具有相同的脉冲形状，是一维信号。并且，在此特例中

$$p(t)=g_T(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这种情况下，通常的 $s_m=A_m\sqrt{\mathscr{E}_p}$ 变成了 $s_m=A_m\sqrt{T}$。PAM 信号一个重要的特征是各个信号具有不同的能量，即

$$\mathscr{E}_m=\int_0^T s_m^2(t)\mathrm{d}t=s_m^2\int_0^T\psi(t)\mathrm{d}t=s_m^2=A_m^2\mathscr{E}_p \tag{8.5.4}$$

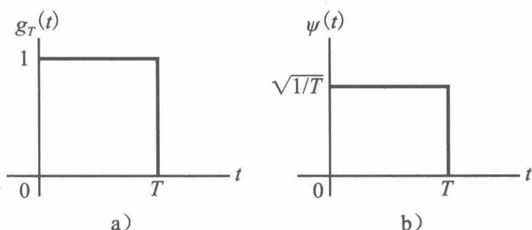


图 8-40　矩形脉冲 $g_T(t)$ 和基函数 $\psi(t)$ 的 M 进制 PAM

398

假设 k 比特符号等概率，发送信号的平均能量为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathscr{E}_m=\frac{\mathscr{E}_p}{M}\sum_{m=1}^{M}A_m^2 \tag{8.5.5}$$

为了最小化信号能量，并且避免直流分量，希望选择的 M 个信号关于原点对称，并且等间隔，即

$$A_m=(2m-1-M)A,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.6}$$

其中 A 为任意尺度因子。假设所有 k 比特符号等概率，相应的平均能量为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{av}}&=\frac{\mathscr{E}_p}{M}\sum_{m=1}^{M}A_m^2=\frac{A^2\mathscr{E}_p}{M}\sum_{m=1}^{M}(2m-1-M)^2\\&=A^2\mathscr{E}_p(M^2-1)/3\end{aligned} \tag{8.5.7}$$

对于式(8.5.6)给出的信号幅度，相应的 M 进制 PAM 信号在几何空间中信号星座图点可以表示为

$$s_m=A_m\sqrt{\mathscr{E}_p}=A\sqrt{\mathscr{E}_p}(2m-1-M),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.8}$$

容易定义距离参数 d 为 $d=A\sqrt{\mathscr{E}_p}$，这样则有

$$s_m=(2m-1-M)d,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.9}$$

如图 8-41 所示为信号星座点示意图。注意相邻点之间的距离为 $2d$。

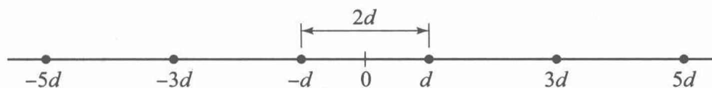


图 8-41　PAM 信号 $M=4$ 时波形

例 8.5.1　画出式(8.5.3)描述的 PAM 信号 $M=4$ 时的波形，确定发送信号平均能量。

399

解： 4 个信号的波形如图 8-42 所示。根据式(8.5.7)，等概率信号的平均能量为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{av}}=5A^2T=5d^2$$

依定义，其中 $d^2=A^2T$。◀

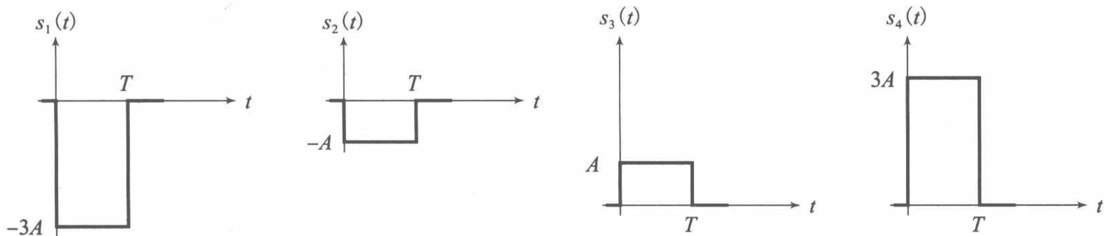


图 8-42　PAM 信号 $M=4$ 时波形

8.5.1 带通信道载波调制的 M 进制脉冲幅度调制（M 进制 ASK）

为了在带通信道中传输数字信号波形，将基带信号波形 $s_m(t)$，$m=1, 2, \cdots, M$ 与正弦载波 $\cos 2\pi f_c t$ 相乘，实现载波幅度调制，如图 8-43 所示。图中，f_c 是载波频率，相当于信道频带的中心频率。发送信号波形表示为

$$u_m(t) = s_m(t)\cos 2\pi f_c t, \quad m = 1,2,\cdots,M \tag{8.5.10}$$

400

如 3.2 节所述，载波 $\cos 2\pi f_c t$ 的幅度调制通过基带信号波形 $\{s_m(t)\}$ 将基带信号的频谱搬移 f_c，从而将信号置入信道的频带。已知载波的傅里叶变换为 $\frac{1}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]$。因为两个信号在时域相乘对应其频谱在频域相乘，式(8.5.10)的幅度调制信号的频谱为

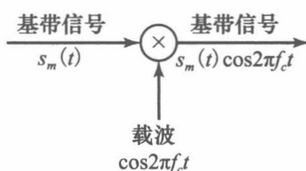


图 8-43 正弦载波的幅度被基带信号所调制

$$U_m(f) = \frac{1}{2}[S_m(f - f_c) + S_m(f + f_c)] \tag{8.5.11}$$

这样，基带信号 $s_m(t)$ 的频谱的搬移量等于载波频率 f_c。结果得到双边带抑制载波(DSB-SC)幅度调制信号，如图 8-44 所示。已调波信号 $u_m(t)$ 的上边带包含频谱中 $|f|>f_c$ 的分量，即 $f_c<|f|\leqslant f_c+W$ 的分量。已调波信号 $u_m(t)$ 的下边带则包含频谱中 $|f|<f_c$ 的分量，即 $f_c-W\leqslant|f|\leqslant f_c$ 的分量。因此，DSB-SC 幅度已调波信号占据的频带宽度为 $2W$，是基带信号传输带宽的两倍。

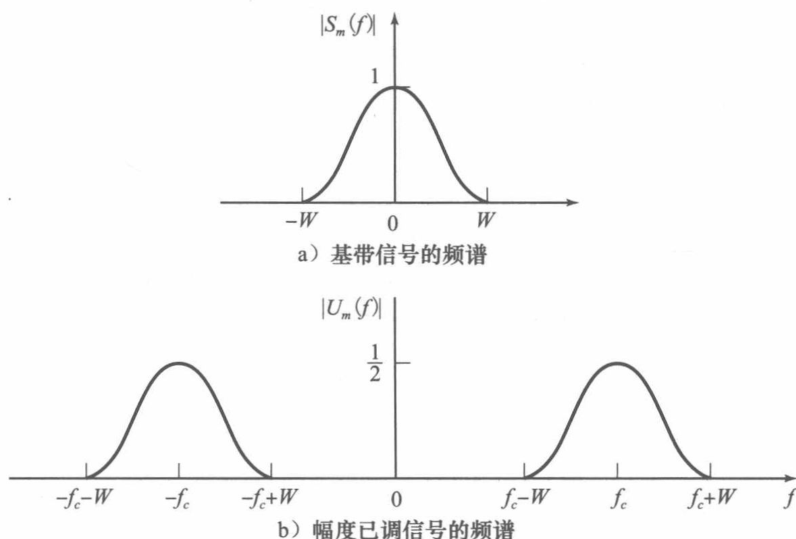


图 8-44

式(8.5.10)所示的带通信号波形 $u_m(t)$，$m=1, 2, \cdots, M$，能量为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m &= \int_{-\infty}^{\infty} u_m^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\cos^2 2\pi f_c t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\cos 4\pi f_c t\,\mathrm{d}t \end{aligned}\tag{8.5.12}$$

401

注意当 $f_c \gg W$，上式中最后一项

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\cos 4\pi f_c t\,\mathrm{d}t \tag{8.5.13}$$

是一个缓慢变化的函数 $s_m^2(t)$ 与一个快速变化的正弦波 $\cos 4\pi f_c t$ 乘积的积分。采用与式(3.2.2)自变量相似的自变量，可知式(8.5.13)在 $\cos 4\pi f_c t$ 的一个周期内积分为零(见图 3-6)；那么在任意多个周期内的积分也为零。因此，载波已调信号的能量为

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.5.14}$$

这说明带通信号能量是基带信号能量的一半。由于载波分量 $\cos 2\pi f_c t$ 的平均功率为1/2，所以有尺度因子1/2。

在 M 进制幅移键控(ASK)信号中，信号波形的一般表达式为

$$s_m(t) = A_m p(t)\cos 2\pi f_c t,\quad 1 \leqslant m \leqslant M \tag{8.5.15}$$

其中，$p(t)$是时长为 T 的基带信号。可见所有信号是同一个信号 $p(t)\cos 2\pi f_c t$ 的倍数，不同的只是幅度 A_m。因此，所有信号可以用一个归一化信号表示，即

$$\psi_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_p}}\,p(t)\cos 2\pi f_c t \tag{8.5.16}$$

说明 ASK 信号的信号空间维度为 $N=1$。

例 8.5.2 一个载波已调 PAM 信号可以表示为

$$u_m(t) = s_m(t)\cos 2\pi f_c t = s_m\psi(t)\cos 2\pi f_c t,\quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

其中 $s_m = (2m-1-M)d$，　$m=1,2,\cdots,M$，$d=A\sqrt{\mathscr{E}_p}$，见式(8.5.9)，并且 $\psi(t)$是 $0\leqslant t\leqslant T$ 中的单位能量脉冲。求载波已调 PAM 信号的基函数和矢量空间中的对应的信号点。

解： 载波幅度 PAM 信号可以表示为

$$u_m(t) = \frac{s_m}{\sqrt{2}}\psi_c(t) = s_{cm}\psi_c(t),\quad m = 1,2,\cdots,M$$

其中

$$\psi_c(t) = \sqrt{2}\psi(t)\cos 2\pi f_c t$$

并且

$$s_{cm} = s_m/\sqrt{2} = (2m-1-M)/\sqrt{2},\quad m = 1,2,\cdots,M$$ ◀ 402

8.5.2　幅度调制 PAM 信号的解调与检测

带通信号的解调可以用相关器或者匹配滤波器实现。不过在 8.8 节讨论中将看到有载波的条件下，对信号的解调将引入的额外的复杂性。

符号间隔中的发送信号可以表示为

$$u_m(t) = s_m(t)\cos 2\pi f_c t,\quad m = 1,2,\cdots,M \tag{8.5.17}$$

接收信号为

$$r(t) = u_m(t) + n(t) \tag{8.5.18}$$

其中

$$n(t) = n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\cos 2\pi f_c t \tag{8.5.19}$$

是一个带通噪声过程，如 5.3.3 节所述。

可以得到，接收信号 $r(t)$与基信号 $\psi_c(t)=\sqrt{2}\cos 2\pi f_c t$ 的互相关，在抽样时刻 $t=T$ 的取值为

$$\begin{aligned} y(T) &= \int_0^T r(t)\psi_c(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}s_m\int_0^T \psi^2(t)\cos^2 2\pi f_c t\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\int_0^T n(t)\psi(t)\cos 2\pi f_c t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{s_m}{\sqrt{2}} + n = s_{cm} + n \end{aligned} \tag{8.5.20}$$

其中 n 表示相关器输出的加性噪声。如果用匹配滤波器替代相关器进行解调，得到的结果是一样的。

与基带 PAM 一样，对于等概率消息，最佳检测器根据距离测度

$$D(y,s_m) = (y - s_{cm})^2,\quad m = 1,2,\cdots,M \tag{8.5.21}$$

进行判决，或者等价地采用相关测度

$$C(y,s_m)=2ys_{cm}-s_{cm}^2,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.5.22}$$

进行判决。

8.5.3 M 进制 PAM 的差错概率

基带 AWGN 信道中的 M 进制 PAM 信号，进入检测器的输入为

403

$$y=s_m+n \tag{8.5.23}$$

其中 s_m 表示第 m 个发送幅度电平，如式(8.5.9)所定义。n 为零均值高斯随机变量，方差为 $\sigma_n^2=N_0/2$。采用最大相关测度

$$C(y,s_m)=2ys_m-s_m^2=2(y-s_m/2)s_m \tag{8.5.24}$$

的判决规则，可以确定等概幅度电平的平均判决差错概率。等价地，最佳检测器需要将输入 y 与 $M-1$ 个阈值进行比较，这些阈值设在连续的幅度电平的中点，如图 8-45 所示。判决规则就是选择最靠近 y 的幅度电平。

如图 8-45 所示的阈值的设定位置有助于估计差错概率。在所有幅度电平等概的先验条件下，平均符号差错概率就是噪声变量幅度超出电平间距一半的概率。不过，如果发送的电平是两个最外侧的电平 $\pm(M-1)$ 中的一个，那么差错只会在一个方向上出现。这样，平均差错概率就可以表示为

$$\begin{aligned}P_M&=\frac{M-2}{M}P(|y-s_m|>d)+\frac{2}{M}P(y-s_m>d)\\&=\frac{M-1}{M}P(|y-s_m|>d)=\frac{M-1}{M}\frac{2}{\sqrt{\pi N_0}}\int_d^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/N_0}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{M-1}{M}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2d^2/N_0}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\frac{2(M-1)}{M}Q(\sqrt{2d^2/N_0})\end{aligned} \tag{8.5.25}$$

其中 $2d$ 为相邻信号点的距离。

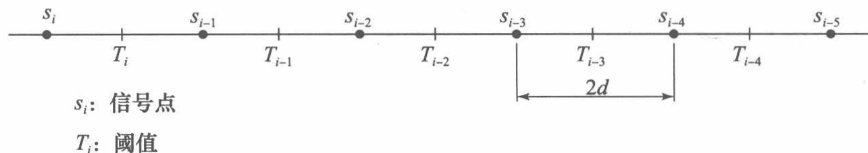


图 8-45 相邻幅度电平的中点设为阈值

距离参数 d 与平均发送信号能量很容易关联起来。已知 $d=A\sqrt{\mathscr{E}_p}$ 并且 $\mathscr{E}_{av}$ 如式(8.5.7)定义为 $\mathscr{E}_{av}=A^2\mathscr{E}_p(M^2-1)/3$。因此有

$$\mathscr{E}_{av}=d^2(M^2-1)/3 \tag{8.5.26}$$

且平均差错概率为

404

$$P_M=\frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\mathscr{E}_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{8.5.27}$$

由于平均发送信号能量 $\mathscr{E}_{av}=TP_{av}$，其中 P_{av} 是平均发送功率，P_M 也可以表示为 P_{av} 的函数。

在画出 M 进制信号如 M 进制 PAM 信号的符号差错概率时，习惯上采用 SNR/bit 作为基础参数。由于每个信号携带 $k=\log_2 M$ 比特的信息，每个比特的平均能量 $\mathscr{E}_{bav}$ 为 $\mathscr{E}_{bav}=\mathscr{E}_{av}/k$ 并且 $k=\log_2 M$。式(8.5.27)可以表示为

$$P_M=\frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)\mathscr{E}_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{8.5.28}$$

其中 $\mathscr{E}_{bav}/N_0$ 是平均 SNR/bit。图 8-46 给出了符号差错概率与 $10\log_{10}\mathscr{E}_{bav}/N_0$ 的函数关系，并且 M 为参数。注意 $M=2$ 对应二进制正交信号的差错概率。可以发现，给定差错概率，

如 $P_M=10^{-5}$，M 每增加 1 倍，SNR/bit 增加量超过 4dB；对于大 M 值，SNR/bit 增加近 6dB。因此，每当幅度电平数 M 加倍时，就可以多传送 1 比特；对于大 M 值，额外的发送功率的成本是 6dB/bit，这就是说要保证一定的 P_M，每多传送 1 比特，发送功率要增加到原来的 4 倍（$10\log_{10}4=6$dB）。

例 8.5.3 根据图 8-46，确定要达到 $P_M=10^{-6}$ 的差错概率，M=2，4，8 对应的 SNR/bit（近似）值。

解： 根据图 8-46 可知，SNR/bit 分别为

$M=2$ 时（1 比特 / 符号）10.5dB

$M=4$ 时（2 比特 / 符号）14.8dB

$M=8$ 时（3 比特 / 符号）19.2dB

注意，对于 M 的较小取值，因增大（倍增）电平数所产生的比特的增加，使得发送信号功率（能量）的增加量只是略多于 4dB，因此可以达到同样的差错概率。对于 M 的较大取值，式（8.5.28）中 $Q(x)$ 的自变量是差错概率表达式的主导项。由于 $M=2^k$，其中 k 为每个符号的比特数，k 从 1 比特增加至 $k+1$，要保证 $Q(x)$ 中自变量不变，则每比特能量须增加到原来的 4 倍（6dB）。◀

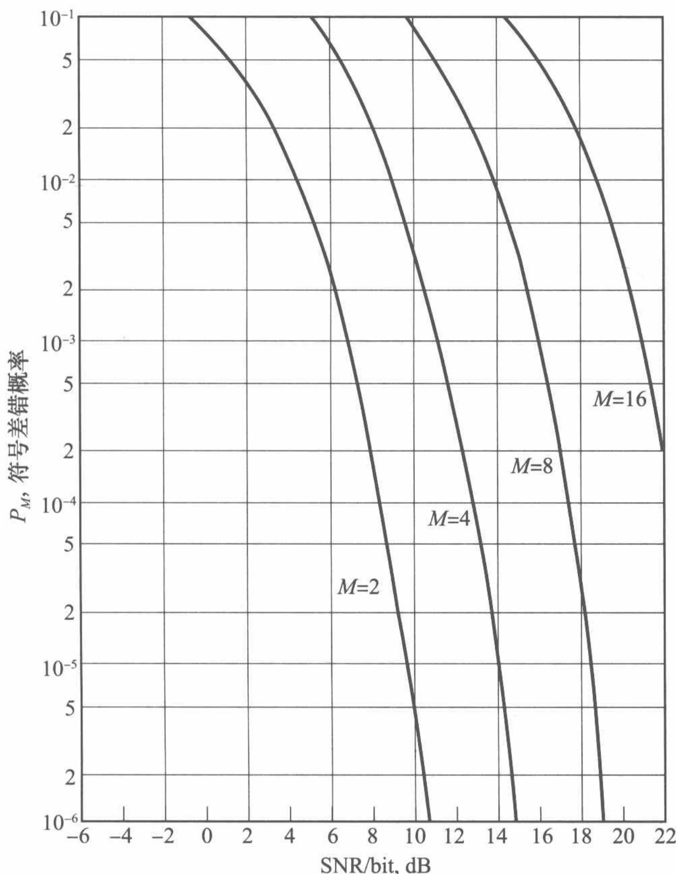


图 8-46　PAM 的符号差错概率

8.6 相移键控

在上一节，可以看到适合在带通信道中发送的带通信号，可以通过用一组基带信号影响载波幅度而产生。在这一节中，将通过在数字上改变载波相位来产生带通信号波形。

在 ASK 中通用的发送信号波形可以表示为 $A_m p(t)\cos 2\pi f_c t$，即信号与消息 m 的关系是通过幅度 A_m 关联的。在相移键控（PSK）中，这种关联是通过相位 ϕ_m 实现的。PSK 信号波形一般可以表示为以下形式

$$u_m(t) = p(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_m)$$

405~406

其中 $p(t)$是时长为 T 的基带信号，相位 ϕ_m 是由发送消息确定的。由于信号相位依赖于发送消息 m，因此信号是相位调制的。由于发送信号仅有相位不同，所有 PSK 信号的能量相等，即在信号空间表示中所有信号与原点距离相等。因此，PSK 信号的信号空间表示是以原点为中心的，半径为$\sqrt{\mathscr{E}_s}$的圆上的 M 个点，$\mathscr{E}_s$ 是 PSK 信号的共同能量。ϕ_m 取值可以等间隔选择

$$\phi_m = \frac{2\pi m}{M}, \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{8.6.1}$$

在这种情况下，PSK 波形的通用表达式为

$$u_m(t) = p(t)\cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right), \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{8.6.2}$$

对于 $p(t)$为矩形基带脉冲的特殊情况，有

$$p(t) = g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_s}{T}}, & 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

并且

$$u_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos\left(2\pi f_c t + \dfrac{2\pi m}{M}\right), & 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{8.6.3}$$

其中$\mathscr{E}_s$ 是每个信号的能量，T 是信号持续时间。因为每个信号携带 $k=\log_2 M$ 比特信息，所以有$\mathscr{E}_b=\mathscr{E}_s/\log_2 M$。图 8-47 给出了 4 种相位的 PSK 信号波形，通常称为正交 PSK(QPSK)信号。

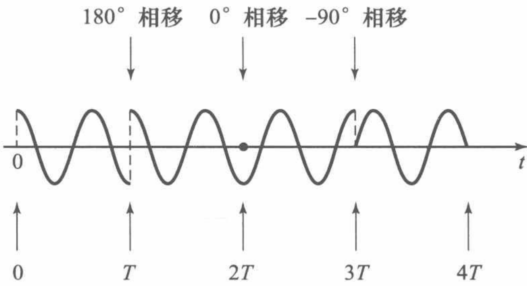


图 8-47 4 种相位的 PAM 信号

通过扩展式(8.6.3)中的余弦项，可以将 $u_m(t)$的表示为

$$\begin{aligned} u_m(t) &= g_T(t)A_{mc}\cos 2\pi f_c t \\ &\quad - g_T(t)A_{ms}\sin 2\pi f_c t \end{aligned} \tag{8.6.4}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{mc} &= \cos 2\pi m/M,\ m = 0,1,\cdots,M-1 \\ A_{ms} &= \sin 2\pi m/M,\ m = 0,1,\cdots,M-1 \end{aligned} \tag{8.6.5}$$

407

因此，相位调制信号的调制器可以如图 8-48 所示，采用两个正交载波信号，其中每个正交载波的幅度都被承载信息的信号所调制。脉冲成形滤波器的作用是将发送信号的频谱限制在给定的信道带宽中。

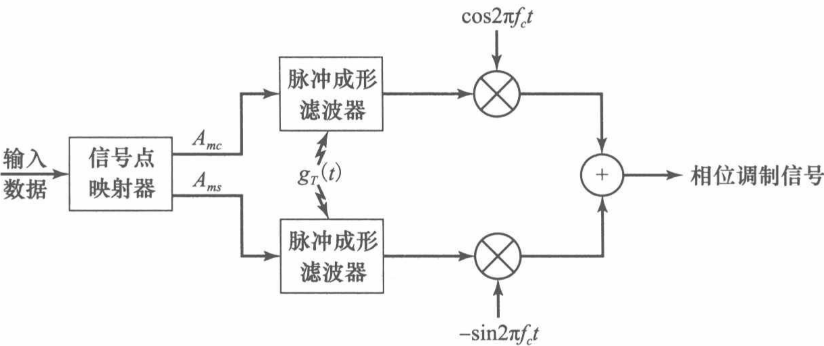


图 8-48 数字相位调制器组成框图

8.6.1 PSK 信号的几何表示

根据式(8.6.4)，数字相位调制信号可以在几何上表示为 2 维矢量，其分量为 $\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos 2\pi m/M$ 和 $\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin 2\pi m/M$，即

$$\boldsymbol{s}_m = (\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos 2\pi m/M,\quad \sqrt{\mathscr{E}_s}\sin 2\pi m/M) \tag{8.6.6}$$

注意正交基信号为

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\cos 2\pi f_c t$$

和

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\sin 2\pi f_c t$$

其中脉冲 $g_T(t)$的能量归一化为 $2\mathscr{E}_s$。$M=2$，4 和 8 时的信号点星座图如图 8-49 所示。可以发现二进制相位调制与二进制 ASK 相同，属于二进制对极信号。

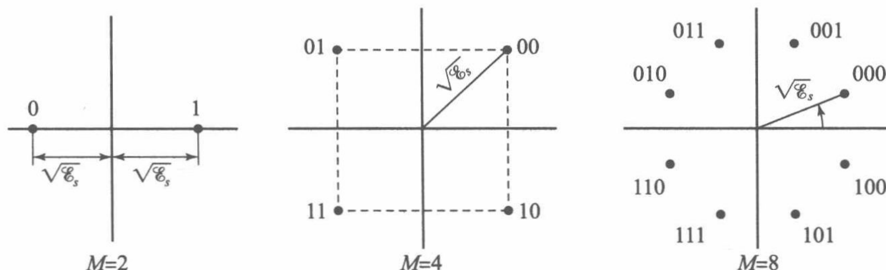


图 8-49　*PSK* 信号星座图

将 k 比特映射或者指定为 $M=2^k$ 个可能的相位，可以有多种方式。一种比较常用的方式是格雷编码。这种方案中，相邻相位对应的码字只有 1 比特的不同，如图 8-49 所示。因为最可能发生的差错是在发送信号的相邻相位的判决选择时出现的，采用格雷编码的 k 比特序列中只出现 1 比特的差错。

408

星座图中两个信号点之间的欧氏距离

$$d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} = \sqrt{2\mathscr{E}_s\left(1 - \cos\frac{2\pi(m-n)}{M}\right)} \tag{8.6.7}$$

并且最小的(相邻信号点之间)欧氏距离为

$$d_{\min} = \sqrt{2\mathscr{E}_s\left(1 - \cos\frac{2\pi}{M}\right)} = 2\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin\frac{\pi}{M} \tag{8.6.8}$$

最小欧氏距离 $d_{\min}$对于确定接收机加性高斯噪声下解调和检测信息的差错概率性能有重要作用，如 8.4.2 节所示。

例 8.6.1 $M=2$，4 和 8 时的 PSK 信号如图 8-49 所示，所有信号能量均为$\mathscr{E}_s$。求相邻信号点间的最小距离 $d_{\min}$。

解： 对于 $M=2$，$d_{\min}=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$；对于 $M=4$，$d_{\min}=\sqrt{2\mathscr{E}_s}$；对于 $M=8$，

$$d_{\min} = 2\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin\frac{\pi}{M} = \sqrt{0.586\mathscr{E}_s}$$

对于 $M=8$，要达到 $M=4$ 时的最小信号距离，能量$\mathscr{E}_s$ 必须增长2/0.586=3.413 倍或者 5.33dB。对于较大的 M 值，$\sin\pi/M\approx\pi/M$，因此

409

$$d_{\min} \approx \frac{2\pi}{M}\sqrt{\mathscr{E}_s},\quad M\gg 2$$

相应地，当信号点数 M 加倍，每个符号可以多传送 1 比特信息，信号能量$\mathscr{E}_s$ 必须增加 4 或 6dB，才能保证相邻信号点之间最小距离相同。◀

8.6.2 PSK 信号的解调和检测

AWGN 信道中接收的带通信号在信号区间 $0 \leqslant t < T$ 中可以表示为

$$\begin{aligned} r(t) &= u_m(t) + n(t) \\ &= [A_{mc} g_T(t) + n_c(t)] \cos 2\pi f_c t \\ &\quad - [A_{ms} g_T(t) + n_s(t)] \sin 2\pi f_c t \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \end{aligned} \tag{8.6.9}$$

其中 $n(t)$ 是加性带通高斯噪声，可以用相互正交的分量 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 表示为

$$n(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

而 A_{mc} 和 A_{ms} 为承载信息的信号分量，与式(8.6.5)中的发送信号相位有关。

接收信号与

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t$$

和

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}} g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

相关。

两个相关器的输出产生两个噪声损伤的信号分量，可以表示为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}_m + \boldsymbol{n} = (\sqrt{\mathscr{E}_s} \cos 2\pi m/M + n_c, \quad \sqrt{\mathscr{E}_s} \sin 2\pi m/M + n_s) \tag{8.6.10}$$

其中，依定义有

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{1}{\sqrt{4\mathscr{E}_s}} \int_0^T g_T(t) n_c(t) \mathrm{d}t \\ n_s &= \frac{1}{\sqrt{4\mathscr{E}_s}} \int_0^T g_T(t) n_s(t) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8.6.11}$$

由于正交噪声分量 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 为零均值不相关(见 5.3.3 节过滤噪声的性质 4)，因此有 [410] $E(n_c) = E(n_s) = 0$ 和 $E(n_c n_s) = 0$。

噪声分量的方差为

$$\begin{aligned} E(n_c^2) = E(n_s^2) &= \frac{1}{4\mathscr{E}_s} \int_0^T \int_0^T g_T(t) g_T(\tau) E(n_c(t) n_c(\tau)) \mathrm{d}t \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{N_0}{4\mathscr{E}_s} \int_0^T g_T^2(t) \mathrm{d}t \\ &= N_0/2 \end{aligned} \tag{8.6.12}$$

最佳检测器将接收信号矢量投影到 M 个可能发送的信号矢量 $\{\boldsymbol{s}_m\}$ 上，并且选择对应最大投影的矢量，这样就可以计算相关测度

$$C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m) = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{s}_m, \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{8.6.13}$$

和选择对应最大相关的信号矢量。

由于所有信号具有相等能量，数字相位调制的检测器测度等价于计算接收信号矢量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ 的相位，即

$$\Theta = \tan^{-1} \frac{y_1}{y_2} \tag{8.6.14}$$

并且从集合 $\{\boldsymbol{s}_m\}$ 中选择相位最接近 Θ 的信号。在下一节，将根据式(8.6.14)给出的相位测度评估差错概率。

8.6.3 相位相干 PSK 调制的差错概率

本节将评估 AWGN 中 M 进制相位调制的最佳解调器和检测器的差错概率。计算采用基于式(8.6.14)的相位测度的最佳检测器。假设对接收载波相位的完美估计是可行的。相

应地，我们将推导理想的相位相干解调的性能。

考虑发送信号相位 $\theta=0$ 对应信号 $u_0(t)$ 的情况。发送信号矢量为

$$\boldsymbol{s}_0=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0) \tag{8.6.15}$$

接收信号的矢量有以下分量

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\mathscr{E}_s}+n_c \\ y_2 &= n_s \end{aligned} \tag{8.6.16}$$

411

由于 n_c 和 n_s 是联合高斯随机变量，因此 y_1 和 y_2 也是联合高斯随机变量，且 $E(y_1)=\sqrt{\mathscr{E}_s}$，$E(y_2)=0$，$\sigma_{y1}^2=\sigma_{y2}^2=N_0/2=\sigma_y^2$。相应地

$$f_{\mathbf{y}}(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_y^2}\mathrm{e}^{-[(y_1-\sqrt{\mathscr{E}_s})^2+y_2^2]/2\sigma_y^2} \tag{8.6.17}$$

检测器测度是相位 $\Theta=\tan^{-1}y_2/y_1$。Θ 的 PDF 可以根据$(y_1，y_2)$的变量变换导出，即

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{y_1^2+y_2^2} \\ \Theta &= \tan^{-1}\frac{y_2}{y_1} \end{aligned} \tag{8.6.18}$$

根据这种变量的变化可以推导得到联合 PDF

$$f_{V,\Theta}(v,\theta)=\frac{v}{2\pi\sigma_y^2}\mathrm{e}^{-(v^2+\mathscr{E}_s-2\sqrt{\mathscr{E}_s}v\cos\theta)/2\sigma_y^2} \tag{8.6.19}$$

$f_{V,\Theta}(v，\theta)$在 v 的范围上积分得到$f_\Theta(\theta)$，即

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^\infty f_{V,\Theta}(v,\theta)\mathrm{d}v \tag{8.6.20}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\rho_s\sin^2\theta}\int_0^\infty v\mathrm{e}^{-(v-\sqrt{2\rho_s}\cos\theta)^2/2}\mathrm{d}v \tag{8.6.21}$$

其中，为了方便，定义符号 SNR 为 $\rho_s=\mathscr{E}_s/N_0$。图 8-50 给出了发送信号相位为零的情况下，SNR 参数 ρ_s 不同取值时 $f_\Theta(\theta)$的取值。注意随着 SNR 参数 ρ_s 的增长，$f_\Theta(\theta)$变得越来越窄，并在 $\theta=0$ 处有越来越高的峰值。

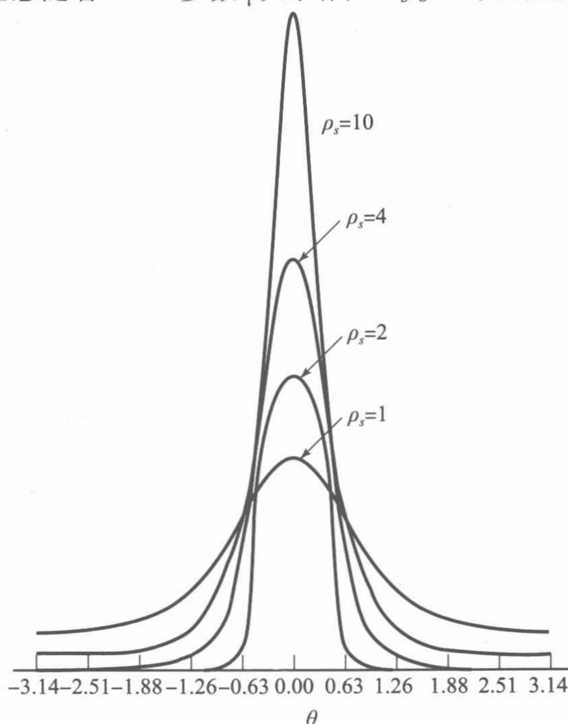


图 8-50　$\rho_s=1，2，4，10$ 对应的 $f_\Theta(\theta)$概率密度函数

发送 $u_0(t)$时，如果噪声引起相位落在$[-\pi/M，\pi/M]$之外，将出现判决差错，符号差错概率为

$$P_M=1-\int_{-\pi/M}^{\pi/M}f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.6.22}$$

通常，$f_\Theta(\theta)$的积分不能化为简单的形式，必须进行数值评估，$M=2，4$ 除外。

符号差错概率的另一种表达式是由温斯坦（Weinstein，1974）和帕乌拉（Pawula，1999)给出的，可以表示为

$$P_M=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\pi/M}\exp\left[-\frac{\rho_s\sin^2(\pi/M)}{\sin^2\theta}\right]\mathrm{d}\theta \tag{8.6.23}$$

对于二进制相位调制，两个信号 $u_0(t)$和$u_1(t)$是二进制对极信号，因此，差错概率为

$$P_M=Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{8.6.24}$$

当 $M=4$ 时，有两个相位相互正交的二进制相位调制信号。对于载波相位的理想估计就

是指在两个相互正交载波所携带的信号之间没有相互干扰。因此，比特差错概率与式(8.6.24)的结果一致。另一方面，由于2比特符号的正确判决概率为

$$P_c = (1-P_2)^2 = \left[1-Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\right]^2 \tag{8.6.25}$$

因此，可以确定$M=4$的符号差错概率。式(8.6.25)的结果与正交载波的噪声的统计独立性无关。因此$M=4$的符号差错概率为

412 ~ 413

$$P_4 = 1-P_c \tag{8.6.26}$$

$$P_4 = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\left[1-\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\right] \tag{8.6.27}$$

如果信噪比过低，那么$\frac{1}{2}Q(\sqrt{2\mathscr{E}_b/N_0})\ll 1$，可以有

$$P_4 \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{8.6.28}$$

对于$M>4$，符号差错概率P_M可以根据式(8.6.22)或者式(8.6.23)进行数值计算得到。图8-51给出了$M=2$，4，8，16，32的情况下差错概率与SNR/bit的关系。显然，可以看到当M超过$M=4$时SNR/bit的代价。例如，$P_M=10^{-5}$时，$M=4$和$M=8$之间的差别约为4dB，$M=8$和$M=16$之间的差别约为5dB。对于M的较大取值，相位数增倍后要达到同样的差错概率，SNR/bit需要增加6dB。

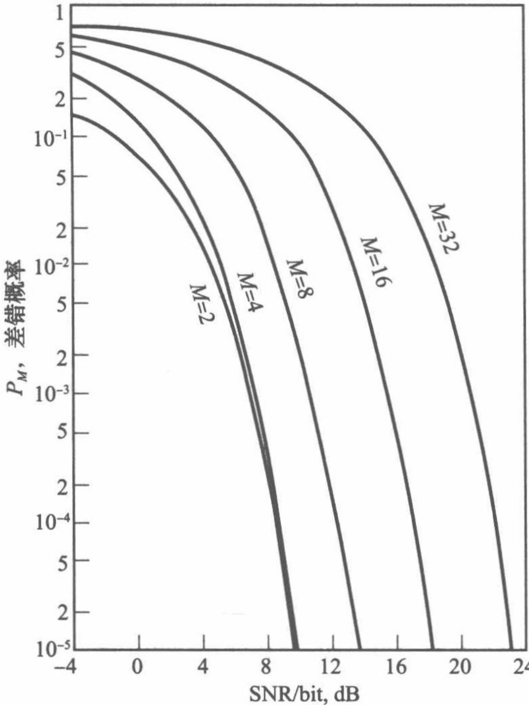


图8-51 PSK信号的符号差错概率

要近似表示M和SNR较大取值下的差错概率，必须先得到$f_\Theta(\theta)$的近似表示。对于$\mathscr{E}_s/N_0\gg 1$和$|\Theta|\leqslant\pi/2$，$f_\Theta(\theta)$可以近似表示为

414

$$f_\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{\rho_s}{\pi}}\cos\theta e^{-\rho_s\sin^2\theta} \tag{8.6.29}$$

将$f_\Theta(\theta)$代入式(8.6.22)并将变量θ替换为$u=\sqrt{\rho_s}\sin\theta$，可以得到

$$\begin{aligned}
P_M &\approx 1-\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\sqrt{\frac{\rho_s}{\pi}}\cos\theta e^{-\rho_s\sin^2\theta}d\theta \\
&\approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2\rho_s}\sin\pi/M}^{\infty}e^{-u^2/2}du \\
&= 2Q\left(\sqrt{2\rho_s}\sin\frac{\pi}{M}\right) \\
&= 2Q\left(\sqrt{2k\rho_b}\sin\frac{\pi}{M}\right) &(8.6.30)\\
&= 2Q\left(\sqrt{2k\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) &(8.6.31)\\
&\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2\log_2 M}{M^2}\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) &(8.6.32)
\end{aligned}$$

其中$k=\log_2 M$且$\rho_s=k\rho_b$。注意对于M的较大取值，$\sin\frac{\pi}{M}\approx\frac{\pi}{M}$。而式(8.6.30)和式(8.6.31)中的差错概率近似适用于所有的M取值。例如，$M=2$和$M=4$时，$P_2=P_4=$

$2Q(\sqrt{2\rho_b})$，此结果与式(8.6.24)的精确差错概率相当(仅有倍数 2 的差别)。而且，由于式(8.6.32)的分母中存在 M^2，因此 M 增倍导致性能恶化 4 倍(6dB)。这与基带 PAM 信号和载波调制的 PAM 信号相似。

例 8.6.2 利用式(8.3.65)中的二进制事件差错概率和式(8.6.8)中 PSK 信号星座图中两个相邻信号点之间的欧氏距离，求符号差错概率的近似表示，并与式(8.6.30)比较。

415

解： 首先确定有 AWGN 干扰的发送信号判决差错概率。根据式(8.3.65)有

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

其中 d_{12}^2 是发送信号点与特等错误选择信号点之间的欧氏距离的平方。在 PSK 信号星座图中，差错概率主要取决于在两个信号中对于与发送信号点邻近的那个信号点的错误选择。相应地，差错概率近似为

$$P_2 \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)$$

其中 $d_{\min}$ 由式(8.6.8)给定。将 $d_{\min}$ 代入 P_M 可得

$$P_2 \approx 2Q\left(\sqrt{2\rho_s}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

该式与式(8.6.30)的结果一致。 ◀

M 进制相位调制的比特差错概率的推导过程相当繁琐，这是因为推导时需要将 k 比特符号映射成对应的信号相位。采用格雷码规则进行映射，其特点是相邻相位的两个 k 比特符号只有 1 个比特不同。由于最可能出现的差错是将正确的相位错误地选择成相邻的相位，大多数情况下，符号差错只有 1 个比特的错误。因此，M 进制相位调制的比特差错概率可以近似为

$$P_b \approx \frac{1}{k}P_M \tag{8.6.33}$$

上述性能分析适用于相位相干解调，即通过(绝对)相位卷积将信息映射为信号相位。如 8.6.4 节所示，相位的模糊会影响载波相位估计，发送器对信息符号进行差分编码，接收机进行差分译码。对差分编码的相位调制信号进行相干解调，可以得到比绝对相位编码的差错概率更高的差错概率。对于差分编码信号，(噪声导致的)检测相位差错经常导致连续信号间隔的解调差错，特别是对于差错概率低于 10^{-1} 的情况。因此，差分编码的 M 进制相位调制的差错概率近似是绝对相位编码的 M 进制相位调制的差错概率的两倍。不过，如图 8-51 所示，差错概率增长 2 倍对应很小的 SNR 损失。

8.6.4　差分相位编码与差分相位调制和解调

理想的相干相位调制与解调的性能接近于载波携带信号的通信系统能达到的性能。载波信号分量，通常称为导频信号，可以从接收信号中得到，可用于实现相位相干解调。但是，如果没有分离的载波，接收机必须从接收信号中估计载波相位。在 8.8.1 节中将解释锁相环(PLL)对整数倍$2\pi/M$相位的模糊影响，因此有必要在调制之前对数据进行差分编码。差分编码能够在相位模糊的情况下通过检测器解调接收数据。

416

在差分编码中，信息是由两个连续信号间隔中的相位偏移表示的。例如，二进制相位调制，信息比特 1 可以用载波相位与前一个信号间隔中载波相位的 180°偏移表示，信息比特 0 可以用载波相位与前一个信号间隔中载波相位的零相位偏移表示。在 4 相调制中，连续两个信号间隔的相对相位偏移量为 0°，90°，180°和 270°，分别对应信息比特 00，01，11 和 10。对于 $M>4$，差分编码的推广可以很直接。这个编码过程产生的相位调制信号称为*差分编码的信号*。编码是通过在调制器之前的相对简单的逻辑电路实现的。

差分编码相位调制信号的调制和解调过程将在 8.8.4 节中讨论，可以用 PLL 的输出实现解调。检测器的接收信号相位 $\Theta=\tan^{-1}y_2/y_1$ 可以映射为 M 个可能发送信号相位 $\{\theta\}$ 中最接近 Θ 的一种。在检测器后有一个相对简单的相位比较器，比较两个连续信号间隔的检测信号的相位，提取发送信息。这样就可以克服 $2\pi/M$ 的相位模糊。

差分相移键控。差分编码相位调制信号也可以采用一种不需要载波相位估计的解调方法，就是对接收信号比较每个信号间隔的相位与前一个间隔的相位。为了说明这个方法，假设我们对差分编码信号的解调可以通过将接收信号 $r(t)$ 与 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$ 分别相乘，将乘积在间隔 T 中积分。在第 k 个信号间隔，解调器的输出可以用复数表示

$$y_k=\sqrt{\mathscr{E}_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_k-\phi)}+n_k \tag{8.6.34}$$

其中 θ_k 是发送信号在第 k 个信号间隔中的相位角度，ϕ 是载波相位，$n_k=n_{kc}+jn_{ks}$ 是噪声矢量。类似地，前一信号间隔中解调器输出的接收信号矢量的复数形式为

$$y_{k-1}=\sqrt{\mathscr{E}_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_{k-1}-\phi)}+n_{k-1} \tag{8.6.35}$$

相位检测器的判决变量是两个复数之间的相位差。等价地，将 y_k 投影到 y_{k-1}，投影矢量的复数表示为

$$y_k y_{k-1}^*=\mathscr{E}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_k-\theta_{k-1})}+\sqrt{\mathscr{E}_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_k-\phi)}n_{k-1}^*+\sqrt{\mathscr{E}_s}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_{k-1}-\phi)}n_k+n_k n_{k-1}^* \tag{8.6.36}$$

417 其中无噪声的条件下，相位差为 $\theta_k-\theta_{k-1}$。因此 $y_k y_{k-1}^*$ 的均值与载波相位无关。采用上述译码和检测方式的差分编码 PSK 信号称为*差分 PSK(DPSK)*。

利用匹配滤波器进行 DPSK 的解调和检测如图 8-52 所示。如果脉冲 $g_T(t)$ 是矩形，匹配滤波器可以用积分器替代，称为*积分-清除滤波器*。

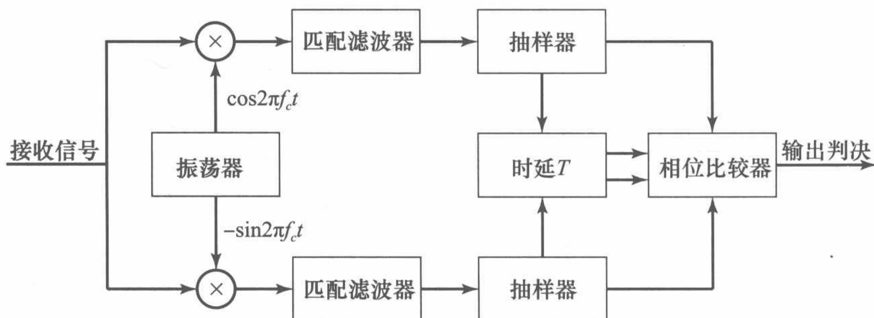


图 8-52 DPSK 解调器的组成框图

8.6.5 DPSK 的差错概率

现在考虑 DPSK 解调器和检测器的差错概率性能计算。M 进制 DPSK 信号的差错概率的确切取值的推导很复杂($M=2$ 的情况除外)。主要的困难在于式(8.6.36)中随机变量 $y_k y_{k-1}^*$ 的相位 PDF 的推导。

帕乌拉等人(Pawulaet al 1982)已经指出 M 进制 DPSK 的符号差错概率可以用以下积分形式表示

$$P_M=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\pi/M}\exp\left[-\frac{\rho_s\sin^2(\pi/M)}{1+\cos(\pi/M)\sin\theta}\right]\mathrm{d}\theta \tag{8.6.37}$$

这个表达式可以数值计算得到符号差错概率。

下面我们将通过分析说明 DPSK 的性能。

通常可以假设相位差 $\theta_k-\theta_{k-1}=0$。而且，如习题 5.28 所示，式(8.6.36)中的指数因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_k-\phi)}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_{k-1}-\phi)}$ 可以视为高斯噪声分量 n_k 和 n_{k-1}，这样并不会改变这些分量的统计特征。因此，式(8.6.36)中的 $y_k y_{k-1}^*$ 可以表示为

$$y_k y_{k-1}^* = \mathscr{E}_s + \sqrt{\mathscr{E}_s}(n_k + n_{k-1}^*) + n_k n_{k-1}^* \tag{8.6.38}$$

确定 PDF 相位的复杂性主要是在 $n_k n_{k-1}^*$ 这一项。不过，对于实际关注的 SNR，$n_k n_{k-1}^*$ 相对于主要的噪声项 $\sqrt{\mathscr{E}_s}(n_k + n_{k-1}^*)$ 是很小的。如果忽略 $n_k n_{k-1}^*$，并且通过除以 $\sqrt{\mathscr{E}_s}$ 对 $y_k y_{k-1}^*$ 归一化，新的判决测度集变为

418

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\mathscr{E}_s} + \mathrm{Re}(n_k + n_{k-1}^*) \\ y_2 &= \mathrm{Im}(n_k + n_{k-1}^*) \end{aligned} \tag{8.6.39}$$

变量 y_1 和 y_2 是不相关高斯随机变量，方差均为 $\sigma_n^2 = N_0$。相位为

$$\Theta = \tan^{-1}\frac{y_2}{y_1} \tag{8.6.40}$$

这与 PSK 的相位相干解调和检测时解决的问题是一样的。唯一的不同就是噪声方差是 PSK 情况下噪声方差的两倍。因此可以得出 DPSK 的性能比 PSK 差 3dB。这个结果在 $M \geqslant 4$ 的情况下相对较好，但是当 $M=2$ 时则不乐观了。因为 DPSK 的性能比 PSK 的性能差 3dB，在 SNR 较大的情况下，这个差值少于 3dB。

对于二进制 DPSK，两个发送相位差可能为零和 π 弧度。这样，恢复信息仅仅需要 $y_k y_{k-1}^*$ 的实数部分。可以将实数部分表示为

$$\mathrm{Re}(y_k y_{k-1}^*) = \frac{1}{2}(y_k y_{k-1}^* + y_k^* y_{k-1}) \tag{8.6.41}$$

由于两个连续的信号间隔之间的相位差为零，如果 $\mathrm{Re}(y_k y_{k-1}^*)$ 小于零，就会出现判决差错。根据 $y_k y_{k-1}^* + y_k^* y_{k-1} < 0$ 的概率进行 DPSK 差错概率的严格分析可以表示为

$$P_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho_b} \tag{8.6.42}$$

这里，$\rho_b = \mathscr{E}_b / N_0$ 是 SNR/bit。

式(8.6.42)的曲线如图 8-53 所示。图中给出了二进制 PSK 的差错概率。可以看到，差错概率低于 10^{-4} 时，二进制 PSK 和二进制 DPSK 的 SNR 差小于 1dB。由于 DPSK 不需要估计载波相位，就可以省略锁相环，解调器的实现可以简化。虽然二进制 DPSK 和二进制 PSK 有性能的差异，但是二进制 DPSK 更受青睐。

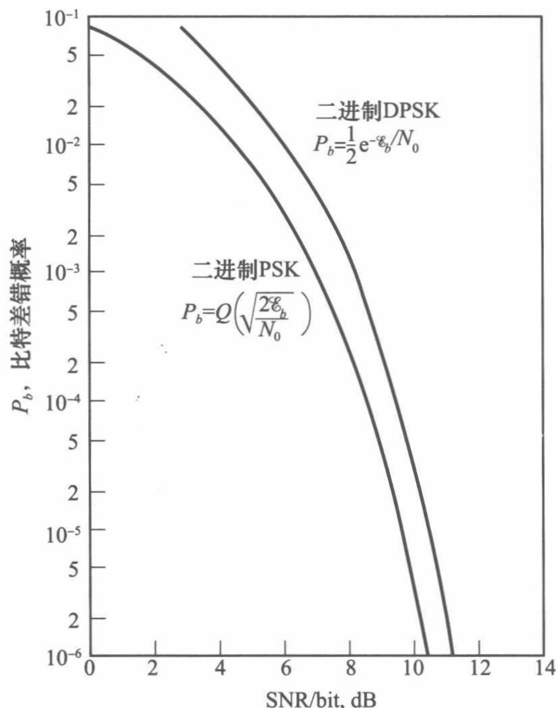


图 8-53　二进制 PSK 和 DPSK 的符号差错概率

8.7　正交幅度调制数字信号

在载波相位调制的讨论中，可以看到带通信号波形可以用式(8.6.4)表示，信号波形可以视为两个正交载波信号 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$，其幅度受到信息比特的调制。不过，载波相位调制信号的一个限制是载波具有相等的能量 $\mathscr{E}_s$，这就意味着信号波形的几何表示就是半径为 $\mathscr{E}_s$ 的圆上的信号点。如果去掉恒定能量的限制，那么可以构造二维信号波形，其矢量表示不再限于落在圆上。

419

构造这种信号的最简单的方法就是将不同的信息比特分别施加在不同的正交载波 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $-\sin 2\pi f_c t$ 上。这类数字调制称为正交幅度调制(QAM)。可以将这种信息传输方法视为 3.4.2 节描述过的正交载波复用的一种形式。

发送信号波形可以表示为

$$u_m(t) = A_{mc}g_T(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g_T(t)\sin 2\pi f_c t, \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \quad (8.7.1)$$

其中$\{A_{mc}\}$和$\{A_{ms}\}$为k比特序列映射为信号幅度得到的幅度电平集。例如，图8-54给出的16QAM信号星座图，是通过两个相互正交的$M=4$的载波幅度调制PAM信号。如图8-55给出了QAM调制器的功能模块框图。

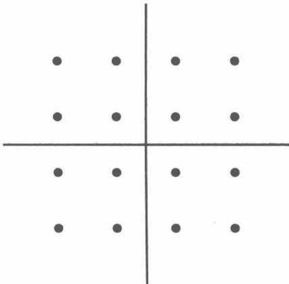


图 8-54 $M=16$QAM 信号星座图

更一般地，QAM可以视为一种数字幅度和数字相位调制形式。因此，发送QAM信号波形可以表示为

$$u_{mn}(t) = A_m g_T(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_n),$$
$$m = 1,2,\cdots,M_1;\ n = 1,2,\cdots,M_2 \quad (8.7.2)$$

如果$M_1=2^{k_1}$且$M_2=2^{k_2}$，那么幅度与相位联合调制方法可以符号速率R_b/k_1+k_2同时发送$k_1+k_2=\log_2 M_1M_2$个二进制位。

8.7.1 QAM信号的几何表示

420～421

显然，式(8.7.1)和式(8.7.2)给出的信号的几何表示，可以表示为二维矢量形式

$$s_m = (\sqrt{\mathscr{E}_s}A_{mc}, \sqrt{\mathscr{E}_s}A_{ms}), \quad m = 1,2,\cdots,M \quad (8.7.3)$$

并且正交基信号为

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\cos 2\pi f_c t$$
$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\sin 2\pi f_c t \quad (8.7.4)$$

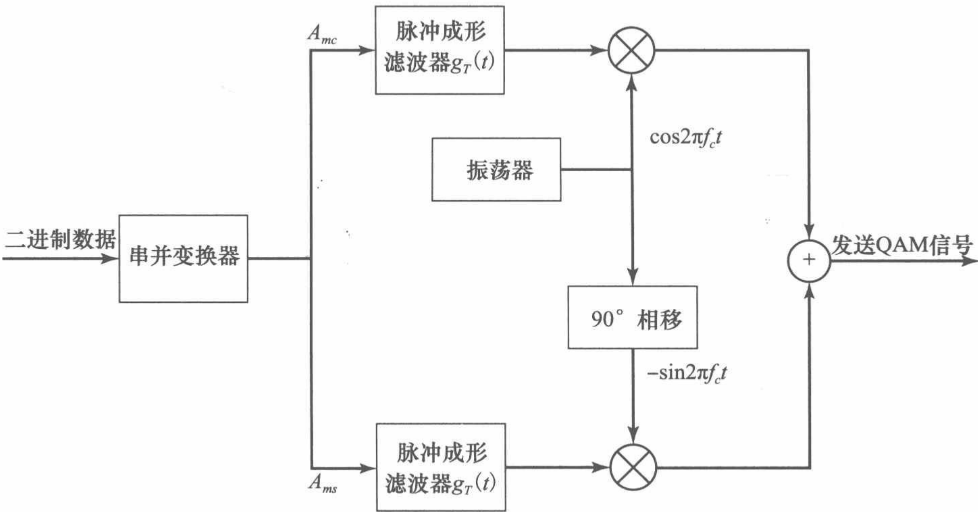


图 8-55 QAM调制器的功能框图

应该看到，$M=4$矩形QAM和$M=4$ PSK具有相同信号星座图。

图8-56给出了QAM的信号空间示例。

这些信号星座图的平均发送能量就是每个正交载波的平均能量之和。对于如图8-56所示的信号星座图，平均符号信号能量可以表示为

$$\mathscr{E}_{\text{av}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\|\boldsymbol{s}_i\|^2 \quad (8.7.5)$$

任意一对信号点之间的距离为

$$d_{mn} = \sqrt{\|\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{s}_n\|^2} \quad (8.7.6)$$

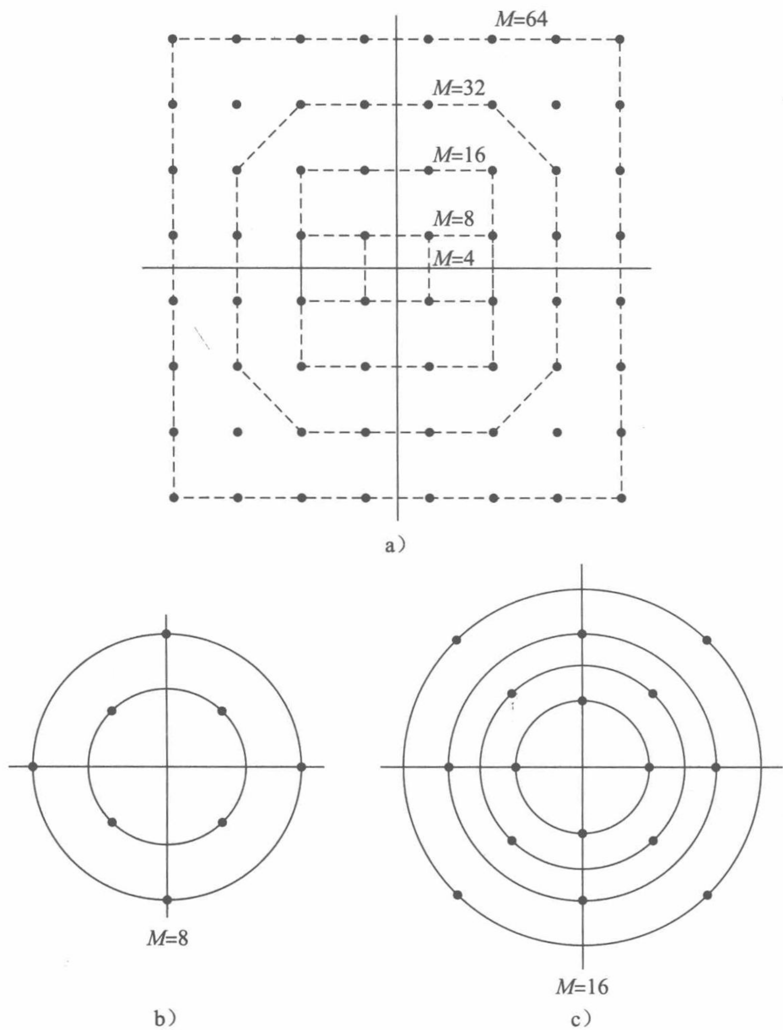


图 8-56　a) QAM 矩形信号空间星座图；b)、c)PAM-PSK 组合信号空间星座图

例 8.7.1 $M=8$ 矩形信号星座图和 $M=8$ 组合 PAM－PSK 信号星座图，如图 8-57a 和 b 所示。假设两个星座图中相邻信号点距离 $d=2$，求每个星座图中每个符号的平均能量。哪一个星座图更可取？为什么？

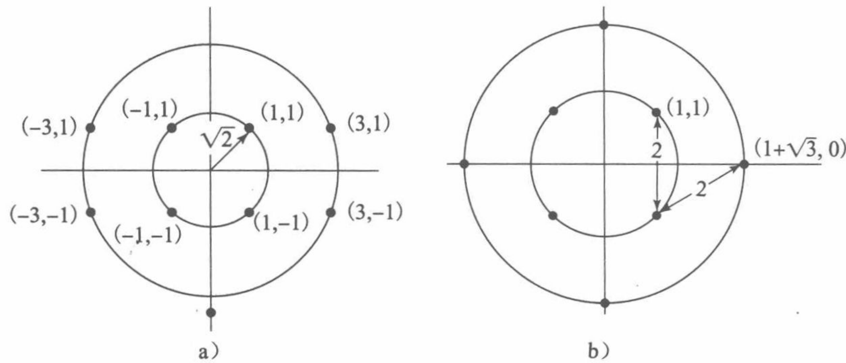


图 8-57　$M=8$ QAM 信号星座图

解：对于 $M=8$ 如图 8-57a 所示的信号星座图，信号坐标点为(±1，±1)和(±3，±1)。因此，每个符号的平均能量为

$$\mathscr{E}_{av}=\frac{1}{8}[4(2)+4(10)]=6$$

对于 $M=8$ 如图 8-57b 所示的信号星座图，信号坐标点为(±1，±1)，($1+\sqrt{3}$，0)，($-1-\sqrt{3}$，0)和(0，$-1-\sqrt{3}$)。因此，每个符号的平均能量为

$$\mathscr{E}_{av}=\frac{1}{8}[4(2)+4(7.464)]=4.73$$

这个信号星座图更可取，因为要达到同样的性能，相比矩形信号星座图，这种星座图要求的每个符号的平均能量少 1dB。◀

8.7.2 QAM 信号的解调与检测

422～423

QAM 信号受到加性高斯噪声干扰，接收信号可以表示为

$$r(t)=A_{mc}g_T(t)\cos 2\pi f_ct-A_{ms}g_T(t)\sin 2\pi f_ct+n(t) \tag{8.7.7}$$

接收信号 $r(t)$与式(8.7.4)中的信号互相关，在 $t=T$ 时刻互相关器的输出抽样值矢量形式为

$$y=\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{n} \tag{8.7.8}$$

$$=(\sqrt{\mathscr{E}_s}A_{mc}+n_c,\sqrt{\mathscr{E}_s}A_{ms}+n_s) \tag{8.7.9}$$

最佳检测器计算以下距离测度

$$D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{s}_m\|^2,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.7.10}$$

并且选择对应最小距离值 $D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)$的信号。如果采用相关测度替代距离测度，必须注意相关测度需要考虑到 QAM 信号是能量不等信号，要考虑偏差。

8.7.3 QAM 的差错概率

要确定 QAM 的差错概率，必须确定信号点星座图。从 $M=4$ 个信号点的 QAM 开始讨论。图 8-58 给出了两种 4 点信号集。第 1 个是四相调制信号，第 2 个是有两种幅度电平 $\sqrt{\mathscr{E}_1}$和 $\sqrt{\mathscr{E}_2}$及 4 种相位的 QAM 信号。由于差错概率主要由信号点之间的最小距离决定，对两个信号星座图给出同样的限制条件 $d_{min}=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$，并且根据信号等概的条件估计平均能量。对于四相信号有

424

$$\mathscr{E}_{av}=\frac{1}{4}(4)2\mathscr{E}_s=2\mathscr{E}_s \tag{8.7.11}$$

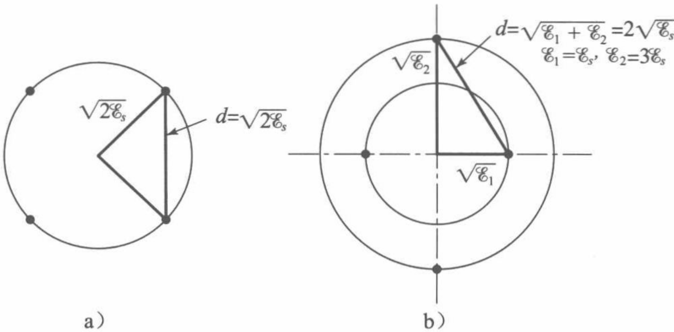


图 8-58 两种 4 点信号星座图

对于二电平四相 QAM 信号，将信号点分别放在半径为 $\sqrt{\mathscr{E}_1}$和 $\sqrt{\mathscr{E}_2}$的圆上。这样，在最小距离 $d_{min}=2\sqrt{\mathscr{E}}$的限制下，平均能量为

$$\mathscr{E}_{av}=\frac{1}{4}[2(3)\mathscr{E}_s+2\mathscr{E}_s]=2\mathscr{E}_s \tag{8.7.12}$$

这与四相信号星座图的平均能量相同。因此，对于所有实际目的，两个信号集的差错率性能一致。换言之，二电平 QAM 信号集相对四相位调制并没有优势。

下面，考虑 $M=8$ 的 QAM。这种情况下有很多可能的信号星座图。图 8-59 给出了四种信号星座图，分别由两种信号幅度构成，并且信号点之间最小距离为 $2\sqrt{\mathscr{E}_s}$。每个信号点的坐标(A_{mc}, A_{ms})可以用$\sqrt{\mathscr{E}_s}$归一化，如图中所示。假设信号点等概率出现，平均发送信号能量为

$$\mathscr{E}_{\text{av}}=\frac{\mathscr{E}_s}{M}\sum_{i=1}^{M}(a_{mc}^2+a_{ms}^2) \tag{8.7.13}$$

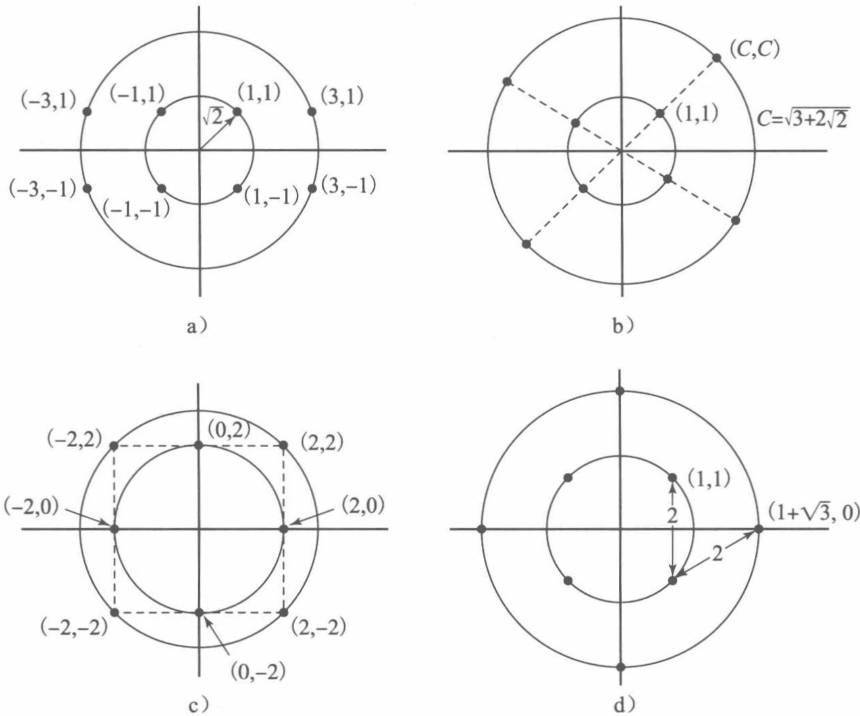


图 8-59　四种 8 点 QAM 信号星座图

其中(a_{mc}, a_{ms})是归一化的信号点坐标。

在图 8-59 中，两个信号集(a)和(c)包含的信号点都落在矩形网格上且$\mathscr{E}_{\text{av}}=6\mathscr{E}_s$。信号集(b)要求平均发送信号能量$\mathscr{E}_{\text{av}}=6.82\mathscr{E}_s$，而第 4 个信号集要求$\mathscr{E}_{\text{av}}=4.73\mathscr{E}_s$。可见，要达到同样的差错概率，信号集(d)要求的能量比(a)和(c)少约 1dB，比(b)少 1.6dB。因为这种信号星座图在最小信号距离下要求的信号能量最小，所以(d)是最好的 8 点 QAM 星座图。

对于 $M\geqslant16$，在二维空间中选择 QAM 信号点的可能性很多。例如，对于 $M=16$ 可以选择多电平环形星座图，如图 8-60 所示。在这种情况下，给定幅度电平下的信号点与相邻电平信号点相差$\pi/4$。这个 16-QAM 星座图是最佳8-QAM星座图的推广。不过，环形 16-QAM 星座图不是 AWGN 信道中最好的 16-QAM 信号星座图。

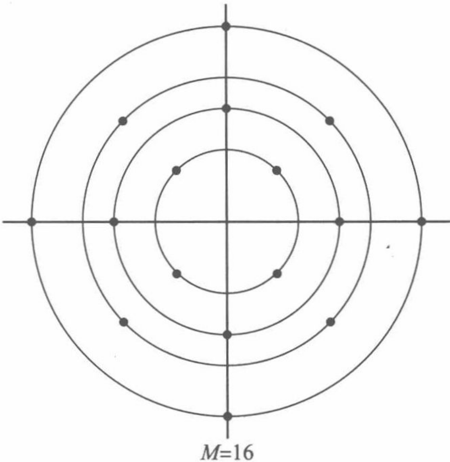


图 8-60　环形 16 点 QAM 信号星座图

425～426

矩形 QAM 信号星座图的显著优点是，易于用两个调制到相位正交载波上的 PAM 信

号产生。此外，如前所述，其解调也容易实现。尽管对于 $M\geqslant 16$，矩形星座图不是最佳 M 进制 QAM 信号星座图，但它需要发送的信号能量，仅仅比最佳 M 进制 QAM 信号星座图的稍微多一点，因此，矩形 M 进制 QAM 信号星座图是实际中最常用的。

对于矩形信号星座图，$M=2^k$，其中 k 为偶数。QAM 信号星座图等价于两个正交载波上的 PAM 信号，每个 PAM 信号分别有 $\sqrt{M}=2^{k/2}$ 个信号点。由于相位正交分量上的信号可以用相干检测很好地实现分离，因此 QAM 差错概率也容易通过 PAM 的差错概率推导得到。具体地，M 进制 QAM 信号的正确判决概率为

$$P_c=(1-P_{\sqrt{M}})^2 \tag{8.7.14}$$

其中 $P_{\sqrt{M}}$ 是等价 QAM 系统中具有一半平均能量的、$\sqrt{M}$ 进制的每个正交信号的差错概率。对 M 进制 PAM 信号的差错概率进行近似修正，可以得到

$$P_{\sqrt{M}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{av}}}{N_0}}\right) \tag{8.7.15}$$

其中 $\mathscr{E}_{\mathrm{av}}/N_0$ 是平均每符号的 SNR。因此，M 进制 QAM 信号的符号差错概率为

$$P_M=1-(1-P_{\sqrt{M}})^2 \tag{8.7.16}$$

对于 $M=2^k$，k 为偶数，这个结果是精确的。而 k 为奇数时，信号星座图不是方形的，因此没有等价的 M 进制 PAM 信号系统。不过，这并不是问题，要确定矩形信号集的差错概率还是相对容易的。如果采用基于式(8.7.10)给出的最佳距离测度的最佳检测器，可以直接得到符号差错概率的上界为

427

$$P_M\leqslant 1-\left[1-2Q\left(\sqrt{\frac{3\mathscr{E}_{\mathrm{av}}}{(M-1)N_0}}\right)\right]^2\leqslant 4Q\left(\sqrt{\frac{3k\mathscr{E}_{\mathrm{bav}}}{(M-1)N_0}}\right) \tag{8.7.17}$$

对于 $k\geqslant 1$，其中 $\mathscr{E}_{\mathrm{bav}}/N_0$ 是平均 SNR/bit。图 8-61 给出的符号差错概率与平均 SNR/bit 成函数关系。

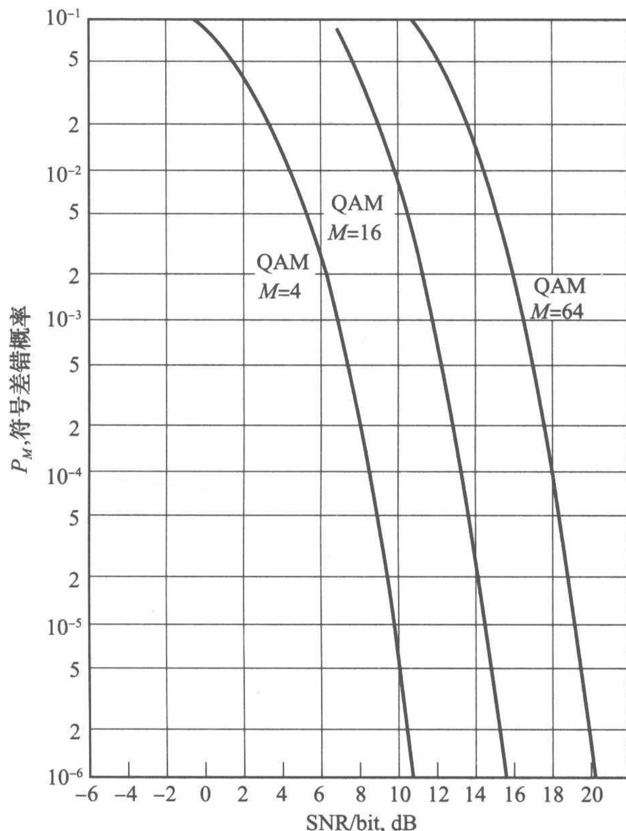


图 8-61　QAM 的符号差错概率

对于任意给定的信号数量 M 的相位调制，因 QAM 与相位调制这两类信号都是二维的，所以它们的性能比较很有趣。已知 M 进制调制的符号差错概率近似为

$$P_M\approx 2Q\left(\sqrt{2\rho_s}\sin\frac{\pi}{M}\right) \tag{8.7.18}$$

其中 ρ_s 是每符号的 SNR。对于 M 进制 QAM，可以用式(8.7.17)表示。差错概率主要由 Q 函数自变量决定，因此可以简单比较两种信号格式的 Q 函数自变量。可得两个自变量之比为

428

$$\mathscr{R}_M\approx\frac{3/(M-1)}{2\sin^2\pi/M} \tag{8.7.19}$$

当 $M=4$ 时有 $\mathscr{R}_M=1$，对于同样的 SNR/bit，4-PSK 和 4-QAM 性能相当。另一方面，当 $M>4$ 时有 $\mathscr{R}_M>1$，M 进制 QAM 的性能优于 M 进制 PSK。

表 8-1给出几种 M 取值下，QAM 相对于 PSK 的 SNR 优势。可以看到 32-QAM 相比 32-PSK有 7dB 的 SNR 优势。

例 8.7.2 由式(8.7.17)的 QAM 符号差错概率表达式，求每符号比特数从 k 增加至 $k+1$ 时，要维持同样的(差错概率)性能，每比特需要增加的平均能量$\mathscr{E}_{\text{bav}}$。

表 8-1　M 进制 QAM 相对于 M 进制 PSK 的 SNR 优势

M	$10\log_{10}\mathcal{R}_M$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

解： 由于 $M=2^k$，k 增加 1 比特，信号点数量必须从 M 增加至 $2M$。对于较大的 M，可以发现每比特平均能量从$\mathscr{E}_{\text{bav}}$增至 $2\mathscr{E}_{\text{bav}}$；这就可以使差错概率保持不变。因此，在 QAM 中，每个符号增加 1 比特，需要增加 3dB 发送信号能量以达到同样的差错概率。对于较大的 M，QAM 比 PSK 所需能量小 2 倍。因此对于 $M>4$，QAM 比 PSK 更省能量，如表 8-1 所示。◀

8.8 载波相位估计

本节将讨论接收信号相位相干解调所需要的载波相位估计方法。特别是采用 PAM，PSK 或者 QAM 传输数据的情况下，从接收到的已调波信号中估计载波相位的方法。

8.8.1 锁相环

先介绍一种用于 DSB-SC AM 信号的同步(相位相干)解调的相位参考信号的产生方法。在解调器输入端接收到的有噪信号为

$$r(t)=u(t)+n(t)=A_c m(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)+n(t) \tag{8.8.1}$$

其中 $m(t)$为消息信号，假设其为零均值随机过程 $M(t)$的样本函数，即 $m(t)$为基带 PAM 信号。 429

由于消息过程为零均值，即 $M(t)$无直流分量，因此接收信号 $r(t)$均值为零。相应地，中心频率为 f_c 的窄带滤波器输出的平均功率为零。这就意味着不能直接从接收信号 $r(t)$ 中提取载波信号分量。

如果对 $r(t)$取平方，平方信号包含一个载波倍频分量，即

$$\begin{aligned}r^2(t)&=A_c^2m^2(t)\cos^2(2\pi f_c t+\phi)+\text{噪声项}\\&=\frac{1}{2}A_c^2M^2(t)+\frac{1}{2}A_c^2M^2(t)\cos(4\pi f_c t+2\phi)+\text{噪声项}\end{aligned} \tag{8.8.2}$$

由于 $E(M^2(t))=R_M(0)>0$，在频率 $2f_c$ 处有信号功率，可以用于驱动锁相环(PLL)。

为了将倍频信号与其他频率分量分开，令平方后的输入信号通过中心频率 $2f_c$ 的窄带滤波器。这个滤波器输出的均值为正弦波、频率为 $2f_c$、相位为 2ϕ、幅度为 $A_c^2E(M^2(t))H(2f_c)/2$，其中 $H(2f_c)$为 $f=2f_c$ 处滤波器的(幅度)增益。因此，输入信号平方产生一个 2 倍载波频率的一个正弦分量，可以作为 PLL 的输入。图 8-62 给出了这种载波相位估计系统实现框图。

PLL 由一个乘法器、一个环路滤波器和一个压控振荡器(VCO)构成，如图 8-63 所示。如果 PLL 的输入为 $\cos(4\pi f_c t+2\hat{\phi})$，VCO 的输出为 $\sin(4\pi f_c t+2\hat{\phi})$，其中$\hat{\phi}$代表对 ϕ 的估计，即两个信号乘积产生了信号

$$\begin{aligned}e(t)&=\cos(4\pi f_c t+2\phi)\sin(4\pi f_c t+2\hat{\phi})\\&=\frac{1}{2}\sin 2(\hat{\phi}-\phi)+\frac{1}{2}\sin(8\pi f_c t+2\hat{\phi}+2\phi)\end{aligned} \tag{8.8.3}$$

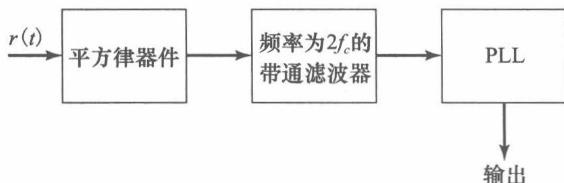


图 8-62　载波相位估计系统

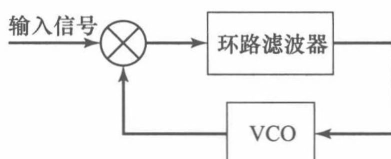


图 8-63　PLL 的基本要素

430 注意 $e(t)$包含一个低频项(DC)和一个载波 4 倍频项。

环路滤波器是一个低通滤波器，仅对低频分量 $\sin(\hat{\phi}-\phi)$有响应，能消除 $4f_c$ 频率分量。滤波器通常选择相对简单的传递函数

$$G(s)=\frac{1+\tau_2 s}{1+\tau_1 s} \tag{8.8.4}$$

其中时间常数 τ_1 和 τ_2 是设计参数($\tau_1 \gg \tau_2$)，用于控制环路的带宽。如果有必要获得更好的性能，可以使用具有更多极点的高阶滤波器。

环路的输出作为 VCO 的控制电压，其实现过程见 4.3 节 FM 调制内容的描述。VCO 基本上是一个正弦信号发生器，瞬时相位为

$$4\pi f_c t+2\hat{\phi}=4\pi f_c t+K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.8.5}$$

其中 K 是增益常数，单位为弧度每伏秒。因此，VCO 输出的载波相位估计值为

$$2\hat{\phi}=K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.8.6}$$

并且 VCO 的传递函数为 K/s。

在输入信号与 VCO 输出的乘积中，倍频项被环路滤波器滤除，PLL 可以用如图 8-64 所示的闭环系统模型表示。

相位差 $2(\hat{\phi}-\phi)$的正弦函数导致系统的非线性，因此需要进行有噪声条件下的 PLL 性能分析。对于简单的环路滤波器，这种分析在数学上是可行的。

环路跟踪接收机相位的稳定状态下，相位差$\hat{\phi}-\phi$很小，因此有

$$\frac{1}{2}\sin 2(\hat{\phi}-\phi)\approx\hat{\phi}-\phi \tag{8.8.7}$$

利用这个近似，PLL 可用如图 8-65 的线性模型表示。线性模型具有一个闭环传递函数

431

$$H(s)=\frac{KG(s)/s}{1+KG(s)/s} \tag{8.8.8}$$

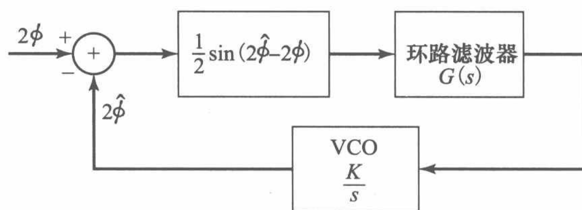


图 8-64 PLL 的模型

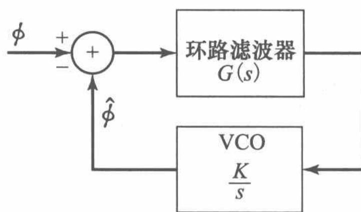


图 8-65 PLL 的线性模型

将式(8.8.4)代入式(8.8.8)中可得

$$H(s)=\frac{1+\tau_2 s}{1+\left(\tau_2+\frac{1}{K}\right)s+\frac{\tau_1}{K}s^2} \tag{8.8.9}$$

因此，对于环路滤波器有一个极点和一个零点的情况，线性 PLL 的闭路反馈系统函数是二阶的。参数 τ_2 确定 $H(s)$中零点的位置，而 K、τ_1 和 τ_2 控制闭路反馈系统极点的位置。

$H(s)$的分母可以用标准形式表示为

$$D(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \tag{8.8.10}$$

其中 ζ 称为反馈阻尼因子，ω_n 为环路的自然频率。根据环路参数，$\omega_n=\sqrt{K/\tau_1}$ 和 $\zeta=\omega_n(\tau_2+1/K)/2$，闭路反馈传递函数为

$$H(s)=\frac{(2\zeta\omega_n-\omega_n^2/K)s+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8.8.11}$$

幅度频率响应 $20\log|H(\mathrm{j}\omega)|$ 是归一化频率 ω/ω_n 的函数，如图 8-66 所示，阻尼因子为参数且 $\tau_1 \gg 1$。注意 $\zeta=1$ 导致临界阻尼反馈响应，$\zeta<1$ 导致亚阻尼反馈响应，$\zeta>1$ 导致过阻尼反馈响应。

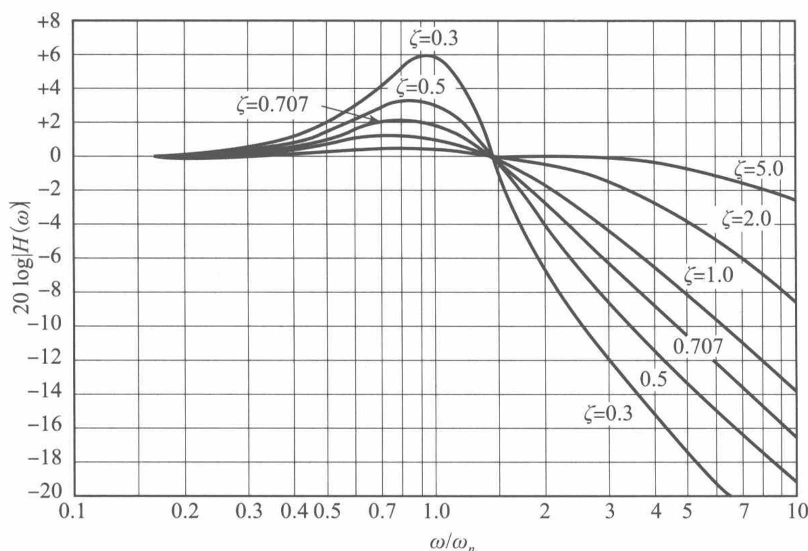


图 8-66 二阶环路的频率响应

环路的(单边)噪声等效带宽为(参见习题 8.42)

$$B_{\text{neq}} = \frac{\tau_2^2(1/\tau_2^2 + K/\tau_1)}{4\left(\tau_2 + \dfrac{1}{K}\right)} = \frac{1+(\tau_2\omega_n)^2}{8\,\zeta/\omega_n} \tag{8.8.12}$$

实际上，PLL 带宽的选择涉及响应速度和相位估计的折中。一方面，希望选择足够宽的环路带宽，以跟踪接收机相位的时间变化。另一方面，宽带 PLL 会导致更多噪声进入环路而干扰相位估计。下面，评价噪声对相位估计质量的影响。

加性噪声对相位估计的影响。为了评估噪声对载波相位估计的影响，假设 PLL 跟踪如下形式的正弦信号

$$s(t) = A_c\cos[2\pi f_c t + \phi] \tag{8.8.13}$$

432

受到加性窄带噪声

$$n(t) = n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t \tag{8.8.14}$$

的影响。假设噪声的同相和正交分量为统计独立平稳高斯噪声过程，双边功率谱密度为 $N_0/2$W/Hz。利用简单的三角函数关系，式(8.8.14)中噪声项可以表示为

$$n(t) = x_c(t)\cos[2\pi f_c t + \phi] - x_s(t)\sin[2\pi f_c t + \phi(t)] \tag{8.8.15}$$

其中

$$\begin{aligned} x_c(t) &= n_c(t)\cos\phi(t) + n_s(t)\sin\phi(t) \\ x_s(t) &= -n_c(t)\sin\phi(t) + n_s(t)\cos\phi(t) \end{aligned} \tag{8.8.16}$$

注意

$$x_c(t) + \mathrm{j}x_s(t) = [n_c(t) + \mathrm{j}n_s(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi(t)} \tag{8.8.17}$$

容易验证相位偏移不影响前两个分量 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$，所以正交分量 $x_c(t)$ 和 $x_s(t)$ 具有与 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 相同的统计特征(见习题 5.28)。

433

那么，如果 $s(t)+n(t)$ 与 VCO 输出相乘，忽略倍频项，环路滤波器的输入为有噪声干扰的信号

$$e(t) = A_c\sin\Delta\phi + x_c(t)\sin\Delta\phi - x_s(t)\cos\Delta\phi \tag{8.8.18}$$

根据定义，其中 $\Delta\phi=\hat{\phi}-\phi$ 是相位误差。因此有加性噪声的 PLL 等价模型如图 8-67 所示。

当输入信号功率 $P_c=A_c^2/2$远大于噪声功率时，相位估计$\hat{\phi}\approx\phi$，那么可以线性化 PLL。这样可以容易地确定加性噪声对$\hat{\phi}$估计质量的影响。在这样的条件下，有加性噪声干扰的线性 PLL 如图 8-68 所示。增益参数 A_c 可以归一化为单位量，只要噪声项放大倍数为 $1/A_c$。这样，噪声项变为

$$n_1(t)=\frac{x_c(t)}{A_c}\sin\Delta\phi-\frac{x_s(t)}{A_c}\cos\Delta\phi \tag{8.8.19}$$

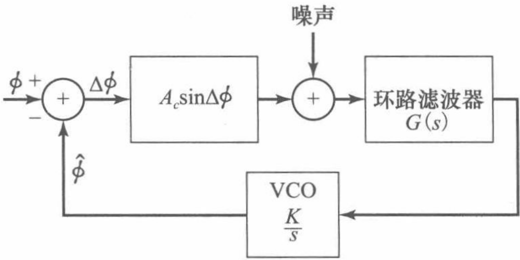


图 8-67 有加性噪声的 PLL 等价模型

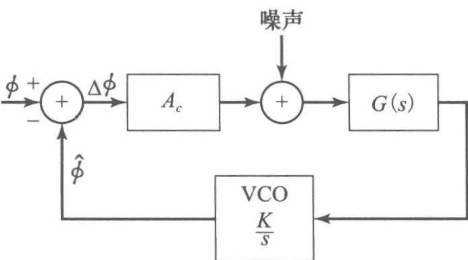


图 8-68 有加性噪声的 PLL 线性模型

由于 $n_1(t)$是在环路输入端加入到噪声中的，相位误差 $\Delta\phi$ 的方差是 VCO 输出相位的方差，即

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2=\frac{N_0B_{\text{neq}}}{A_c^2} \tag{8.8.20}$$

其中 B_{neq}是环路的(单边)等效噪声带宽，如式(8.8.12)所示。注意$A_c^2/2$是输入正弦信号的功率，$\sigma_{\hat{\phi}}^2$是 PLL 带宽内的总噪声功率与输入信号功率的比值，即

434

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2=\frac{1}{\rho_L} \tag{8.8.21}$$

其中 ρ_L 是信噪比

$$\rho_L=\frac{A_c^2/2}{B_{\text{neq}}N_0/2} \tag{8.8.22}$$

因此，$\hat{\phi}$的方差与 SNR 成反比。

VCO 相位误差的方差表达式适用于 SNR 足够大 PLL 为线性模型的情况。$G(s)=1$ 时，基于非线性 PLL 的精确分析，在数学上可以实现，是一阶反馈。在这种情况下，相位误差的概率密度函数可以推导出来[见 Viterbi(1966)]，其形式如下

$$f(\Delta\phi)=\frac{\exp(\rho_L\cos\Delta\phi)}{2\pi I_0(\rho_L)} \tag{8.8.23}$$

其中 ρ_L 是式(8.8.22)的 SNR，B_{neq}是一阶环路的适当等效噪声带宽，$I_0(\cdot)$是修正的零阶贝塞尔(Bessel)函数。

从 $f(\Delta\phi)$表达式可以推出一阶 PLL 的相位误差方差 $\sigma_{\hat{\phi}}^2$，此方差与$1/\rho_L$ 的函数关系如图 8-69所示，线性 PLL 模型也在图中给出，用于比较。对于 $\rho_L>3$，线性模型的方差接近精确的方差。因此，在实际中线性模型是足够的。

435

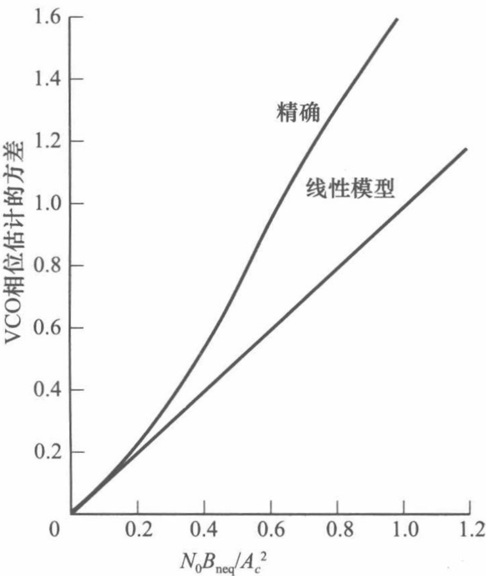


图 8-69 近似(线性模型)的一阶 PLL 的 VCO 相位方差比较

人们也对非线性 PLL 相位误差的统计特征给

出了近似分析。特别重要的是非线性 PLL 初始捕获阶段的暂态特性分析。另一个重要的问题是在小 SNR 条件下的 PLL 特性。比如，PLL 输入信噪比降至某个阈值之下，PLL 的性能急剧恶化。环路失去锁定，产生冲激型噪声，称为“喀呖”噪声，导致环路降质。这些问题的讨论可以参考以下教材：Viterbi(1966)，Lindsey(1972)，Lindsey 和 Simon(1973)，Garner(1979)，还有 Gupta(1975)，Lindsey 和 Chie(1981)的综述。

讨论了噪声对 PLL 性能的影响之后，回到基于图 8-70 的系统进行载波同步的问题上。接收信号的平方产生 $2f_c$ 处的频率分量，同时也会增大 PLL 输入噪声功率水平，因此也会增大相位误差的方差。

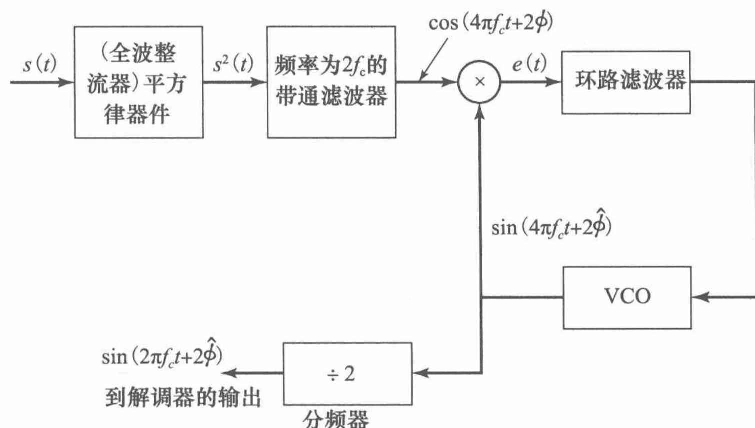


图 8-70　用平方律器件恢复载波

为了说明这一点，令平方器的输入为 $u(t)+n(t)$。输出为

$$y(t)=u^2(t)+2u(t)n(t)+n^2(t) \tag{8.8.24}$$

436

噪声项为 $2u(t)n(t)$ 和 $n^2(t)$。计算这两个噪声项的自相关和功率谱密度，可以说明两个分量都在以 $2f_c$ 为中心的频段上具有频率分量。因为这两个噪声项的存在，以 $2f_c$ 为中心带宽为 B_{neq} 的带通滤波器，能够产生驱动 PLL 的正弦信号分量，也能让噪声通过。

选择环路的带宽远远低于带通滤波器的带宽 B_{bp}，这样 PLL 输入的总噪声频谱可以近似为环路带宽内的常数。利用这个近似表示，可以导出相位误差方差的简单表达式

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2=\frac{1}{\rho_L S_L} \tag{8.8.25}$$

其中 S_L 称为平方损耗，表示为

$$S_L=\frac{1}{1+\dfrac{B_{\text{bp}}/2B_{\text{neq}}}{\rho_L}} \tag{8.8.26}$$

由于 $S_L<1$，相位误差的方差增大，这是由于平方运算导致的噪声功率增加所引起的。例如，当 $\rho_L=B_{\text{bp}}/2B_{\text{neq}}$ 时，损耗为 3dB，等价于估计方差增大 2 倍。

最后，可以看到平方环路 VCO 的输出必须经过 2 分频，并且相移 90°，才能产生载波信号用于解调接收信号。

8.8.2　Costas 环

对于双边带抑制载波(DSB-SC)AM 信号，生成具有合适相位的载波的第二种方法如图 8-71 的框图所示。

437

接收信号

$$r(t)=A_c m(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)+n(t)$$

与 $\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi})$ 和 $\sin(2\pi f_c t+\hat{\phi})$ 相乘，是 VCO 的输出。两个乘积是

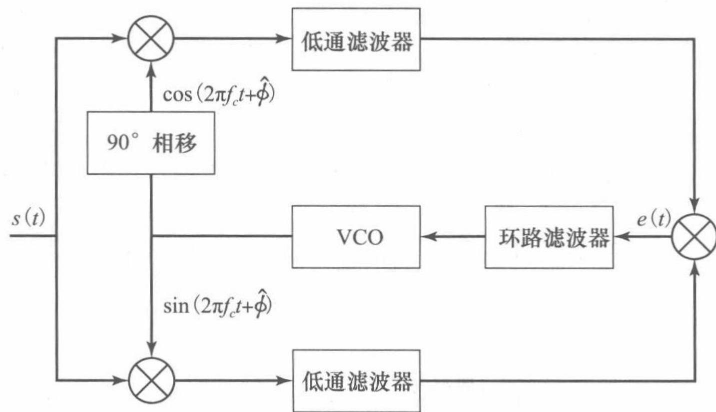


图 8-71 Costas 环框图

$$
\begin{aligned}
y_c(t) &= [A_c m(t)\cos(2\pi f_c t+\phi) \\
&\quad + n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t]\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi}) \\
&= \frac{A_c}{2}m(t)\cos\Delta\phi + \frac{1}{2}[n_c(t)\cos\hat{\phi} + n_s(t)\sin\hat{\phi}] + \text{倍频项}
\end{aligned} \tag{8.8.27}
$$

$$
\begin{aligned}
y_s(t) &= [A_c m(t)\cos(2\pi f_c t+\phi) \\
&\quad + n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t]\sin(2\pi f_c t+\hat{\phi}) \\
&= \frac{A_c}{2}m(t)\sin\Delta\phi + \frac{1}{2}[n_c(t)\sin\hat{\phi} - n_s(t)\cos\hat{\phi}] + \text{倍频项}
\end{aligned} \tag{8.8.28}
$$

其中 $\Delta\phi=\hat{\phi}-\phi$。乘法器之后的低通滤波器可以消除倍频项。

误差信号是由低通滤波器的两个输出信号 $y_c'(t)$ 和 $y_s'(t)$ 相乘得到

$$
\begin{aligned}
e(t) &= y_c'(t)y_s'(t) \\
&= \frac{A_c^2}{4}m^2(t)\sin 2\Delta\phi + \frac{A_c}{4}m(t)[n_c(t)\cos\hat{\phi} + n_s(t)\sin\hat{\phi}]\sin\Delta\phi \\
&\quad + \frac{A_c}{4}m(t)[n_c(t)\sin\hat{\phi} - n_s(t)\cos\hat{\phi}]\cos\Delta\phi \\
&\quad + \frac{1}{4}[n_c(t)\cos\hat{\phi} + n_s(t)\sin\hat{\phi}][n_c(t)\sin\hat{\phi} - n_s(t)\cos\hat{\phi}]
\end{aligned}
$$

误差信号经环路滤波器过滤，作为驱动 VCO 的控制电压信号。

进入滤波器的误差信号包含目标项 $(A_c^2 m^2(t)/4)\sin 2\Delta\phi$，还有信号与噪声、噪声与噪声的乘积项。这些噪声项类似于平方法 PLL 的输入噪声项。实际上，如果 Costas 环的环路滤波出现器与平方环路中的相同，两个环路等价。在此条件下，两个环路具有相同的相位误差和性能。

438

总之，要实现 DSB-SC AM 信号的相位相干解调，可以采用平方 PLL 和 Costas PLL 两种实际可行的方法进行载波相位估计。

8.8.3 PAM 的载波相位估计

在 8.5.3 节对载波调制 PAM 信号解调的描述中，假设基信号 $\psi(t)$ 与接收信号 $r(t)$ 中的信号分量在时间和载波相位上精确同步，如图 8-72 所示。但是实

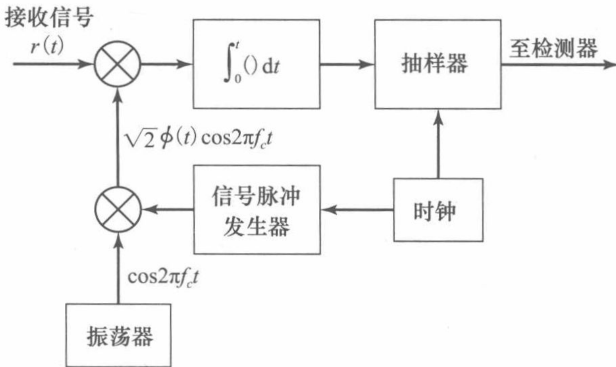


图 8-72 带通数字 PAM 信号的理想解调

际上这些理想条件不成立。首先，信道中传输信号所经历的传播时延，会导致接收信号的载波相位偏移。第二，接收机产生载波信号 $\cos 2\pi f_c t$，通常不能与发送端的振荡器锁定相位。因此，如图 8-72 所示的带通 PAM 信号的解调，是理想的，但不实际。在实际系统中，接收机有必要产生一个相位相干的载波，以实现接收信号的解调。这一点可以采用 PLL 或者 Costas 环实现。

采用 PLL 估计载波相位的接收机功能框图如图 8-73 所示。

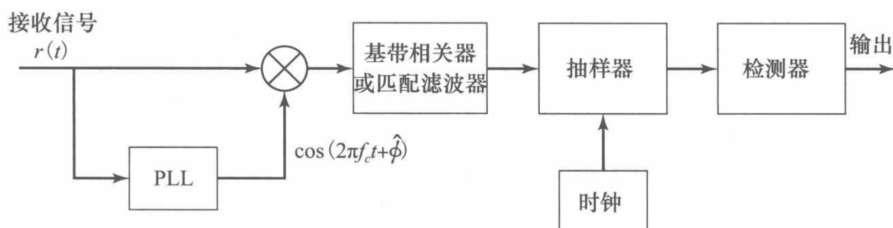


图 8-73　采用 PLL 获取载波相位的载波幅度调制信号的解调

439

如图 8-73 所示为基带相关或匹配滤波的替代方案，互相关或匹配滤波可以在基带实现，也可以在某些适当的中频实现。特别是，可以采用带通相关器，将接收信号 $r(t)$ 与幅度已调载波 $\sqrt{2}\psi(t)\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi})$ 相乘，其中 $\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi})$ 是 PLL 的输出。乘积信号在信号间隔内积分，在 $t=T$ 时刻对积分器输出抽样，抽样值送入检测器。如果使用匹配滤波器替代相关器，滤波器冲激响应为 $\psi(T-t)\cos[2\pi f_c(T-t)+\hat{\phi}]$。这些解调器的功能框图见图 8-74。

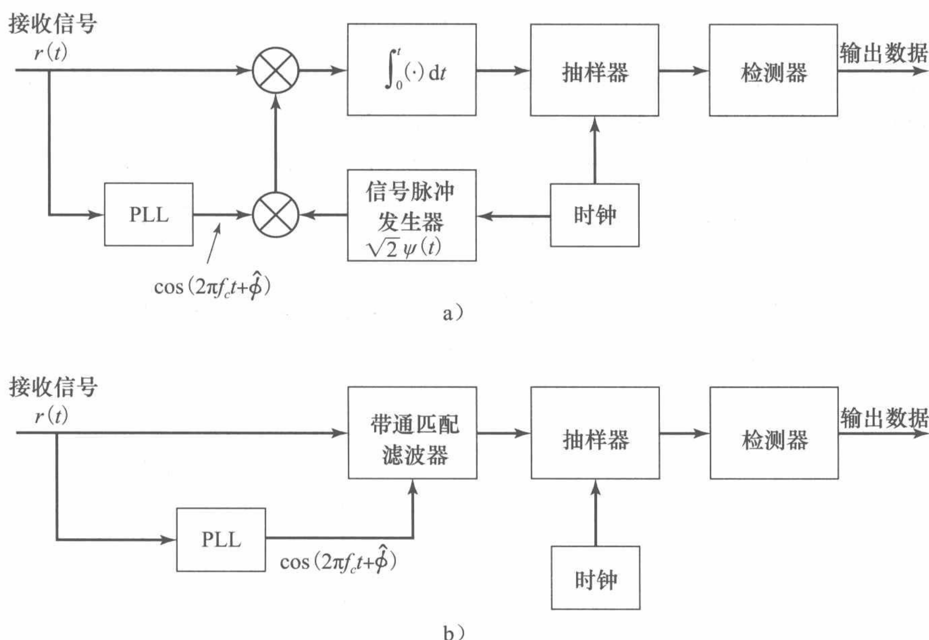


图 8-74　利用 a)相关器和 b)匹配滤波器的数字 PAM 信号的带通解调

8.8.4　PSK 的载波相位估计

如前所述，任何载波调制系统中，发送端和接收端所用的振荡器都不是相位锁定的。因此，PSK 接收信号可以表示为

$$r(t)=A_{mc}g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)-A_{ms}g_T(t)\sin(2\pi f_c t+\phi)+n(t) \quad (8.8.29)$$

440

其中 ϕ 是载波相位偏移。在接收端必须估计这个相位偏移值，而接收信号解调中必须利用

这个值。因此，必须接收信号与以下两个正交基信号必须是相关的

$$\psi_1(t)=\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi})$$
$$\psi_2(t)=-\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\sin(2\pi f_c t+\hat{\phi}) \tag{8.8.30}$$

其中$\hat{\phi}$是 PLL 所得载波相位的估计，如图 8-75 所示。当 $g_T(t)$为矩形脉冲时，信号脉冲发生器可以省略。

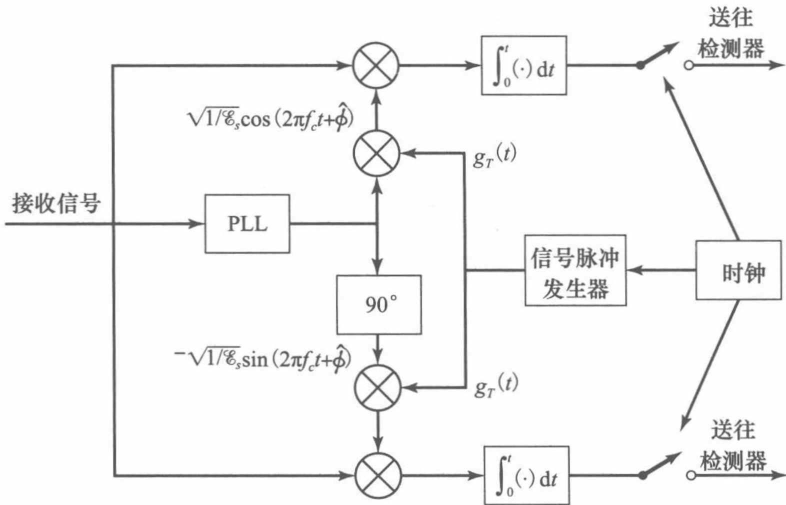


图 8-75　M 进制相位调制信号的解调器

当数字信息通过载波 M 相位调制发送时，PLL 可以用于估计载波相位偏移。对于 $M=2$，可以直接运用 8.8.1 节和 8.8.2 节描述的平方 PLL 与 Costas 环。

对于 $M>2$，如图 8-76 所示，可以首先将接收信号升至 M 次幂。接收信号形式如下

$$r(t)=s_m(t)+n(t)=g_T(t)\cos\left(2\pi f_c t+\phi+\frac{2\pi m}{M}\right)+n(t) \tag{8.8.31}$$

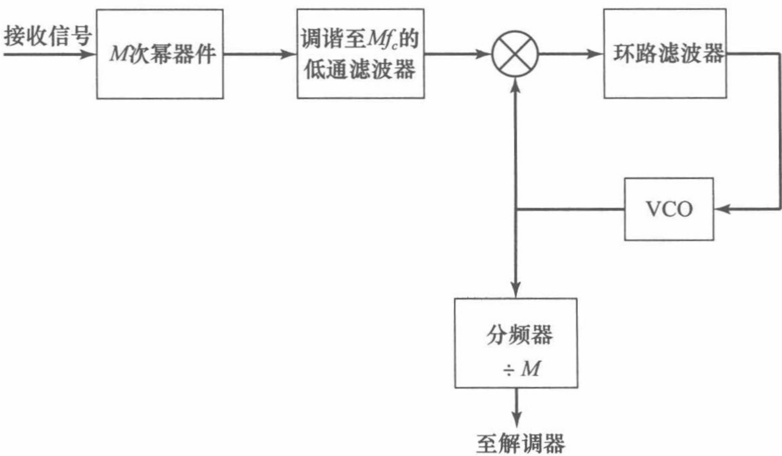


图 8-76　M 进制 PSK 信号的载波相位估计

$r(t)$通过 M 次幂器件，输出信号包含载波 f_c 的谐波。期望选择用以驱动 PLL 的谐波是 $\cos(2\pi M f_c t+M\phi)$。可以发现

441

$$M\left(\frac{2\pi m}{M}\right)=2\pi m=0(\mathrm{mod}\ 2\pi),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{8.8.32}$$

因此，从第 M 个谐波起就不包含待传送的信息。调谐至 Mf_c 的带通滤波器产生理想频率

分量 $\cos(2\pi Mf_c t+M\hat{\phi})$，用于驱动 PLL。VCO 的输出是 $\sin(2\pi Mf_c t+M\hat{\phi})$，这个输出被 M 分频后产生信号 $\sin(2\pi f_c t+M\hat{\phi})$，经$\pi/2$相移可得 $\cos(2\pi f_c t+M\hat{\phi})$。然后可将两个正交载波分量送往解调器。

应该注意到按上述方法产生的正交相位载波分量，因载波相位被乘以 M，具有$2\pi/M$倍数的模糊性。由于 $M\phi(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ 小于 2π，余下的角度除以 M 得到的相位估计值 $|\hat{\phi}|<2\pi/M$。不过，真实的载波相位可能超过这个估计值，为$2\pi/M$的倍数，即$2\pi k/M$，$k=1, 2, \cdots, M-1$。这样的相位模糊性可以通过发送端的数据差分编码和检测器的差分译码而克服，如 8.6.4 节所述。

与平方 PLL 的情况相似，第 M 次幂 PLL 运行在有噪条件下，噪声被 M 次幂律器件增强。加性噪声导致的 PLL 相位误差的方差可以简单地表示为

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2=\frac{1}{S_{ML}\rho_L} \tag{8.8.33}$$

其中 ρ_L 是环路 SNR，S_{ML} 是 M 相位功率损耗。$M=4$ 和 $M=8$ 时的 S_{ML} 已由 Lindsey 和 Simon(1973)进行了评估。

另一种从 M 进制相位调制的接收信号中抽取载波相位$\hat{\phi}$的估计方法是判决反馈 PLL (DFPLL)，如图 8-77 所示。采用式(8.8.30)给出的两个载波相位锁定的接收信号在抽样时刻产生 $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$。检测器计算出相位估计值$\hat{\theta}=\tan^{-1}y_2/y_1$，并且量化到 M 个可能的发送相位中最接近的一个，记为$\hat{\theta}_m$。正交乘法器的两个输出延迟一个符号间隔，并且乘以 $\cos\hat{\theta}_m$ 和 $-\sin\hat{\theta}_m$，这样可以得到 442

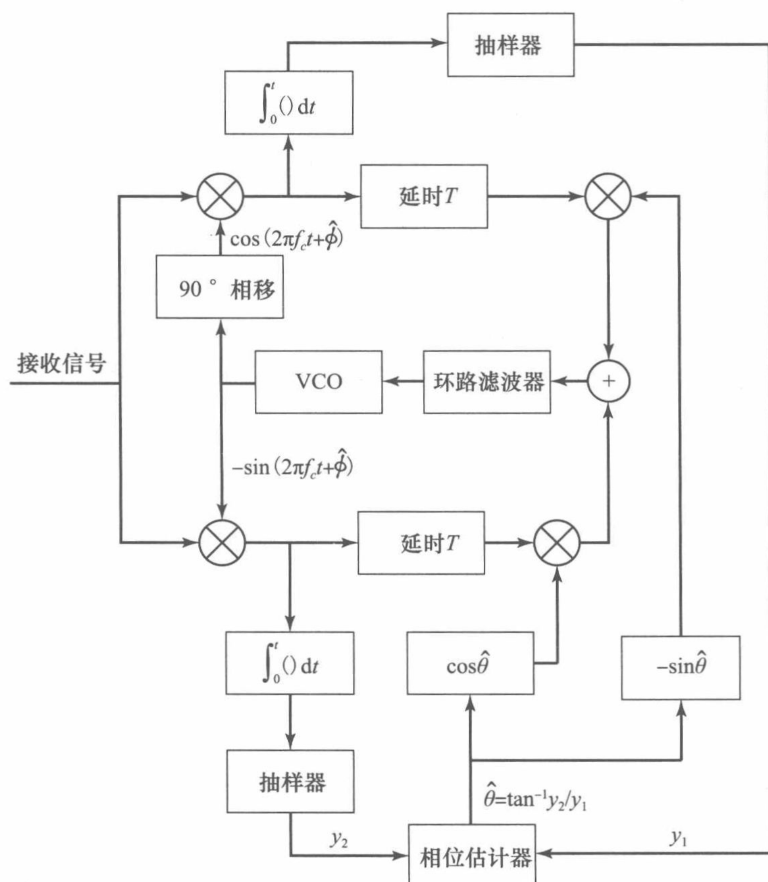


图 8-77　采用判决反馈 PLL 的 M 进制 PSK 的载波恢复

$$-r(t)\cos(2\pi f_c t+\hat{\phi})\sin\theta_m=-\frac{1}{2}[g_T(t)\cos\theta_m+n_c(t)]\sin\theta_m\cos(\phi-\hat{\phi})$$

443

$$+\frac{1}{2}[g_T(t)\sin\theta_m+n_s(t)]\sin\theta_m\sin(\phi-\hat{\phi})+\text{倍频项}$$

其中假设$\hat{\theta}_m=\theta_m$，并且

$$-r(t)\sin(2\pi f_c t+\hat{\phi})\cos\theta_m=-\frac{1}{2}[g_T(t)\cos\theta_m+n_c(t)]\cos\theta_m\sin(\phi-\hat{\phi})$$

$$+\frac{1}{2}[g_T(t)\sin\theta_m+n_s(t)]\cos\theta_m\cos(\phi-\hat{\phi})+\text{倍频项}$$

这两个信号相加产生误差信号

$$e(t)=-\frac{1}{2}g_T(t)\sin(\phi-\hat{\phi})-\frac{1}{2}n_c(t)\sin(\phi-\hat{\phi}-\theta_m)$$

$$-\frac{1}{2}n_c(t)\cos(\phi-\hat{\phi}-\theta_m)+\text{倍频项} \tag{8.8.34}$$

这个误差信号是环路滤波器的输入，能够提供 VCO 的控制信号。

可以看到式(8.8.34)的两个正交的噪声项作为加性噪声出现，但是没有 M 次幂器件输出中的噪声乘积。因此，DFPLL 接收信号的非线性运算不会产生功率损耗。M 相位判决反馈跟踪环路具有$2\pi/M$相位模糊性，有必要在发送信号前，对信息序列进行差分编码，并在检测器对接收序列进行差分译码来恢复信息。

8.8.5 QAM 的载波相位估计

与 PAM 和 PSK 的情况一样，QAM 信号的解调需要与接收信号的相位锁定的载波。QAM 的载波相位估计有很多不同的方法实现，可以根据信号点星座图和不同信号点相位关系而定。

例如，8 点 QAM 信号星座图如图 8-56b 所示。星座图的信号点具有 2 种不同的幅度电平值，8 种不同相位。相位间隔 45°。由于这种相位对称性，可以采用 8 次幂器件产生 $8f_c$ 的载波分量输出作为 PLL 的驱动信号，其中 f_c 是载频。如图 8-76 所示的方法可以用于任意 QAM 信号星座图，其信号点的相位是某相位 θ 的倍数，即对某个整数 L，有$L\theta=360°$。

从收到的 M 进制 QAM 信号中抽取载波相位估计值的方法就是 8.8.4 节描述的 DFPLL。DFPLL 的基本思想是，估计每个信号间隔中的 QAM 信号相位，并且从载波中消除相位调制。DFPLL 可以用于任何 QAM 信号，无论信号点相位关系如何。具体地说，接收信号可以表示为

444

$$r(t)=A_m g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\theta_n+\phi)+n(t) \tag{8.8.35}$$

其中 θ_n 是信号点的相位，ϕ 是载波相位。信号是通过 $r(t)$ 与 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 的互相关解调的，如式(8.7.4)所示。相关器输出的抽样值

$$y_1(t)=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos(\theta_n+\phi-\hat{\phi})+n_c\cos(\theta_n+\phi-\hat{\phi})-n_s(t)\sin(\theta_n+\phi-\hat{\phi})$$

$$y_2(t)=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin(\theta_n+\phi-\hat{\phi})+n_c\sin(\theta_n+\phi-\hat{\phi})-n_s(t)\cos(\theta_n+\phi-\hat{\phi}) \tag{8.8.36}$$

假设基于 y_1 和 y_2 的检测器进行了正确判决，将 y_1 与 $-\sin\theta_n$ 相乘，y_2 与 $\cos\theta_n$ 相乘，可以得到

$$-y_1\sin\theta_n=-A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos(\theta_n+\phi-\hat{\phi})\sin\theta_n+\text{噪声分量}$$

$$=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}[-\sin\theta_n\cos\theta_n\cos(\phi-\hat{\phi})+\sin^2\theta_n\sin(\phi-\hat{\phi})]+\text{噪声分量}$$

$$y_2\cos\theta_n=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin(\theta_n+\phi-\hat{\phi})\cos\theta_n+\text{噪声分量}$$

445

$$=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}[\sin\theta_n\cos\theta_n\cos(\phi-\hat{\phi})+\cos^2\theta_n\sin(\phi-\hat{\phi})]+\text{噪声分量} \tag{8.8.37}$$

加上这两项，可以得到误差信号 $e(T)$ 为

$$e(T)=y_2\cos\theta_n-y_1\sin\theta_n$$
$$=A_m\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin(\phi-\hat{\phi})+\text{噪声分量} \tag{8.8.38}$$

这个误差信号通过环路滤波器驱动 VCO。这样，仅用 QAM 信号的相位 θ_n 即可得到载波相位的估计。因此，DFPLL 的通用框图，如图 8-77 所示，也适用于 M 进制 QAM 信号的载波相位估计。采用 DFPLL 或者上述 PLL，QAM 信号的解调和检测如图 8-78 所示。

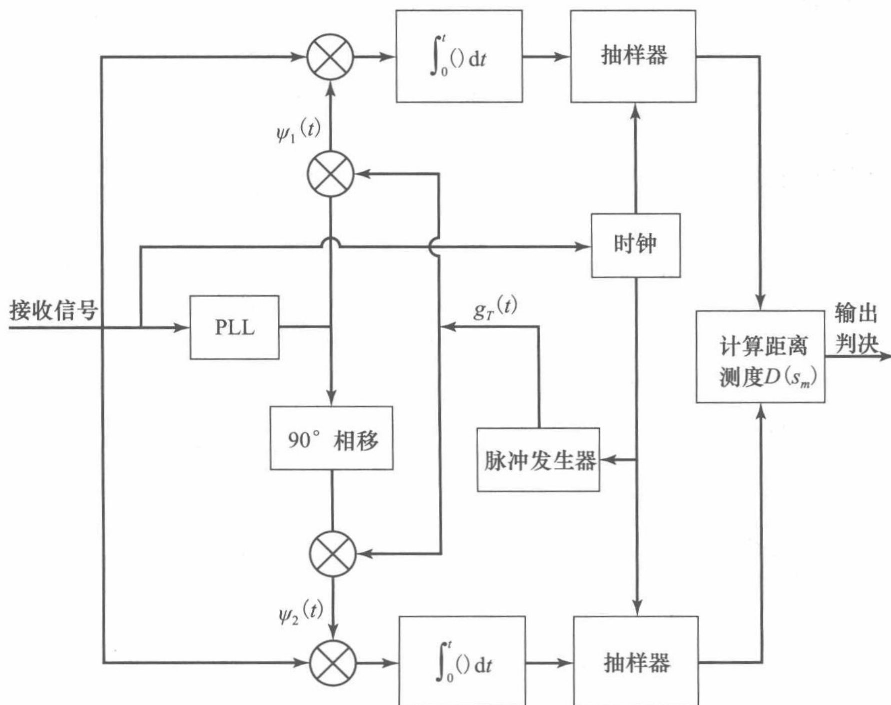


图 8-78　QAM 信号的解调与检测

使用这种数字相位调制，载波恢复相位时产生的相位模糊性，可以通过对调制器的输入序列进行差分编码解决。

8.9　符号同步

在通信系统中，接收滤波器的输出 $y(t)$ 必须按照符号速率在抽样时刻 $t_m=mT+\tau_0$ 进行周期抽样，其中 T 为符号间隔，τ_0 是标称时延，且取决于从发送端到接收端的信号传播时间。要实现这个周期抽样，需要接收机提供时钟信号。接收机提取时钟信号的过程通常称为符号同步或定时恢复。

定时恢复是同步数字通信系统接收机最关键的功能。应该注意到接收机不仅需要知道匹配滤波器或者相关器的输出抽样频率($1/T$)，而且还需要知道在每个间隔中什么位置抽样。在时长为 T 的符号间隔中抽样时刻的选择就称为定时相位。

最好的定时对应在符号间隔中接收机滤波器的信号输出达到最大值的时刻。在实际的通信系统中，接收机时钟必须按照频率($1/T$)和定时相位 τ_0 连续调整，以补偿发送端振荡器与接收机时钟之间的频率漂移，优化匹配滤波器或者相关器输出的抽样时刻。

符号同步可以按几种方式实现。在某些通信系统中，发送机与接收机时钟同步到一个主时钟上，提供一个精确的定时信号。在这种情况下，接收机必须估计和补偿发送信号与接收信号之间的相对时延。主无线电台发出精确时钟信号的无线通信系统也是采用这种方式。

达到符号同步的另一种方法是，在发送机发送信息信号的同时，同步发送频率$1/T$或者$1/T$倍数的时钟信号。接收机可以简单地利用窄带滤波器调谐到发送时钟频率，这样就可以抽取到用于抽样的时钟信号。这种方法容易实现，但是也有一些缺点。一是发送机必须分配一定的可用功率用于时钟信号的传输，二是必须占用一定的信道带宽发送时钟信号。虽然有这些缺点，但此方法在电话传输系统中仍然很常用。因为电话系统采用大带宽向多用户发送信号，这种情况下，发送的时钟信号可以在多用户的信号解调中共享。因此，通过这种时钟信号的共享，随着用户数量的增加，发送功率和发送带宽也成比例地降低。

446

时钟信号也可以从接收的数据信号中抽取。有大量的方法可以在接收机实现自同步。下面讨论从接收信号中实现符号同步的 4 种方法。

8.9.1 早迟门同步器

接收机产生符号定时信号的其中一种方法利用了匹配滤波器或相关器输出信号的对称性。为了描述这种方法，考虑矩形脉冲 $s(t)(0\leqslant t<T)$，如图 8-79a 所示。匹配 $s(t)$的滤波器的输出在 $t=T$ 达到最大值，如图 8-79b 所示。因此，匹配滤波器输出是脉冲 $s(t)$的时间自相关函数。当然，这一点对于任意脉冲波形成立，因此我们描述的方法也适用于信号脉冲。显然，对匹配滤波器输出的适当抽样时间是输出达到最大值的时间 $t=T$，即相关函数达到峰值的时间。

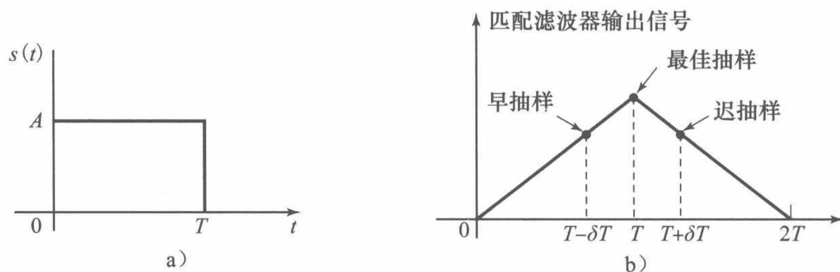


图 8-79 矩形信号脉冲 a)及其匹配滤波器输出 b)

有噪声的情况下，信号的识别通常是困难的。假设抽样时间或早(在 $t=T-\delta T$)或迟(在 $t=T+\delta T$)，没有对应峰值时间。早抽样 $y[m(T-\delta T)]$和迟抽样 $y[m(T+\delta T)]$的绝对值(有噪声时在平均意义上)比峰值样值$|y(mT)|$小。由于自相关函数相对于最佳抽样时间 $t=T$ 是偶函数，自相关函数在 $t=T-\delta T$ 和 $t=T+\delta T$ 的取值相等。在此条件下，合适的抽样时间在 $t=T-\delta T$ 与 $t=T+\delta T$ 的中点。此条件构成早迟门符号同步器的基础。

447

图 8-80 给出了早迟门符号同步器的框图。图中用相关器取代了等价的匹配滤波器。两个相关器在符号间隔 T 上积分，但是一个相关器的积分开始时间相对最佳抽样时间提前 δT，另一个相关器的积分开始时间相对最佳抽样时间滞后 δT。这两个相关器输出的差值称为误差信号。为了平滑噪声信号的干扰，将误差信号送入一个低通滤波器。如果定时偏离最佳抽样时间，低通滤波器输出的平均误差信号为非零，时钟信号根据误差极性滞后或提前。平滑的误差信号可以用来驱动压控振荡器，输出理想的时钟信号用于抽样。VCO 的输出可用作符号波形发生器的时钟信号，符号波形发生器输出与环路滤波器相同的基本脉冲波形。将脉冲波形提前或滞后，然后送至两个相关器，如图 8-80 所示。注意，如果信号脉冲是矩形的，就不必在跟踪环路中采用信号脉冲发生器。

可以看到，早迟门同步器基本上就是一个闭环控制系统，其带宽比符号速率$1/T$窄很多。环路带宽决定了定时估计质量。窄带环路对加性噪声的平均作用更强，因此可以提高抽样时刻的估计质量。但要求的条件是信道传播时延为常数，发送端的时钟振荡器不随时

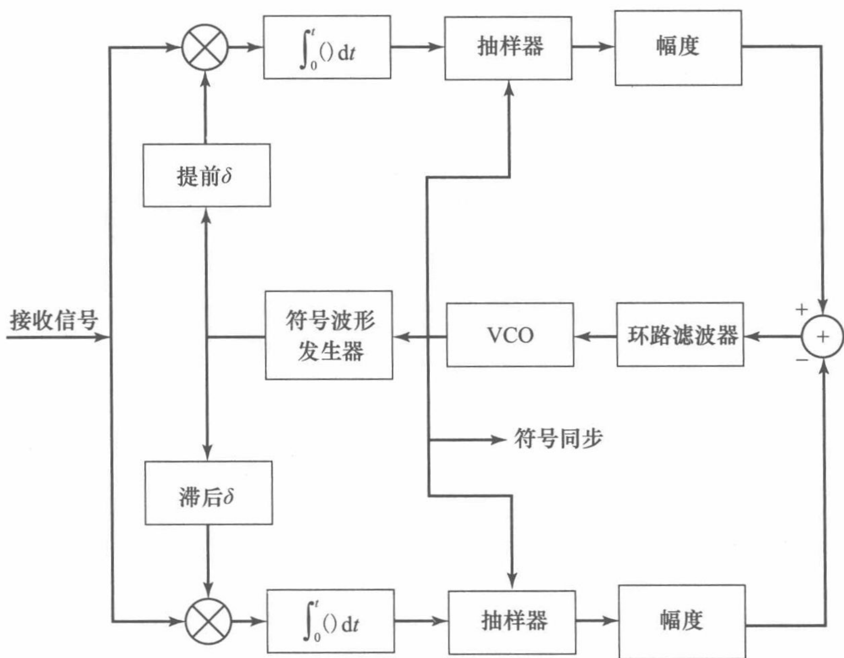


图 8-80　早迟门同步器框图

间漂移(或随时间缓慢漂移)。如果信道传播时延随时间变化，或者发送端时钟随时间漂移，就必须提高环路带宽，以迅速地跟踪符号定时。这样会导致环路噪声增大，定时估计质量下降。

在跟踪模式下，两个相关器受到邻近符号的影响。如果信息符号序列均值为零，例如 PAM 和一些其他信号调制的情况，那么相邻符号的相关器输出在低通滤波器中的均值为零，影响相互抵消。

早迟门同步器的等效实现比图 8-81 中给出的方法更简单。这种情况中，VCO 输出的时钟提前或滞后 δT，这些时钟用于两个相关器的抽样。

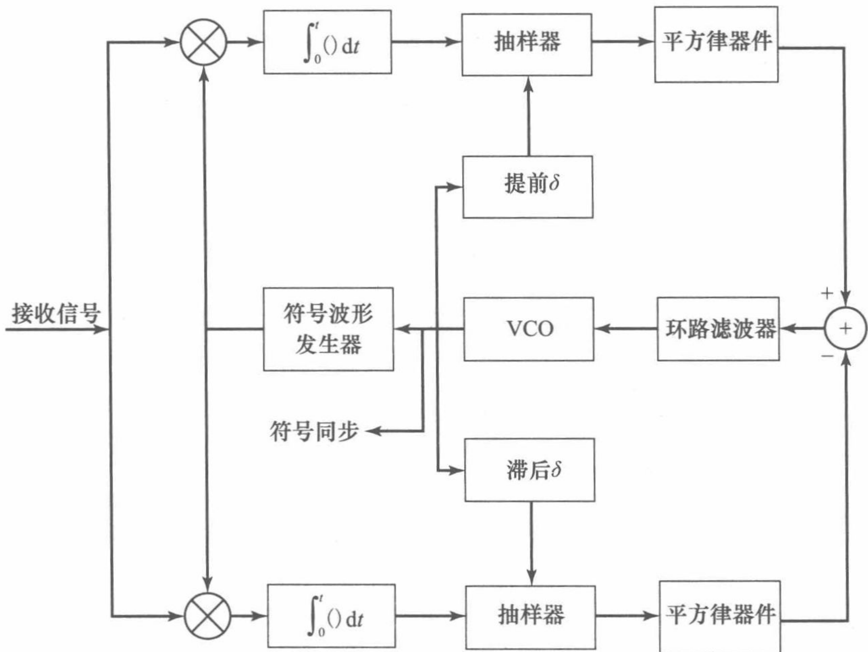


图 8-81　另一种形式的早迟门同步器框图

448
~
449

8.9.2 最小均方误差方法

从接收信号中实现定时恢复的另一种方法是，基于对接收机输出抽样值与实际发送符号之间的最小均方误差(MSE)的最小化。假设发送机的基带信号形式如下

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g_T(t-nT) \tag{8.9.1}$$

其中$\{a_n\}$为数据序列，T为符号间隔。具体地，假设$v(t)$为PAM基带信号，数据序列$\{a_n\}$均值为零的独立同分布元素构成的平稳序列。则信号$v(t)$均值也为零，即$E(v(t))=0$。而且，$v(t)$的自相关函数是以T为周期的，因此，$v(t)$是周期平稳过程。

接收机的匹配滤波器输出的接收信号可以表示为

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x(t-nT-\tau_0)+w(t) \tag{8.9.2}$$

其中$x(t)=g_T(t)*g_R(t)$，星号表示卷积，$g_R(t)$是接收机滤波器的冲激响应，$w(t)$表示接收滤波器输出的噪声，$\tau_0(\tau_0<T)$表示定时相位。

第m个符号间隔中接收机输出与实际发送符号的MSE可以表示为

$$\text{MSE}=E[y_m(\tau_0)-a_m]^2 \tag{8.9.3}$$

其中

$$y_m(\tau_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x(mT-nT-\tau_0)+w(mT) \tag{8.9.4}$$

由于接收机不能提前知道实际发送符号a_m，可以用检测器的输出$\hat{a}_m$作为第m个符号的估计值。因此可以在MSE表达式中将a_m替换为$\hat{a}_m$。MSE可以重定义为

$$\text{MSE}=E[y_m(\tau_0)-\hat{a}_m]^2 \tag{8.9.5}$$

相对于定时相位τ_0的最小MSE，可以根据式(8.9.5)对τ_0的微分求得其必要条件

$$\sum_m[y_m(\tau_0)-\hat{a}_m]\frac{\mathrm{d}y_m(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0}=0 \tag{8.9.6}$$

式(8.9.6)的必要条件的一个解释是，最佳抽样时间对应误差信号$[y_m(\tau_0)-\hat{a}_m]$与导数$\mathrm{d}y_m(\tau_0)/\mathrm{d}\tau_0$无关。由于检测器输出用于差错信号$[y_m(\tau_0)-\hat{a}_m]$中，这个定时相位估计的方法称为判决引导。

450

图8-82给出基于式(8.9.6)条件的系统实现方法。注意求和运算是通过低通滤波器对

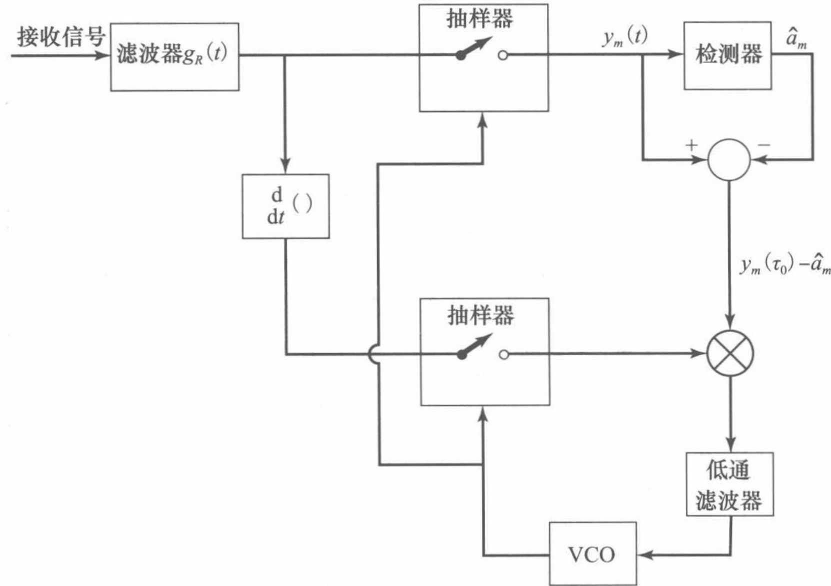


图8-82 基于MSE最小化的定时恢复

多个符号的平均实现的。平均时间与滤波器带宽的倒数基本相等。滤波器输出驱动压控振荡器，提供定时相位 τ_0 的最佳 MSE 估计。

8.9.3　最大似然方法

在 ML 方法中，最佳符号定时是通过最大化似然函数得到的，

$$\Lambda(\tau_0) = \sum_m a_m y_m(\tau_0) \tag{8.9.7}$$

其中 $y_m(\tau_0)$是式(8.9.4)给定的接收滤波器的抽样输出。从数学上可以说明似然函数正比于已知发送信号条件下的接收信号概率。物理上，$\Lambda(\tau_0)$是接收机的匹配滤波器或相关器的输出对多个符号平均的结果。

451

τ_0 作为 ML 估计的必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} = \sum_m a_m \frac{\mathrm{d}y_m(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} = 0 \tag{8.9.8}$$

这个结果说明跟踪环路实现可以如图 8-83 所示。可以发现检测器的输出$\hat{a}_m$ 与$\mathrm{d}y_m(\tau_0)/\mathrm{d}\tau_0$的乘积被低通滤波器平均，这个信号驱动 VCO。由于检测器输出用在估计方法中，估计值$\hat{\tau}_0$ 是判决引导的。

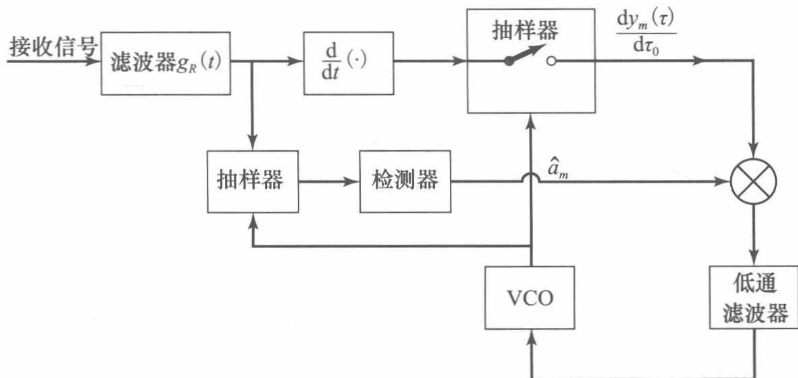


图 8-83　基带 PAM 的判决导向的 ML 定时恢复

替代检测器输出符号的另一种方法是不要求信息符号的先验知识的非判决引导方法。这种方法基于符号的统计平均。例如，对接收滤波器的输出取平方，并相对于 τ_0 取以下函数的最大值

$$\Lambda_2(\tau_0) = \sum_m y_m^2(\tau_0) \tag{8.9.9}$$

这样可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda_2(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} = 2\sum_m y_m(\tau_0)\frac{\mathrm{d}y_m(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} = 0 \tag{8.9.10}$$

式(8.9.10)给出的最佳 τ_0 的条件可以用图 8-84 所示的实现方法满足。在这个条件下，没有必要知道数据序列$\{a_m\}$。因此这个方法是非判决引导的。

8.9.4　谱线法

由于接收机滤波器输出的信号分量是以 T 为周期的，可以通过滤出 $f=1/T$的信号分量恢复频率$1/T$的时钟信号。但是由于 $E(a_n)=0$，可以发现 $E(y(t))=0$。因此，$y(t)$不能直接产生 $f=1/T$的频率分量。取而代之，可以对 $y(t)$进行非线性运算以产生 $f=1/T$及其谐波的功率。

452

考虑平方律的非线性。如果对式(8.9.2)给出的信号 $y(t)$取平方，相对于数据序列$\{a_n\}$取期望值，则可得

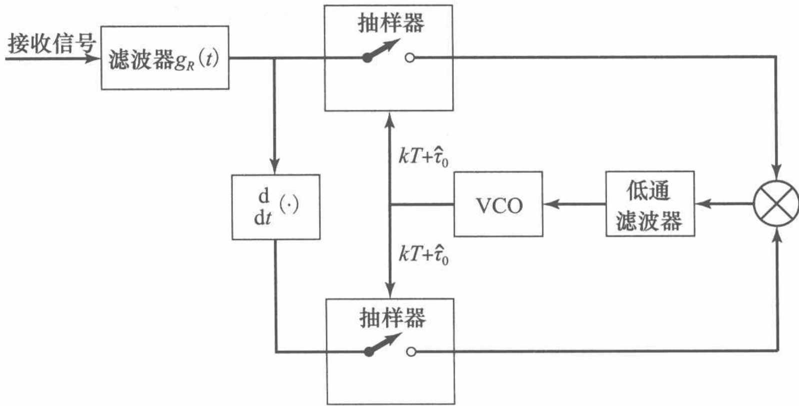


图 8-84 基带 PAM 的非判决导向的定时估计

$$E(y^2(t)) = E\left(\sum_n \sum_m a_n a_m x(t-mT-\tau_0)x(t-nT-\tau_0)\right) + \text{噪声项}$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(t-nT-\tau_0) + \text{噪声项} \tag{8.9.11}$$

其中 $\sigma_a^2 = E(a_n^2)$。由于 $E(y^2(t))>0$，可以用 $y^2(t)$产生理想的频率分量。

对信号分量利用泊松求和公式(见习题 2.56)以傅里叶级数的形式表示式(8.9.11)，有

$$\sigma_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(t-nT-\tau_0) = \frac{\sigma_a^2}{T}\sum_n c_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m(t-\tau_0)/T} \tag{8.9.12}$$

其中

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X\left(\frac{m}{T}-f\right)\mathrm{d}f \tag{8.9.13}$$

根据设计，假设发送信号频谱限于频率$1/T$以下，则对于 $f>1/T$，有 $X(f)=0$。相应地式(8.9.12)仅有 3 个非零项($m=0$，±1)。因此，信号分量的平方包含一个直流分量和一个频率为$1/T$的分量。

453

以上推导说明可以将接收机输出信号 $y(t)$取平方，再通过调谐至频率$1/T$的窄带滤波器 $B(f)$。如果取滤波器响应 $B(f)=1$，则有

$$\frac{\sigma_a^2}{T}\mathrm{Re}[c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(t-\tau_0)/T}] = \frac{\sigma_a^2}{T}c_1\cos\frac{2\pi}{T}(t-\tau_0) \tag{8.9.14}$$

那么，假设 $X(f)$为实数，定时信号就是一个相位为$-2\pi\tau_0/T$的正弦信号。可以利用定时信号的交替过零点作为正确抽样时刻的指示。不过式(8.6.14)给出的交替过零点出现在

$$\frac{2\pi}{T}(t-\tau_0) = (4k+1)\frac{\pi}{2} \tag{8.9.15}$$

或者等价于

$$t = kT+\tau_0+\frac{T}{4} \tag{8.9.16}$$

相对于理想过零点有$T/4$的时间偏置量。实际系统中，定时偏置量可以通过相对简单的时钟电路补偿，或通过频率为 $f=1/T$，相位偏移$\pi/2$的带通滤波器 $B(f)$来补偿。图 8-84给出了接收机产生定时信号的方法。

对信号造成干扰的加性噪声通常会引起理想信号过零点的波动。这种波动现象取决于式(8.9.14)给出的正弦定时信号均值幅度 c_1。而信号幅度 c_1 与过零点附近正弦信号的斜率成正比，如图 8-86 所示。因此，当幅度 c_1 较大时，斜率也较大，相应地由噪声引起的定时误差较小。根据式(8.9.13)，可以发现 c_1 取决于 $X(f)$与 $X(1/T-f)$的频谱

交叠程度。这就是说 c_1 取决于 $X(f)$超出(奈奎斯特)带宽$1/2T$的部分。换言之，c_1 取决于信号的超额带宽，即信号 $X(f)$的频带超出 $f=1/2T$的部分。如果超额带宽为零，即对于$|f|>1/2T$，有 $X(f)=0$，则 $c_1=0$。这种情况下，该方法不能提供定时信号。如果超额带宽较大，例如$\alpha/2T$，$\alpha=1/2$或 1，定时信号幅度足够大，能够产生相对精确的符号定时估计。 454

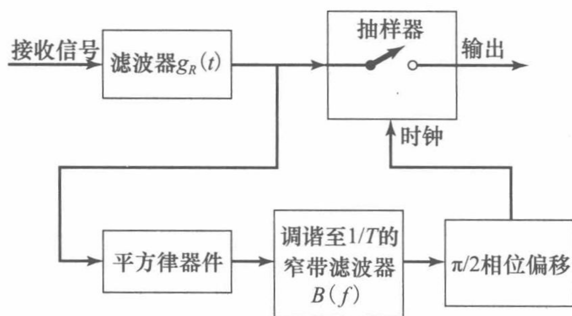


图 8-85　基于谱线法的符号定时

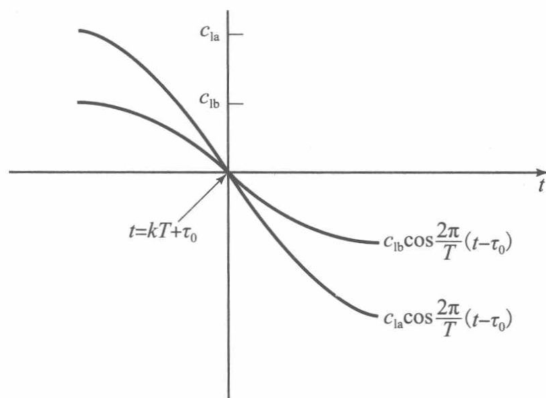


图 8-86　过零点附近正弦信号斜率与幅度的函数关系示意图

8.9.5　载波调制信号的符号同步

上述基带信号的符号定时同步方法也适用于带通信号。因为任意载波调制信号可以利用简单的频率搬移变换成基带信号，接收信号在频率搬移到基带后可以从中恢复出符号定时。

对于 QAM 信号，已经证明 8.9.4 节描述的谱线法特别适合定时恢复。图 8-87 给出了谱线法的示意图，首先过滤出频率$1/2T$的信号分量，再将滤波器输出信号取平方，最后生成理想的符号速率$1/T$的正弦信号。由于 QAM 信号的解调方法如前所述[将输入信号与两个正交载波信号 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$分别相乘]，以两个相关器输出的同相和正交分量作为两个调谐至频率$1/2T$的滤波器的输入信号。这两个滤波器的输出取平方(整流)后，求和，再经调谐至时钟频率$1/T$的窄带滤波器过滤。这样生成的正弦信号，作为相关器输出抽样的时钟信号用于恢复信息。

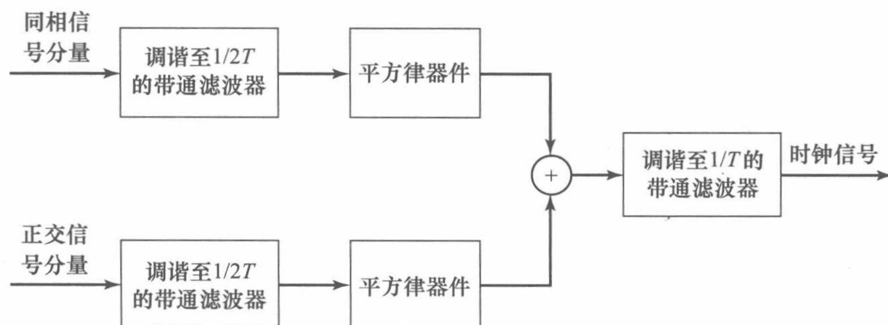


图 8-87　QAM 定时恢复方法框图　455

在很多现代通信系统中，按照奈奎斯特速率或更快的速率对接收信号抽样后，进行数字处理(解调)。这种情况下，对信号样值运用信号处理方法，可以恢复符号定时和载波相位。因此，用于载波恢复的 PLL 可以通过数字 PLL 实现。同样，上一节描述的时钟恢复环路也可以用数字环路实现。基于抽样信号实现的定时恢复方法的文献见 8.11 节。

8.10　再生中继器

6.4.4节中介绍的模拟中继器，通常用于在电话有线信道和微波视距信道中放大信号电平，以抵消信道传输中信号衰耗的影响。这一节介绍数字传输系统中使用的再生中继器。

每个再生中继器的前端包括一个解调器/检测器，对前面的中继器发出的数字信息序列进行解调/检测，然后将检测出来的序列送入中继器的发送端，映射为信号波形，发往下一个中继器。这类中继器称为再生中继器。

由于每个中继器生成无噪信号，因此加性噪声不累积。但是一个中继器的检测器发生的差错，会在信道中继续传播到后续的中继器。下面来评估误差对整个系统性能的影响。假设调制是二进制PAM，那么每跳(信号从一个中继器传输到下一个中继器)的比特差错概率为

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$

由于差错发生概率低，在K个中继器的信道中，多于1比特的差错概率可以忽略。相应地，在信道中差错数量随着信道中再生中继器的数量线性增长，因此总的差错概率可以近似为

456

$$P_2 \approx KQ\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{8.10.1}$$

相反，在信道中采用K个模拟中继器，接收SNR可以降低K倍，比特差错概率为

$$P_2 \approx Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{KN_0}}\right) \tag{8.10.2}$$

显然，要达到同样的差错概率性能，相比模拟中继器，采用再生中继器能够显著降低发送功率。因此，在数字通信系统中，再生中继器更可取。不过，在传输数字和模拟信号的有线电话信道中，通常采用模拟中继器。

例8.10.1　一个二进制数字通信系统在长度为1000公里的有线信道上传输数据。每10公里设置一个中继器补偿信道衰耗。求要达到10^{-5}的比特差错概率，在下列条件下需要的$\mathscr{E}_b/N_0$，(a)采用模拟中继器，(b)采用再生中继器。

解：系统中使用的中继器数量是$K=100$。如果采用再生中继器，可以根据式(8.10.1)得到

$$10^{-5} \approx 100Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$

$$10^{-7} \approx Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$

则可以求出$\mathscr{E}_b/N_0$为11.3dB。如果采用模拟中继器，根据式(8.10.2)可以得到

$$10^{-5} \approx Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{100N_0}}\right)$$

则可以求出$\mathscr{E}_b/N_0$为29.6dB。因此可以看到需要的SNR相差18.3dB，即需要的发送功率约为数字通信系统发送功率的70倍。◀

8.11　小结及深入阅读

本章介绍了在物理通信信道中传输数字信息的基本数字调制方法，对于干扰传输信号的加性噪声采用加性高斯白噪声(AWGN)模型。首先推导了将数字信号转化为矢量的几何表示，为传输数字信号提供了一种简洁的信号表示方法，简化了性能分析。

矢量表示可以根据维度对不同信号进行分类。其中，表示为一维矢量(标量)的信号包括二进制对极信号(二进制PAM)和M进制(非二进制)脉冲幅度调制(M进制PAM)。这

457

些一维信号可以在基带信道上传输，或者将数字信号调制到载波上在带通信道上传输。

还有几何表示为二维矢量的数字信号。例如二进制 PPM、二进制 FSK、PSK、DPSK 及 QAM。二进制 PPM 适于在基带信道中传输，将 PPM 信号对载波频率进行幅度调制，得到的信号可以在带通信道中传输。另外，二进制 FSK、PSK、DPSK 和 QAM 是带通信号，因此适于在带通信道中传输。

本章的重点是分析接收机所进行的信号处理，接收机是在有噪声存在的条件下尽可能可靠地恢复数字信息。接收机的功能分为两个部分，解调器和检测器。解调器可以用相关器或者匹配滤波器实现。对解调器的输出按照比特率(对于二进制信号)抽样，或者按照符号速率(对于 M 进制信号)抽样，然后送入检测器，由检测器确定哪个是最可能的发送信号。检测器使用的最佳检测规则是基于最大后验概率(MAP)准则或最大似然(ML)准则，这取决于传输的数字信号是等先验概率或不等先验概率。基于最佳检测器的实现，分析了 PAM、PSK、DPSK、QAM 和二进制 FSK 等不同信号类型的差错概率。

在 PAM、PSK 和 QAM 等载波调制信号的传输中，需要估计接收信号的载波相位，从而实现相位相干解调，恢复发送信息。本章讨论了从接收的 PAM、PSK 和 QAM 信号中估计载波相位的方法，8.8.1 节描述了锁相环 PLL 的基本实现方法和工作特性。

本章还讨论了从接收信号中抽取定时信号这一重要问题，这个定时信号用于按照符号速率对解调器输出周期性地抽样。

将数字信号表示为矢量的几何表示方法是由 Kotelnikov(1947)和 Shannon(1948a，1948b)(两篇经典论文)提出的。Wozencraft 和 Jacobs(1965)推广了这种方法。现在这种方法在信号分析与设计中广泛使用。

匹配滤波器是由 North(1943)提出的，他证明了匹配滤波器能够使 SNR 最大化。在香农的工作发表之后的 20 年间，人们对各种二进制和 M 进制调制信号在 AWGN 信道中的传输进行了分析。大多数的数字通信教材中都可以找到与本章内容相似的讨论。

关于定时同步，也有大量的著作和论文对此进行了讨论。Stiffler(1971)，Lindsey (1972)，Lindsey 和 Simon(1973)，Meyr 和 Ascheid(1990)，以及 Mengali 和 D'Andrea (1997)等著作都讨论了载波相位恢复和定时同步问题。Franks(1970)的论文对这个问题的介绍通俗易懂。

458

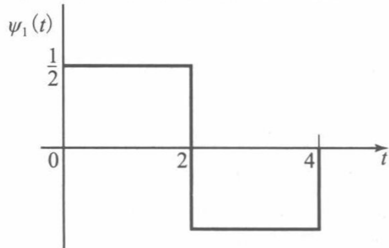
习题

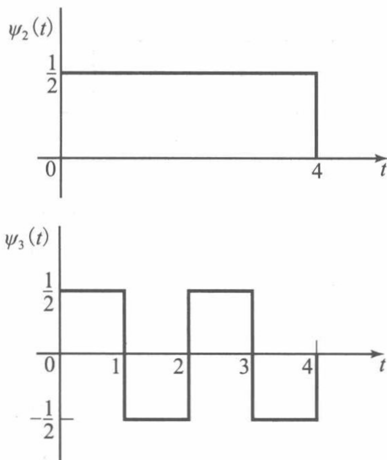
8.1　考虑如习题 8.1 图所示的 3 种波形。

1. 说明这些波形是正交的。
2. 若

$$x(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 3\\ -1, & 3\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$$

将波形 $x(t)$ 表示为 $\psi_n(t)$，$n=1, 2, 3$ 的加权线性组合，并且确定加权系数。





习题 8.1 图

8.2 将区间 $0\leqslant t\leqslant 4$ 中的函数

$$x(t)=\sin(\pi t/4)$$

近似表示为习题 8.1 图所示的正交波形函数的线性组合

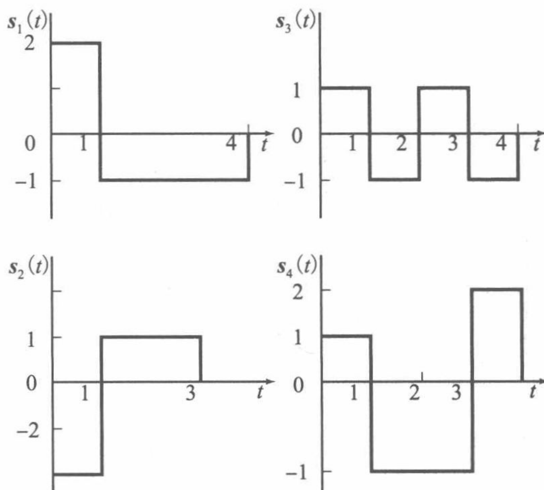
$$\hat{x}(t)=\sum_{n=1}^{3}c_n\psi_n(t)$$

1. 求最小均方近似误差的展开系数$\{c_n\}$
2. 求残余均方误差的最小值 $E_{\min}$。

$$E=\int_0^4[x(t)-\hat{x}(t)]^2\mathrm{d}t$$

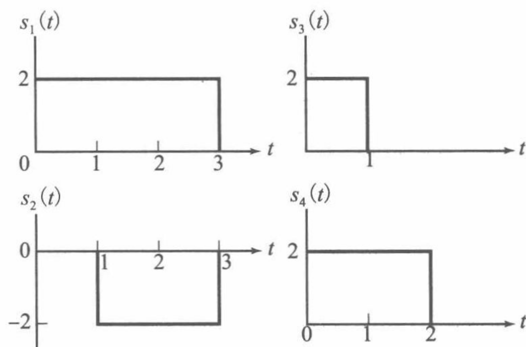
8.3 考虑习题 8.3 图中的 4 种波形

1. 求波形的维度及基信号集。
2. 采用基信号将 4 种波形表示为矢量 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\boldsymbol{s}_3$，$\boldsymbol{s}_4$。
3. 求任意一对矢量之间的最小距离。



习题 8.3 图

8.4 求习题 8.4 图中 4 个信号的正交函数集。可以通过观察确定。



习题 8.4 图

8.5 如果 $f_c=\dfrac{k}{2T_b}$，其中 k 为正整数，说明式(8.2.5)给出的信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$的能量均为$\mathscr{E}_b$。如果不满足 $f_c=\dfrac{k}{2T_b}$的条件，但是 $f_cT_b\gg 1$，那么信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$的能量均接近$\mathscr{E}_b$。注意由于矩形脉冲的时长为 T_b，$1/T_b$近似为带宽。因此，条件 $f_cT_b\gg 1$ 意味着载波频率 f_c 远远大于矩形基带脉冲的带宽，这个条件通常都是满足的。

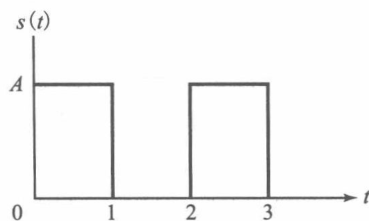
8.6 如果 $f_1=\dfrac{k_1}{2T_b}$，$f_2=\dfrac{k_2}{2T_b}$其中 k_1 和 k_2 为不同的正整数，说明式(8.2.15)给出的信号 $s_1(t)$和 $s_2(t)$能量均为$\mathscr{E}_b$ 且相互正交。并且说明如果上述条件不满足，但是 $f_1T_b\gg 1$ 且 $f_2T_b\gg 1$，那么信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的能量均接近$\mathscr{E}_b$ 且 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$的内积接近于零。注意由于矩形脉冲的时长为 T_b，$1/T_b$近似为带宽。因此，条件 $f_1T_b\gg 1$ 且 $f_2T_b\gg 1$，意味着载波频率 f_1 和 f_2 远远大于矩形基带脉冲的带宽，这个条件通常都是满足的。

8.7 采用对极信号的二进制通信系统中，接收信号为

$$r(t)=s(t)+n(t)$$

其中 $s(t)$如习题 8.7 图，$n(t)$为 AWGN，功率谱密度为$N_0/2$W/Hz。

1. 画出匹配 $s(t)$的滤波器的冲激响应示意图。
2. 画出对应输入信号 $s(t)$的匹配滤波器的输出波形。
3. 求 $t=3$ 时，匹配滤波器输出噪声的方差。
4. 求以 A 和 N_0 为变量的差错概率函数表达式。



习题 8.7 图

8.8 数字通信系统采用下列的 4 个等概率信号

$$s_1(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ -1, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$s_2(t)=\begin{cases}2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$s_3(t)=-s_1(t)$$

$$s_4(t)=\begin{cases}2, & 2\leqslant t\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1. 求表示上述信号的正交基信号集。
2. 画出表示这些信号的星座图。
3. 此信号集的维度是多少？
4. 利用这些信号的矢量表示，求该信号集的平均能量及平均比特能量 E_{bav}。

8.9 匹配滤波器具有以下频率响应

$$H(f)=\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

1. 求对应 $H(f)$ 的冲激响应 $h(t)$。
2. 求匹配这个滤波器特征的信号波形。

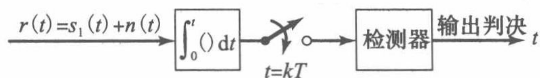
8.10　证明当一个 sinc 脉冲 $g_T(t)$ 通过匹配滤波器，输出为同样的 sinc 脉冲。

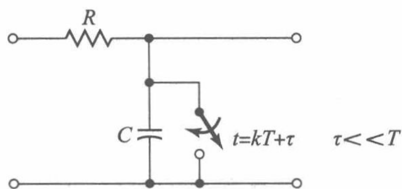
8.11　二进制对极信号

$$s_1(t)=-s_2(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\mathscr{E}_b}{T}}, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的解调可以用一个积分器实现，如习题 8.11 图所示，可以周期性地在 $t=kT$，$k=0$，±1，±2，…时刻抽样。加性噪声为零均值高斯噪声，功率谱密度为 $N_0/2$ W/Hz。

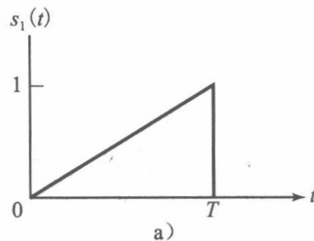
1. 求 $t=T$ 的解调器输出 SNR。
2. 如果理想积分器被习题 8.11 图所示的 RC 滤波器替代，求输出 SNR 与时间常数 RC 的关系。
3. 求使输出 SNR 最大化的 RC 值。



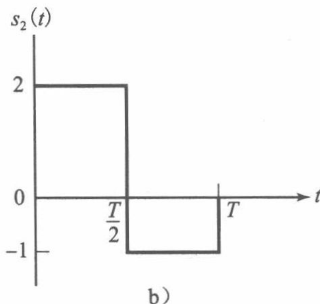


习题 8.11 图

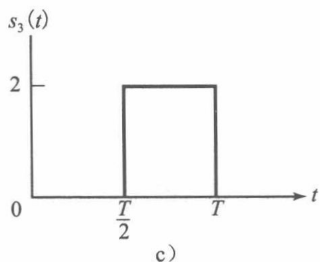
8.12　画出与习题 8.12 图所示脉冲相匹配的滤波器冲激响应，并且画出每个匹配滤波器的输出波形。



a)



b)



c)

习题 8.12 图

8.13　一个二进制 PAM 通信系统采用持续时间为 T_b 且幅度为 $\pm A$ 的矩形脉冲，以速率 $R=10^5$ bps 传输数字信息。如果加性高斯噪声的功率谱为 $N_0/2$，其中 $N_0=10^{-2}$ W/Hz，求保证差错概率 $P_2=10^{-6}$ 所需要的幅度值 A。

8.14　一个二进制 PAM 通信系统，其中两个信号发生概率不等（p 及 $1-p$），最佳检测器比较相关器的输出取值

$$y=\pm\sqrt{\mathscr{E}_b}+n$$

且阈值 α 由式(8.3.56)给定。检测器的差错概率如式(8.3.53)所示。

1. 若 $p=0.3$，$\mathscr{E}_b=1$ 且 $N_0=0.1$ 求阈值 $\alpha=\alpha*$。
2. 求 $\alpha=\alpha*$ 时的平均差错概率。

8.15　假设两个信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 在时间间隔 $(0,T)$ 上相互正交。零均值高斯噪声过程的样本函数 $n(t)$ 与 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相关为

$$n_1=\int_0^T s_1(t)n(t)\mathrm{d}t$$

$$n_2=\int_0^T s_2(t)n(t)\mathrm{d}t$$

证明 $E(n_1n_2)=0$。

8.16　二进制 PAM 通信系统用于在 AWGN 信道中传输数据。比特先验概率为 $P(a_m=1)=1/3$ 和 $P(a_m=-1)=2/3$。

1. 求检测器的最佳阈值。
2. 求平均差错概率。
3. 计算当 $\mathscr{E}_b=1$ 且 $N_0=0.1$ 时的平均差错概率。

8.17　在二进制对极信号方案中，信号为

$$s_1(t)=-s_2(t)=\begin{cases}\dfrac{2At}{T}, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2}\\ 2A\left(1-\dfrac{t}{T}\right), & \dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

信道是 AWGN 且 $S_n(f)=N_0/2$。两个信号的先验概率为 p 及 $1-p$。

1. 确定最佳检测器的结构。
2. 写出差错概率的表达式。
3. 画出差错概率与 p 的函数关系示意图，$0\leqslant p\leqslant 1$。

8.18　在加性高斯噪声信道中，噪声功率谱密度

为$N_0/2$，两个等概率消息分别表示为

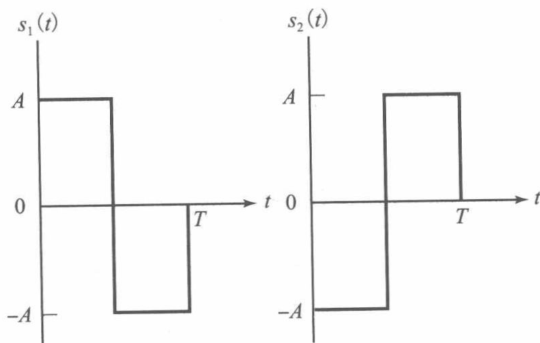
$$s_1(t)=\begin{cases}\dfrac{At}{T}, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$s_2(t)=\begin{cases}A\left(1-\dfrac{t}{T}\right), & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1. 求最佳接收机的结构。
2. 求差错概率。

8.19 假设二进制 PAM 用于在功率谱密度为 $N_0/2=10^{-10}$ 的 AWGN 信道上发送信息。发送信号的能量为$\mathscr{E}_b=A^2T/2$，其中 T 为比特间隔，A 为信号幅度。求采用以下数据率时，要达到差错概率 10^{-6} 所需的信号幅度：(a) 10kbps，(b) 100kbps 及(c)1Mbps。

8.20 Manchester 编码器将信息 1 映射为 10，将信息 0 映射为 01。对应 Manchester 编码的信号波形如习题 8.20 图所示。如果两个信号等概率，求差错概率。



习题 8.20 图

8.21 信号波形

$$s(t)=\begin{cases}e^{-t}, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

通过匹配滤波器 $h(t)=s(T-t)$。求匹配滤波器的输出。

8.22 有 AWGN 的二进制 PAM 通信系统数据速率为 2Mbps。如果理想平均差错概率为 10^{-6}，求 SNR/bit，$\mathscr{E}_b/N_0$和功率信噪比P_{av}/N_0。

8.23 二进制数字通信系统采用信号

$$s_0(t)=0,\quad 0\leqslant t<T$$

及

$$s_1(t)=A,\quad 0\leqslant t<T$$

传输信息，称为开关信号。解调器计算接收信号 $r(t)$与 $s(t)$的互相关，并在 $t=T$ 时刻对相关器的输出抽样。

1. 设信号等概率发生，确定 AWGN 信道的最佳检测器和最佳阈值。
2. 求差错概率与 SNR 的函数关系。据此比较开关信号与对极信号。

8.24 考虑信号

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{T}t\cos 2\pi f_ct, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1. 求匹配此信号的滤波器的冲激响应。
2. 求 $t=T$ 时刻的匹配滤波器输出。
3. 假设信号 $u(t)$通过一个相关器，对输入 $u(t)$与 $u(t)$计算相关。求 $t=T$ 时刻的相关器输出值，并与第 2 问的结果比较。

8.25 在利用二进制 PSK 发送信息的通信系统中利用正交载波发送信号的载波分量。因此，接收信号具有以下形式

$$u(t)=\pm\sqrt{2P_s}\cos(2\pi f_ct+\phi)+\sqrt{2P_c}\sin(2\pi f_ct+\phi)+n(t)$$

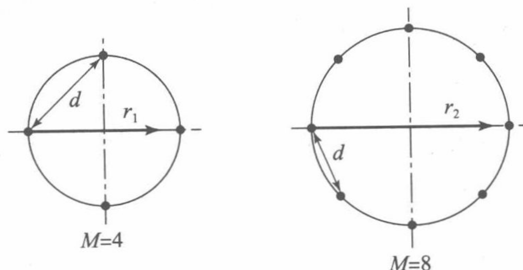
其中 ϕ 是载波相位，$n(t)$是 AWGN。未调制载波作为接收机的导频信号用于估计载波相位。

1. 画出接收机框图，包括载波相位估计在内。
2. 给出估计载波相位 ϕ 所涉及的运算的数学分析。
3. 将二进制 PSK 信号检测的差错概率表示为总发送功率 $P_T=P_s+P_c$ 的函数。求发送功率分配到导频信号上导致的性能损耗，计算 $P_c/P_T=0.1$ 时的损耗。

8.26 在高斯白噪声信道中对接收到的二进制 PSK 信号解调，用锁相环估计载波相位 ϕ。

1. 确定相位误差 $\phi-\hat{\phi}$对误差概率的影响。
2. 如果相位误差 $\phi-\hat{\phi}=45°$，SNR 降低多少？

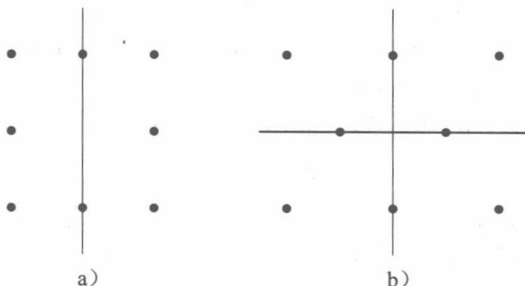
8.27 考虑习题 8.27 图所示的 4 相信号和 8 相信号星座图。求使两个星座图中的相邻点之间距离为 d 的两个圆半径 r_1 和 r_2。根据这个结果，求要达到同样的差错概率 8-PSK 与 4-PSK 分别需要的额外的发送能量，差错概率是由选择相邻信号点的差错所确定的。



习题 8.27 图

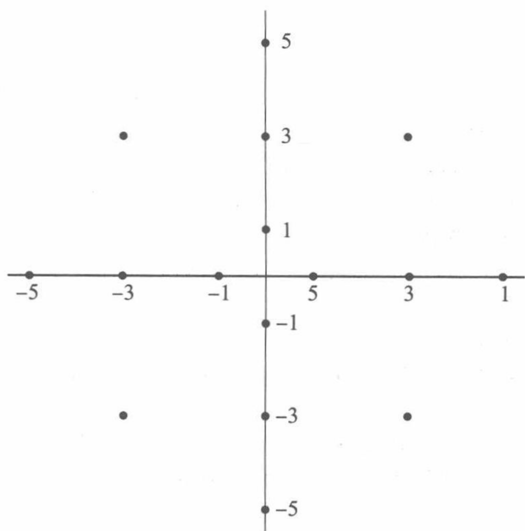
8.28 考虑习题 8.28 图所示的两个 8 个信号点的 QAM 信号星座图。两个相邻点的最小距离为 $2A$。假设信号点等概率出现，试求各星座图的平均发送功率，哪一个星座图的功率利用率

更高？



习题 8.28 图

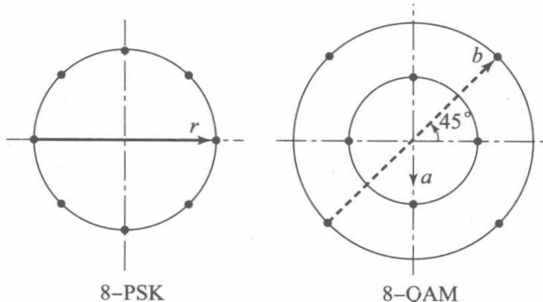
8.29　如习题 8.29 图所示的 16-QAM 星座图是电话线调制解调器的国际标准(称为 V.29)。假设 SNR 足够大以使得差错仅出现在相邻信号点之间，求检测器的最佳判决阈值。



习题 8.29 图

8.30　对于习题 8.29 中的 16-QAM 信号星座图，给出格雷编码。

8.31　考虑习题 8.31 图所示的 8 点星座图。



习题 8.31 图

1. 若 8-QAM 信号星座图的最小信号点间距为 A 个单位，求内圆和外圆的半径 a 和 b。
2. 若 8-PSK 信号星座图的最小信号点间距为 A 个单位，求圆半径 r。
3. 求两个信号星座图的平均发送功率并进行比较，说明其中一个星座图相比另一个的优势(假设信号点等概率)。

8.32　考虑习题 8.31 图所示的 8-QAM 信号星座图。

1. 对信号星座图中每个信号点分配 3 个数据比特，使最近的两个相邻点只有 1 比特位置的不同。
2. 若欲采用的比特速率为 90Mbps，求符号速率。
3. 比较要达到相同差错概率，8 点 QAM 调制与 8 点 PSK 调制分别需要的 SNR。
4. 哪种信号星座图(8 点 QAM 与 8 点 PSK)对相位误差有更大的抵抗能力？解释其原因。

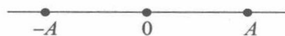
8.33　在噪声功率谱密度为$N_0/2$的 AWGN 信道上发送三种消息 m_1，m_2 和 m_3，分别表示为

$$s_1(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$s_2(t)=-s_3(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{T}{2}\\ -1, & \dfrac{T}{2}\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1. 信号空间的维度是多少？
2. 为信号空间确定适当的基信号集。(提示：可以不用格兰姆-施密特方法)
3. 画出这个问题的信号星座图。
4. 推导并画出最佳判决区域 R_1，R_2 和 R_3。
5. 三个消息中哪一个最易受到噪声干扰？为什么？换言之，P(差错|发送消息 m_i)，$i=1$，2，3 中哪个概率更大？
6. 采用联合界，求出这个方案的差错概率上界。

8.34　一个 3 电平的 PAM 系统用于发送无记忆三进制信源的输出，速率为 2000 符号/秒。信号星座图如习题 8.34 图所示。求检测器的输入，使平均差错概率最小的最佳阈值以及平均差错概率。



习题 8.34 图

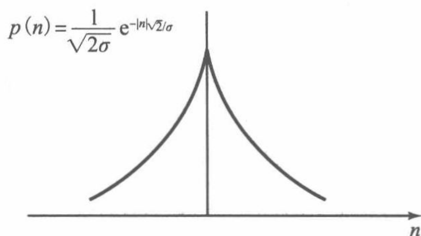
8.35　考虑信号检测器，其输入为

$$r=\pm A+n$$

其中$+A$ 和$-A$ 等概率出现，噪声变量如习题 8.35 图所示的(Laplacian)PDF 刻画。

1. 求差错概率与参数 A 和σ 的关系。
2. 求要达到 10^{-5} 差错率需要的 SNR，与高斯 PDF 的结果相比如何？

8.36　一组 M 个 PAM 信号，形式如下



习题 8.35 图

$$s_m(t)=s_m\psi(t),\quad m=1,2,\cdots,M,\quad 0\leqslant t<T$$

其中

$$s_m=(2m-1-M)d,\quad m=1,2,\cdots,M$$

这些信号等概率出现，幅度关于零点对称，且相邻幅度之间的间隔相等均为 $2d$。求此信号集的平均信号能量。

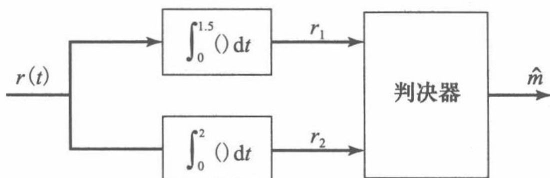
8.37　本章中已经说明最佳解调器可以用相关型解调器或匹配滤波器型解调器实现。两种情况下，$\psi_j(t)$和 $1\leqslant j\leqslant N$，用于相关 $r(t)$或者设计匹配滤波器。说明对于任意 M 进制通信系统，最佳解调器也可以基于 $r(t)$与 $s_i(t)(1\leqslant i\leqslant M)$相关，或者设计滤波器匹配 $s_i(t)(1\leqslant i\leqslant M)$。精确描述这些解调器的结构，画出框图，给出相关的设计参数，比较图 8-35 与图 8-36 的解调器的复杂度。

8.38　话音信号按照 8kHz 速率抽样，进行对数压缩并按照每个样值 8 比特的 PCM 格式编码。在 AWGN 信道中以 M 电平 PAM 信号传输 PCM 数据。求以下不同 M 取值下的符号传输速率：(a)$M=4$　(b)$M=8$　(c)$M=16$

8.39　在功率谱密度为$\frac{N_0}{2}=1$的加性高斯白噪声信道上等概率地传输两个消息。采用的信号形式为

$$s_1(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

且 $s_2(t)=s_1(t-1)$。我们期望采用相关型结构实现该接收机。由于相关器设计的非理性，采用习题 8.39 图所示的结构来实现。对于上面支路中积分器的非理想特性，采用$\int_0^{1.5}$代替$\int_0^1$。判决器根据对 r_1 和 r_2 的比较，判断发送的是哪一个消息。判决器应该采用哪种最佳判决准则？



习题 8.39 图

8.40　设二进制信息的传输线信道采用了 $n-1$ 个再生中继器，再加上接收端的接收机。假设每个接收机中检测器的差错概率为 p，并且转发器之间差错独立。

1. 说明接收端接收机的二进制差错概率为

$$P_n=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$$

2. 若 $p=10^{-6}$ 且 $n=100$，近似计算 P_n 的取值。

8.41　设数字通信系统的传输线上有 100 个数字(再生)中继器。采用二进制对极信号传输信息。如果总的端到端差错概率为 10^{-6}，求各中继器的差错概率，以及要在 AWGN 信道中保证此性能所需的$\mathscr{E}_b/N_0$。

8.42　推导式(8.8.12)给定的 PLL 的(单边)噪声等效带宽表达式。

8.43　假设 PLL 的环路滤波器具有如下传递函数

$$G(s)=\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

1. 求闭环传递函数 $H(s)$，并说明该环路是否稳定。
2. 求该环路的阻尼因子及自然频率。

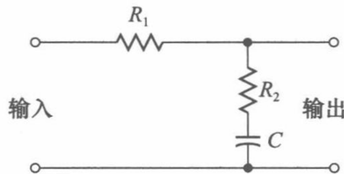
8.44　考虑用于估计信号载波相位的 PLL，其环路滤波器由

$$G(s)=\frac{K}{1+\tau_1 s}$$

确定。

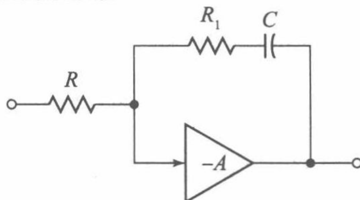
1. 求闭环传递函数 $H(s)$，及其在 $f=0$ 的增益。
2. 求该环路稳定所对应的 τ_1 和 K 取值范围。

8.45　PLL 中的环路滤波器 $G(s)$采用习题 8.45 图所示的电路实现。求系统函数$G(s)$，并求出式(8.8.4)所示的时间常数 τ_1 和 τ_2 以电路参数为变量的表达式。



习题 8.45 图

8.46　PLL 中的环路滤波器 $G(s)$采用习题 8.46 图所示的有源滤波器实现。求系统函数 $G(s)$，并求出式(8.8.4)所示的时间常数 τ_1 和 τ_2 以电路参数为变量的表达式。



习题 8.46 图

8.47 说明图8-80中的早迟门同步器是习题8.47图所示定时恢复电路的近似实现。

8.48 二进制通信系统在两个不同的信道上传输相同的信息。两个接收信号为

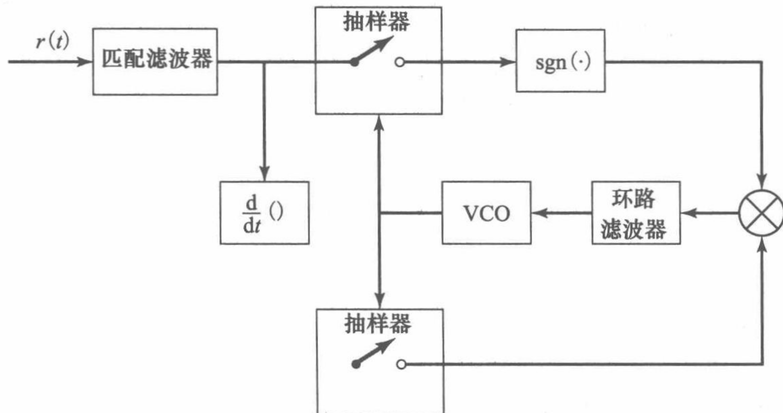
$$r_1=\pm\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1$$
$$r_2=\pm\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_2$$

其中 $E(n_1)=E(n_2)=0$，$E(n_1^2)=\sigma_1^2$，$E(n_2^2)=\sigma_2^2$ 并且 n_1 和 n_2 是不相关的高斯变量。检测器对 r_1 和 r_2 的线性组合

$$r=r_1+kr_2$$

进行判决。

1. 求使差错概率最小化的 k 值。
2. 设 $\sigma_1^2=1$，$\sigma_2^2=3$，求 $k=1$ 和 k 取第1问中确定的最佳值时分别对应的差错概率并比较结果。



习题8.47图

459~473

上机习题

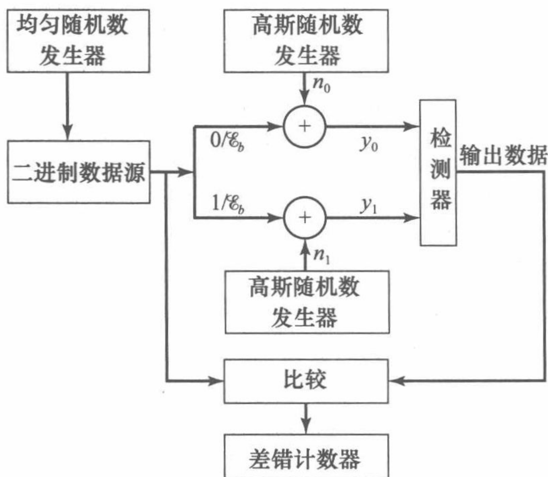
8.1 二进制正交信号检测器性能的仿真

本题目的是对加性高斯白噪声信道上采用二进制正交信号的二进制通信系统的差错概率进行估计，并画出差错概率与SNR的函数关系图。采用正交信号的二进制通信系统模型如上机习题8.1图所示。如图所示，要通过仿真产生0、1等概且相互独立的二进制序列。为此，采用一个随机数生成器，产生(0，1)区间上均匀分布的随机数。如果一个生成数落在(0，0.5)的区间，则二进制信源输出为0；否则输出1。如果生成了0，则有 $y_0=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_0$ 及 $y_1=n_1$，其中 y_0 和 y_1 表示对应二进制正交信号的两个匹配滤波器或者相关器的输出。如果生成了1，则有 $y_0=n_0$ 及 $y_1=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1$。

加性噪声分量 n_0 和 n_1 采用两个高斯噪声生成器产生，均值为零，方差为 $\sigma^2=N_0/2$。为了方便起见，可将信号能量 $\mathscr{E}_b$ 归一化为单位量($\mathscr{E}_b=1$)，并且改变 σ^2。原来定义为 $\mathscr{E}_b/N_0$ 的SNR就等于 $1/2\sigma^2$。匹配滤波器或相关器的输出 y_0 和 y_1 输入到检测器中，由检测器判决收到的信号是0还是1。检测器的输出与二进制输入序列比较，由差错计数器统计错误比特数。

针对SNR在 $1\leqslant 10\log\mathscr{E}_b/N_0<10\text{dB}$ 上的不同取值，仿真传输10000比特。画出差错概率与SNR的函数关系图。比较估计的差错概率与下式给出的理论差错概率：

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$



上机习题8.1图 二进制正交信号检测的仿真模型

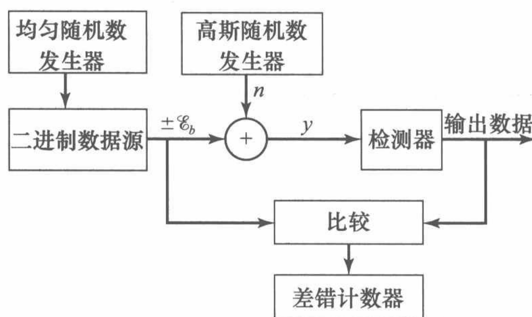
8.2 二进制对极信号的检测器性能的仿真

本题目的是对加性高斯白噪声信道上采用二进制对极信号的二进制通信系统的差错概率进行估计，并画出差错概率示意图。采用正交信号的二进制通信系统模型如上机习题8.2图所示。如图所示，要通过仿真产生随机变

量y，即检测器的输入信号。采用一个均匀随机数生成器，产生数据源的二进制 0、1 信息序列。0 和 1 序列映射为$\pm\mathscr{E}_b$的序列，其中$\mathscr{E}_b$代表比特信号能量。采用高斯噪声发生器生成零均值方差为σ^2的高斯随机数。对应等概率的 0 和 1，检测器比较随机变量 y 与阈值零。如果 $y>0$ 则将发送比特判为 0；若 $y<0$ 则将发送比特判为 1。比较检测器输出与二进制输入序列，统计错误比特数。

针对 SNR 在 $1\leqslant 10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0<7\text{dB}$ 上的不同取值，仿真传输 10000 比特。画出差错概率与 SNR 的函数关系图。比较估计的差错概率与下式给出的理论差错概率

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$



上机习题 8.2 图　二进制对极信号检测的仿真模型

8.3　开关信号的检测器性能的仿真

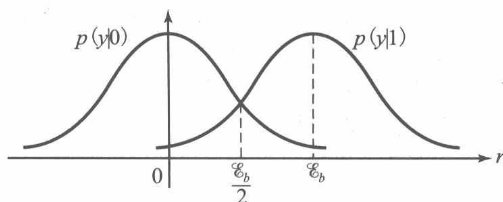
要仿真的系统模型类似于上机习题 8.2 图所示，不同的是其中一个信号为零。生成一随机变量为$\{y_i\}$的序列，无信号发送时 $y_i=n_i$，有信号发送时 $y_i=\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_i$，$n_i$ 为零均值高斯随机变量，方差为$\sigma^2=N_0/2$。这样，两个可能的 PDF 或 y_i 如上机习题 8.3 图所示。检测器将每个随机变量$\{y_i\}$与最佳阈值$\sqrt{\mathscr{E}_b}/2$比较并进行判决，如果 $y_i<\sqrt{\mathscr{E}_b}/2$则判为发送 0，如果 $y_i>\sqrt{\mathscr{E}_b}/2$则判为发送 1。

针对 SNR 在 $1\leqslant 10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0<13\text{dB}$ 上的不同取值，仿真传输 10000 比特。画出差错概率与 SNR 的函数关系图。比较估计的差错概率与下式给出的理论差错概率

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{\mathscr{E}_b}{2N_0}}\right)$$

8.4　二进制通信系统噪声影响的仿真

二进制通信系统的噪声影响可以通过观察检测器输入端的有噪接收信号进行分析。例如，考虑采用二进制正交信号的二进制通信系统，其检测器输入信号为一对随机变量$(y_0,\ y_1)$



上机习题 8.3 图　对应开关信号的相关器输出信号概率密度函数

$$(y_0,y_1)=(\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_0,n_1)$$

$$(y_0,y_1)=(n_0,\sqrt{\mathscr{E}_b}+n_1)$$

噪声变量 n_1 和 n_2 为零均值独立高斯随机变量，方差为σ^2。

执行上机习题 8.1 中的仿真，对应 $\sigma=0.1$，$\sigma=0.3$ 和 $\sigma=0.5$ 的每个取值，分别产生 100 个接收序列$(y_0,\ y_1)$的样本，$\mathscr{E}_b$ 归一化为单位 1。以$(y_0,\ y_1)$为坐标，画出对应 σ 不同取值的 100 个样本的二维散点图，并对结果进行分析。

8.5　4 幅度 PAM 系统检测器性能的仿真

本题目的是对采用 4 电平 PAM 的数字通信系统差错概率进行估计，并画出差错概率与 SNR 的函数关系图。假设接收机包括一个信号相关器或者匹配滤波器和一个检测器。系统模型可以按照上机习题 8.5 图进行仿真。如图所示，模拟生成随机变量 y，y 是信号相关器的输出及检测器的输入。

首先要生成映射为相应幅度电平$\{A_m\}$的 4 符号序列。为此，采用一个随机数生成器，产生(0，1)范围内均匀分布的随机数。这个范围分为 4 个相等的间隔，即(0，0.25)，(0.25，0.5)，(0.5，0.75)和(0.75，1)，这些间隔分别对应符号(信息比特对)00，01，11 和 10。这样，均匀随机数生成器的输出就可以分别映射为对应的信号幅度电平$(-3d,\ -d,\ d,\ 3d)$。

具有零均值和方差 σ^2 的加性噪声分量由高斯随机数生成器(RNG)产生。为了方便起见，可以对距离参数归一化 $d=1$，并且变化 σ^2。检测器分别计算输入信号 $y=A_m+n$ 与 4 个可能发送信号的距离。检测器的输出 $\hat{A}_m$ 对应距离最小的信号电平。比较$\hat{A}_m$ 与实际发送的信号电平，并由差错计数器统计检测器的差错。

针对平均比特 SNR

$$\frac{\mathscr{E}_{\text{avb}}}{N_0}=\frac{5}{4}\left(\frac{d^2}{\sigma^2}\right)$$

的不同取值，仿真传输 10000 个符号，并画出符号差错概率估计值与$10\log(\mathscr{E}_{\text{avb}}/N_0)$的函数关系。给出差错概率的理论表达式，并对比仿真性能与理论性能。

8.6 16电平PAM的仿真

修改上机习题8.5描述的仿真，实现16电平PAM传输。这种情况下，可以通过直接将(0，1)范围等分为16个间隔，并将16进制符号映射为16个信号幅度。执行仿真并画出估计的差错概率曲线。再画出教材中表达式给出的符号差错概率理论值，比较理论结果与仿真结果。

8.7 生成PSK信号波形

本题目的是生成恒定包络PSK信号波形，其表达式如下

$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos\left(2\pi f_c t+\frac{2\pi m}{M}\right),$$
$$m=0,1,\cdots,M-1,\quad 0\leqslant t<T$$

为方便起见，可将信号幅度归一化为单位1。

设 $f_c=6/T$，$M=8$，生成并画出时间间隔 $0\leqslant t<T$ 中PSK信号波形。

8.8 PSK信号的解调

本题中，考虑 $M=4$ 的PSK信号解调，设接收信号为

$$r(t)=u_m(t)+n(t)$$
$$=u_m(t)+n_c(t)\cos 2\pi f_c t-n_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

其中发送信号为

$$u_m(t)=g_T(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right)\cos 2\pi f_c t$$
$$-g_T(t)\sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right)\sin 2\pi f_c t$$
$$=s_{mc}\psi_1(t)+s_{ms}\psi_2(t)$$

并且 $n(t)$ 为加性高斯噪声过程。脉冲波形 $g_T(t)$ 为矩形，即

$$g_T(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_s}{T}}, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解调器采用两个正交的相关器，计算两个检测器在抽样时刻 T 的输入信号

$$y_c(t)=\int_0^t r(\tau)\psi_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$y_s(t)=\int_0^t r(\tau)\psi_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 为两个正交基信号

$$\psi_1(t)=\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\cos 2\pi f_c t$$
$$\psi_2(t)=-\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\sin 2\pi f_c t$$

在离散时间上实现两个相关器，则相关器输出为

$$y_c(nT_s)=\sum_{k=0}^{n}r(kT_s)\psi_1(kT_s),\quad n=1,2,\cdots$$
$$y_s(nT_s)=\sum_{k=0}^{n}r(kT_s)\psi_2(kT_s),\quad n=1,2,\cdots$$

其中抽样间隔为 $T_s=T/100$，并且 $f_c=30/T$。噪声样值 $n_c(nT_s)$ 和 $n_s(nT_s)$ 为统计独立的零均值方差 σ^2 的高斯随机变量的样本值。对 $\sigma^2=0$，$\sigma^2=0.05$ 和 $\sigma^2=0.5n=1$，2，…，100，以及4相PSK信号的每个相位，分别计算并画出 $y_c(nT_s)$ 和 $y_s(nT_s)$ 的样本值。

8.9 $M=4$ 的PSK信号调制与检测的仿真

本题目的是估计采用 $M=4$ 的PSK信号调制的通信系统的差错概率。要仿真的系统模型如上机习题8.9图所示。

如图所示，要仿真生成随机变量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{n}$，即相关器输出信号及检测器输入信号。首先产生要映射为4个信号点的两比特符号。为此，采用随机数发生器，产生(0，1)范围内均匀分布的随机数。这个范围分为4个大小相等的间隔，即(0，0.25)，(0.25，0.5)，(0.5，0.75)和(0.75，1)，这些间隔分别对应符号(信息比特对)00，01，11和10。这些比特被用于选择信号相位矢量 $\boldsymbol{s}_m$，$m=1$，2，3，4。

加性噪声分量 n_c 和 n_s 是统计独立的零均值高斯随机变量，方差均为 σ^2。为了方便起见，可以将信号能量 $\mathscr{E}_s$ 归一化为单位1，并通过对噪声方差 σ^2 的缩放控制SNR。

检测器检查每个符号间隔中的接收信号矢量 $\boldsymbol{y}$，并计算 $\boldsymbol{y}$ 在四个可能的信号矢量 $\boldsymbol{s}_m$ 上的投影(点积)。检测器的判决准则是选择对应最大投影的信号点。比较检测器的输出判决与发送符号，统计符号差错和比特差错。

针对SNR在 $1\leqslant 10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0<8\text{dB}$ 上的不同取值，仿真上述系统传输10 000符号(20 000比特)，画出估计的比特差错概率和符号差错概率曲线。再画出4-PSK的理论比特差错概率，比较差错概率的估计值与理论值，并对结果给出说明。

8.10 $M=4$ 的DPSK信号调制与检测的仿真

本题目的是估计采用 $M=4$ 的差分PSK(DPSK)信号调制的通信系统的差错概率。要仿真的系统模型如上机习题8.10图所示。

$M=4$ 的DPSK映射器按照以下规则相对于前一个传输符号改变发送符号的相位：(a)如果发送比特为00，相差为0弧度；(b)如果发送比特为01，相差为 $\pi/2$ 弧度；(c)如果发送比特为11，相差为 π 弧度；(d)如果发送比特为10，相差为 $3\pi/2$ 弧度。采用高斯噪声发生器生成加性噪声分量 n_c 和 n_s，这两个分量为统计无关的零均值高斯随机变量，方差均为 σ^2。因此，接收到的有噪信号矢量为

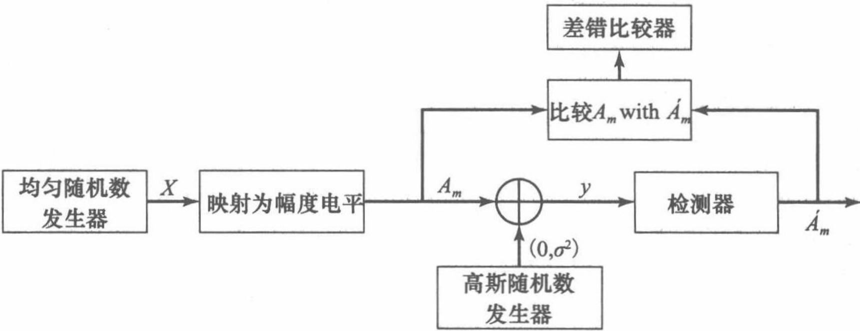
$$\mathbf{y}=\left[\cos\frac{\pi m}{2}+n_c,\ \sin\frac{\pi m}{2}+n_s\right]$$
$$=\left[y_c,\ y_s\right]$$

差分检测器计算两个连续接收信号矢量 $\mathbf{y}_k$ 和 $\mathbf{y}_{k-1}$ 的相位差。在数学上，这个计算可以表示为

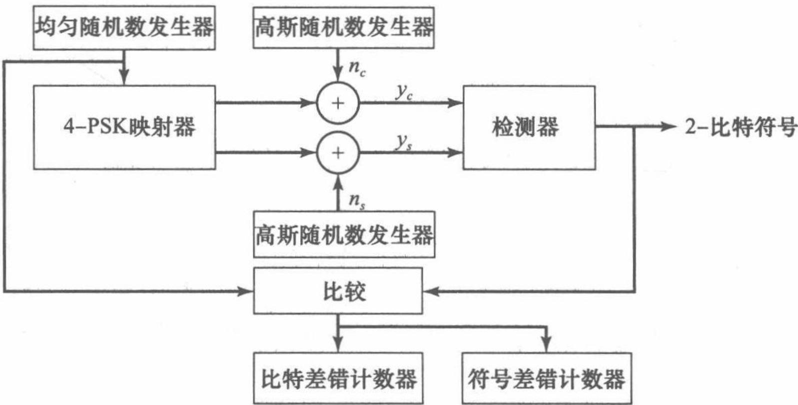
$$y_k y_{k-1}^* = (y_{ck}+jy_{sk})(y_{ck-1}+jy_{sk-1})$$
$$=y_r+jy_i$$

并且 $\theta_k=\tan^{-1}(y_i/y_r)$ 为相位差。比较 θ_k 取值与 4 个可能的相位差(0°，90°，180°和 270°)，选择最接近 θ_k 的相位作为判决准则。将检测出的相位映射为信息比特对。差错计算器统计符号差错。

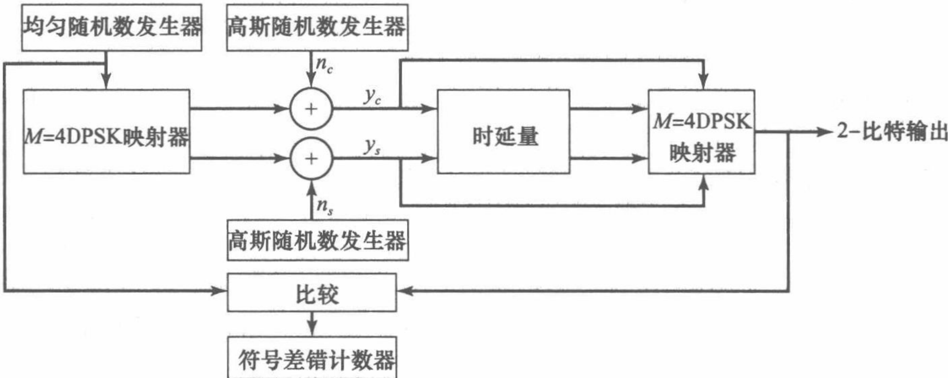
针对 SNR 在 $1\leqslant 10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0<10\text{dB}$ 上的不同取值，仿真上述系统传输 10000 符号(20000 比特)。画出估计的符号差错概率曲线，以及 $M=4$PSK 的理论符号差错概率，比较 $M=4$DPSK 差错概率的仿真值与 $M=4$ 相位相干 PSK 的差错概率理论值，并对结果给出说明。



上机习题 8.5 图　4 电平 PAM 信号检测的仿真模型



上机习题 8.9 图　$M=4$ 的 PSK 信号检测的仿真模型



上机习题 8.10 图　$M=4$ 的 DPSK 信号检测的仿真模型

8.11 QAM信号的解调

QAM信号的解调器采用两个正交相关器，对接收信号

$$r(t)=A_{mc}g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)+A_{ms}g_T(t)\sin(2\pi f_c t+\phi)+n(t)$$

对应的相位正交基函数为

$$\psi_1(t)=\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\phi)$$

$$\psi_2(t)=-\sqrt{\frac{1}{\mathscr{E}_s}}g_T(t)\sin(2\pi f_c t+\phi)$$

脉冲波形 $g_T(t)$ 为矩形，即

$$g_T(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_s}{T}}, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

在离散时间上实现两个相关器，则相关器输出为

$$y_c(nT_s)=\sum_{k=0}^{n}r(kT_s)\psi_1(kT_s),\quad n=1,2,\cdots$$

$$y_s(nT_s)=\sum_{k=0}^{n}r(kT_s)\psi_2(kT_s),\quad n=1,2,\cdots$$

其中抽样间隔为 $T_s=T/100$，并且 $f_c=30/T$。载波相位 ϕ 可以在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布，加性噪声样值 $n_c(kT_s)$ 和 $n_s(kT_s)$ 为统计独立的零均值方差 σ^2 的高斯随机变量的样本值。对于图8-56b所示 $M=8$QAM信号星座图，分别计算并画出 $\sigma^2=0$，$\sigma^2=0.05$ 和 $\sigma^2=0.5$ 的各种情况下 $n=1,2,\cdots,100$ 对应的 $y_c(nT_s)$ 和 $y_s(nT_s)$ 的样本值。可任选8种信号点之一进行传输。

8.12 $M=16$ QAM信号调制与检测的仿真

本题目的是估计采用 $M=16$QAM信号的通信系统的差错概率。要仿真的系统模型如上机习题8.12图a所示。均匀随机数发生器(RNG)用于产生对应16种可能的 b_1，b_2，b_3 和 b_4 的4比特组合。如上机习题8.12图b所示，信息符号映射为对应信号点，坐标为 $[A_{mc}, A_{ms}]$。可以采用两个高斯随机数发生器产生不相关的零均值噪声分量 $[n_c, n_s]$，其方差均为 σ^2。相应地，检测器输入端接收的有噪信号矢量为

$$\mathbf{y}=[A_{mc}+n_c, A_{ms}+n_s]$$

检测器计算 $\mathbf{y}$ 与16种发送信号矢量的欧氏距离，选择与接收信号矢量最接近的信号点。差错计数器统计检测序列的符号差错。

针对SNR在 $1\leqslant 10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0<13$dB上的不同取值，仿真实现上述 $M=16$QAM系统，传输10 000符号(40 000比特)。画出估计的符号差错概率曲线，及 $M=16$QAM理论的符号差错概率，比较差错概率的仿真值与理论值，并对结果给出说明。

8.13 重复实现例8.3.3的相关型解调器，考虑接收信号受到AWGN噪声干扰的情况，其中噪声样本的方差分别取 $\sigma^2=0.1$，0.5和1.0。

8.14 重复实现例8.3.5的匹配滤波器解调器，考虑接收信号受到AWGN噪声干扰的情况，其中噪声样本方差分别取 $\sigma^2=0.1$，0.5和1.0。

8.15 用于PAM的早迟门同步器仿真

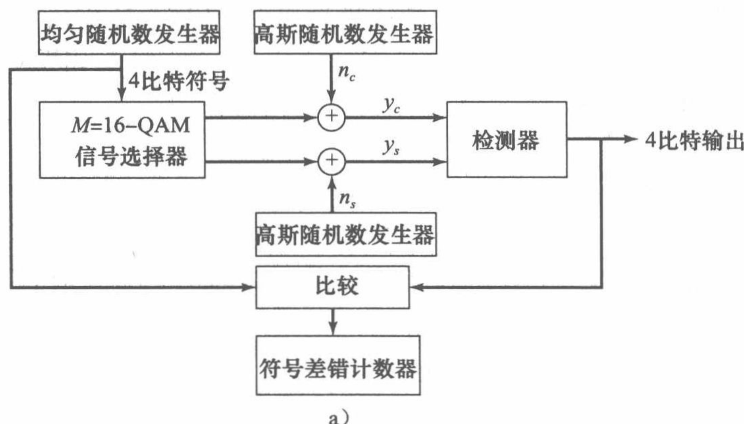
本题目的是对二进制PAM系统的早迟门同步器进行仿真。PAM中采用的基本脉冲具有升余弦频谱，滚降系数为0.4。系统传输速率为 $1/T=4800$bps。脉冲信号可以表示为

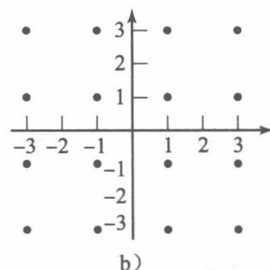
$$x(t)=\text{sinc}(4800t)\frac{\cos 1920\pi t}{1-1.4746\times 10^7 t^2}$$

该信号脉冲持续范围从 $-\infty$ 到 $+\infty$。

画出 $x(t)$ 并验证，从实际意义上仅考虑区间 $|t|\leqslant 0.6\times 10^{-3}$ 就足够了，约为 $[-3T, 3T]$。截取此区间的脉冲，计算并画出自相关函数曲线，求出自相关函数覆盖的样本长度，并确定最大值出现的位置，即最佳抽样时间。抽样速率选择为每个比特间隔 T 中抽取40个样本。

仿真实现错误抽样时间偏离峰值或左或右10个样值的早迟门同步器，验证同步器能找到正确的抽样时间，即脉冲最大值的出现时间。





上机习题8.12图 $M=16$QAM信号检测的仿真模型

474 ~ 484

第9章

多维数字调制

本章将数字调制的讨论扩展至多维信号。首先将推导 M 进制正交信号、双正交信号、单纯形信号以及二进制编码信号。然后分析在加性高斯白噪声(AWGN)信道中传输这些信号的平均差错概率；介绍 M 进制频移键控信号(FSK)信号及其调制和检测，包括非相干检测及其差错概率；介绍连续相位的 FSK(CPFSK)信号及连续相位调制(CPM)。最后将比较本章及第 8 章所描述的各种调制方法在功率要求、带宽要求和差错概率方面的性能。

9.1 M 进制正交信号

基带 M 进制正交信号波形可以采用多种方式构造。例如，如图 9-1 所示的两组 $M=4$ 的正交信号波形。可以看到，图 9-1a 中的信号波形 $s_i(t)(i=1, 2, 3, 4)$ 在时间区间$(0, T)$上互不交叠，代表 $M=4$ 的脉冲位置调制(PPM)。图 9-1b 中的信号波形$s_i'(t)(i=1, 2, 3, 4)$在时间上相互交叠，但是仍然满足正交条件，即

$$\int_0^T s_i'(t)\, s_j'(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad i \neq j \tag{9.1.1}$$

表示一组 M 个正交信号需要的维数是 $N=M$。因此，一组 M 个正交信号在几何上可以表示为 M 维空间中的 M 个正交矢量。具体地，考虑 M 进制 PPM 信号波形。一组 M 个基带 PPM 信号的数学表达式为

$$s_m(t) = \sqrt{\mathscr{E}_s}\psi_m(t), \quad m = 1,2,\cdots,M \tag{9.1.2}$$

其中 $\psi_m(t)(m=1, 2, \cdots, M)$是一组 M 个正交基信号波形。这些波形定义为

$$\psi_m(t) = g_T(t)\left(t - \frac{(m-1)T}{M}\right), \quad \frac{(m-1)T}{M} \leqslant t \leqslant \frac{mT}{M} \tag{9.1.3}$$

这里 $g_T(t)$是单位能量脉冲，在区间 $0\leqslant t\leqslant T/M$上非零，基函数 $\psi_m(t)(m=1, 2, \cdots, M)$是对 $g_T(t)$进行时间平移得到的，如图 9-2 所示。每个信号波形 $s_m(t)$的能量为

$$\int_0^T s_m^2(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{E}_s\int_0^T \psi_m^2(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{E}_s, \quad \forall\, m$$

$\mathscr{E}_s$ 表示每个 k 比特符号对应的信号波形的能量。相应地，M 进制 PPM 信号波形在几何上可以用以下 M 维矢量表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1 &= (\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,\cdots,0); \\ \boldsymbol{s}_2 &= (0,\sqrt{\mathscr{E}_s}S,0,\cdots,0); \\ &\vdots \\ \boldsymbol{s}_M &= (0,0,0,\cdots,\sqrt{\mathscr{E}_s}) \end{aligned} \tag{9.1.4}$$

显然，这些矢量是正交的，即对于 $i\neq j$ 有 $\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j=0$。有趣的是，这 M 个信号矢量相互等距离，即

$$d_{mn} = \sqrt{\|\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{s}_n\|^2} = \sqrt{2\,\mathscr{E}_s}, \quad \forall\, m \neq n \tag{9.1.5}$$

例 9.1.1 对于图 9-1b 所示 $M=4$ 正交信号波形$s_i'(t)$，$i=1, 2, 3, 4$，确定其几何表示的矢量。设采用如图 9-2 所示的基函数波形 $\psi_m(t)$。

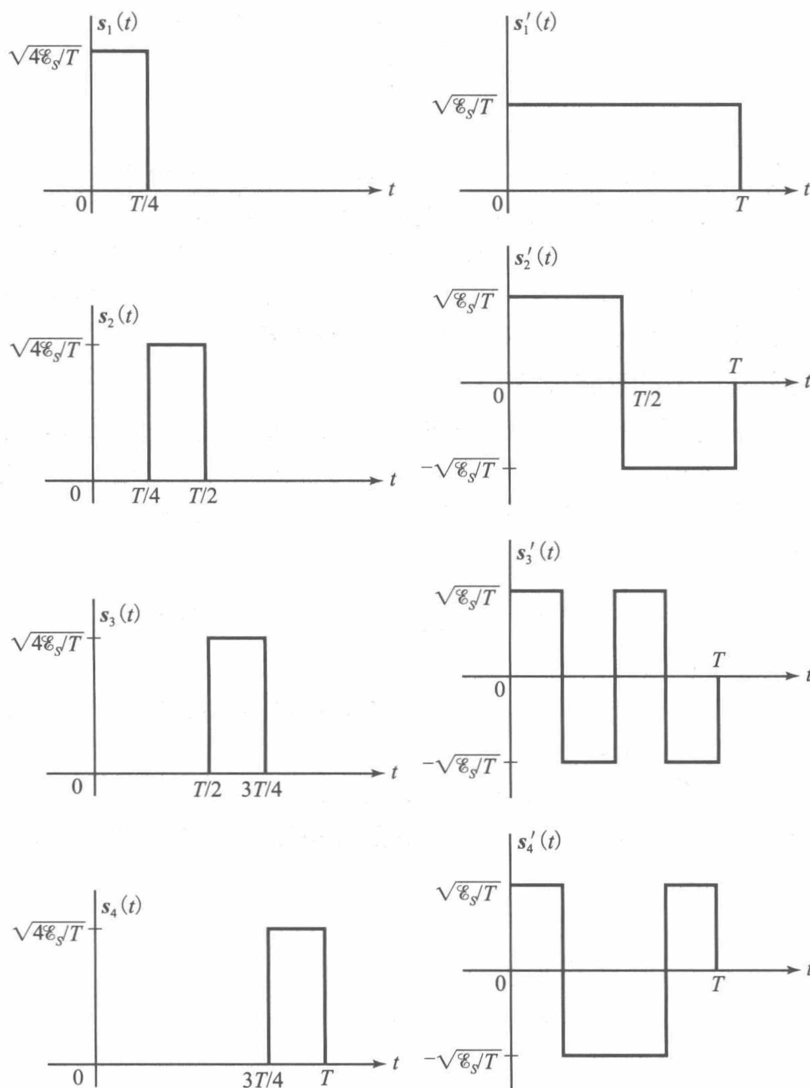


图 9-1 $M=4$ 正交信号波形的两个集合

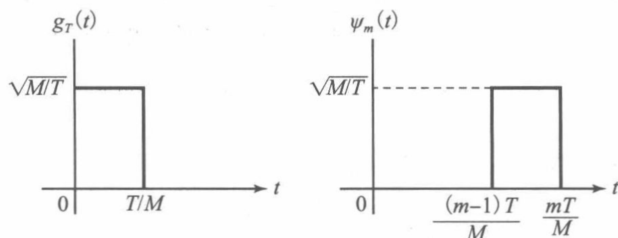


图 9-2 M 进制 PPM 信号波形的矩形脉冲 $g_T(t)$ 及基函数 $\psi_m(t)$

解： 已知 4 个正交信号波形具有相等的能量

$$\int_0^T [s_i'(t)]^2 \mathrm{d}t = \frac{\mathscr{E}_s}{T}\int_0^T \mathrm{d}t = \mathscr{E}_s$$

计算每个信号波形在 4 个基函数 $\psi_m(t)$ 上的投影

$$\int_0^T s_i'(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t, \quad m = 1,2,3,4$$

486 ~ 487

可以得到矢量 $\boldsymbol{s}_i'$，即

$$\boldsymbol{s}_1' = (\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4});$$

$$s_2' = (\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4});$$
$$s_3' = (\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4});$$
$$s_4' = (\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, -\sqrt{\mathscr{E}_s/4}, \sqrt{\mathscr{E}_s/4})$$

可见，4 个矢量相互正交，即对于 $i \neq j$ 有$s_i' \cdot s_j' = 0$。◀

通过将基带信号与适当的载波 $\cos 2\pi f_c t$ 相乘，可以在带通信道上传输上述基带 M 进制正交信号。这样得到的发送信号是双边带抑制载波(DSB-SC)幅度调制信号。与第 8 章中对已调波信号的讨论一样，接收信号载波通常会发生相位偏移，需要引入锁相环(PLL)估计载波相位从而实现信号解调。解调器将接收信号转换到基带后，检测器的功能与基带信号传输相似，通过计算距离测度，对发送符号进行判断。

9.1.1 M 进制正交信号的差错概率

要推导一般的 M 进制正交信号的差错概率，采用 PPM 信号比较方便，因为其具有如式(9.1.4)所示的非常简单的矢量表示形式，式中的$\mathscr{E}_s$ 表示每个信号波形的能量。

对于等能量正交信号，最佳检测器分别计算接收信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 与 M 个可能的发送信号矢量$\{\boldsymbol{s}_m\}$的相关

$$C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_m) = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{s}_m = \sum_{k=1}^{M} y_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \cdots, M \tag{9.1.6}$$

并且选择具有最大相关的信号。

为了计算差错概率，假设发送信号为 $\boldsymbol{s}_1$。M 个互相关器或者 M 个匹配滤波器的输出矢量，也是检测器的输入矢量，即为

$$\boldsymbol{y} = (\sqrt{\mathscr{E}_s} + n_1, n_2, n_3, \cdots, n_M) \tag{9.1.7}$$

其中 n_1，n_2，…，n_M 是零均值. 相互统计独立的高斯随机变量，方差为 $\sigma^2 = N_0/2$。将式(9.1.7)代入式(9.1.6)，可得

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_1) &= \sqrt{\mathscr{E}_s}(\sqrt{\mathscr{E}_s} + n_1); \\ C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_2) &= \sqrt{\mathscr{E}_s} n_2; \\ C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_3) &= \sqrt{\mathscr{E}_s} n_3; \\ &\vdots \\ C(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_M) &= \sqrt{\mathscr{E}_s} n_M \end{aligned} \tag{9.1.8}$$

488

可以看到$\sqrt{\mathscr{E}_s}$是缩放因子，如果相关器的每个输出除以$\sqrt{\mathscr{E}_s}$，可从消除$\sqrt{\mathscr{E}_s}$。经过这种归一化后，第 1 个相关器输出($y_1 = \sqrt{\mathscr{E}_s} + n_1$)的概率密度函数(PDF)为

$$f(y_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(y_k - \sqrt{\mathscr{E}_s})^2/N_0} \tag{9.1.9}$$

而其他 $M-1$ 个互相关器输出的 PDF 则为

$$f(y_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-y_m^2/N_0}, \quad m = 2, 3, \cdots, M \tag{9.1.10}$$

先推导检测器进行正确判决的概率，在数学上比较容易。此概率就是 y_1 大于其他 $M-1$个互相关器输出 n_2，n_3，…，n_M 的概率，可以表示为

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < y_1, n_3 < y_1, \cdots, n_M < y_1 \mid y_1) f_{y_1}(y_1) \mathrm{d}y_1 \tag{9.1.11}$$

其中 $P(n_2 < y_1$，$n_3 < y_1$，…，$n_M < y_1 \mid y_1)$表示以任意给定 y_1 为条件，n_2，n_3，…，n_M 均小于 y_1 的联合概率。这个条件概率对所有的 y_1 取平均。由于$\{y_m\}$统计上相互独立，联合概率可以分解为形如

$$P(n_m < y_1 \mid y_1) = \int_{-\infty}^{y_1} f(y_m) \mathrm{d}y_m, \quad m = 2, 3, \cdots, M$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\sqrt{2y_1^2/N_0}} e^{-y_m^2/2}\,dy_m$$
$$= 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2y_1^2}{N_0}}\right) \tag{9.1.12}$$

的 $M-1$ 个边沿概率的乘积。对于 $m=2, 3, \cdots, M$，这些边沿概率相等，因此要推导的联合概率就是式(9.1.12)的 $M-1$ 次幂。那么，正确判决概率为

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2y_1^2}{N_0}}\right)\right]^{M-1} f(y_1)\,dy_1 \tag{9.1.13}$$

且 k 比特符号差错概率为

$$P_M = 1 - P_c \tag{9.1.14}$$

489

因此，

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{1 - [1 - Q(x)]^{M-1}\}\,e^{-(x-\sqrt{2\mathscr{E}_s/N_0})^2/2}\,dx \tag{9.1.15}$$

如果发送信号是其他 $M-1$ 个信号中的任何一个，则它也有与上式一样的差错概率表达式。由于所有 M 个信号等概率发送，所以式(9.1.15)的概率 P_M 就是平均符号差错概率。这个表达式可以进行数值估计。

要对通信系统进行公平的比较，需要用每比特信噪比(SNR/bit) $\mathscr{E}_b/N_0$ 而不是用符号信噪比(SNR/symbol) $\mathscr{E}_s/N_0$ 来表示差错概率。这一点很重要，因为星座图的大小不同决定了不同系统中每个信号承载的比特数不同。对于 $M=2^k$，每个符号承载 k 比特信息，即 $\mathscr{E}_s = k\,\mathscr{E}_b$。因此可以替代 $\mathscr{E}_s$，将式(9.1.15)写成关于 $\mathscr{E}_b/N_0$ 的表示式。

某些情况下，希望将符号差错概率等效地转换为二进制比特差错概率。对于等概率正交信号，所有符号差错的出现概率均等于

$$\frac{P_M}{M-1} = \frac{P_M}{2^k-1} \tag{9.1.16}$$

而且，k 比特中有 n 个比特错误的可能方式有 $\binom{k}{n}$ 种。因此，每 k 比特符号的比特差错平均值为

$$\sum_{n=1}^{k} n\binom{k}{n}\frac{P_M}{2^k-1} = k\,\frac{2^{k-1}}{2^k-1}P_M \tag{9.1.17}$$

而且平均比特差错概率就是式(9.1.17)除以每个符号的比特数 k，即

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k-1}P_M \approx \frac{P_M}{2}, \quad k \gg 1 \tag{9.1.18}$$

图 9-3 给出了 $M=2, 4, 8, 16, 32, 64$ 时，二进制比特差错概率与 SNR/bit，即 $\mathscr{E}_b/N_0$ 的函数关系。此图表明，给定的比特差错，随着波形数 M 的增加，需要的 SNR/bit 越来越低。例如，要达到 $P_b=10^{-5}$，对于 $M=2$ 的情况，需要的 SNR/bit 比 12dB 略多；而当波形数 M 增加到 64 时($k=6$ 比特/符号)，所需的 SNR/bit 约为 6dB。因此，将 M 从 2 增加到 64，要达到 $P_b=10^{-5}$，发送功率(或能量)可以节省 6dB(降低 4 倍)。注意，

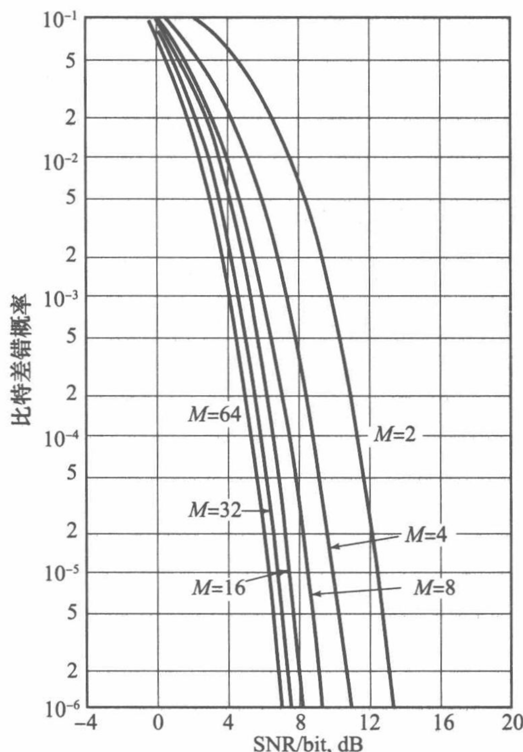


图 9-3　正交信号最佳检测的比特差错概率

这个特性与 M 进制 PAM 完全相反，后者的差错概率随 M 增加而增大。

490 当 $M\to\infty$ 时，要达到任意小的差错概率，需要的最小 $\mathscr{E}_b/N_0$ 是多少？要回答这个问题，需要将 8.4.2 节中对于等概率 M 进制信号推导出的联合界，运用到 M 进制正交信号的特定情况中，下节将给出这个分析过程。

9.1.2 M 进制正交信号差错概率的联合界

下面考察增大 M 对正交信号差错概率的影响。为了简化分析，运用联合界(见 8.4.2 节)推导符号差错概率的上界，相比式(9.1.15)的精确形式更简单。

如前所述[见式(9.1.5)]，M 进制正交信号的距离相等

491
$$d_{mn}^2 = \|\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{s}_n\|^2 = 2\mathscr{E}_s \tag{9.1.19}$$

因此，

$$d_{\min} = \sqrt{2\mathscr{E}_s} \tag{9.1.20}$$

采用式(8.4.42)的 $d_{\min}$ 值，可以得到 M 进制正交信号系统的差错概率上界为

$$P_M \leqslant \frac{M-1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathscr{E}_s}{2N_0}} \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{\mathscr{E}_s}{2N_0}} \tag{9.1.21}$$

因此，将 $M=2^k$ 和 $\mathscr{E}_s=k\mathscr{E}_b$ 代入上式可得

$$\begin{aligned} P_M &\leqslant 2^k\mathrm{e}^{-\mathscr{E}_b/2N_0} \\ &= \mathrm{e}^{-k(\mathscr{E}_b/N_0-2\ln 2)/2} \end{aligned} \tag{9.1.22}$$

当 $k\to\infty$ 或等效地 $M\to\infty$ 时，差错概率指数趋于零，只要 $\mathscr{E}_b/N_0$ 大于 $2\ln2$，即

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} > 2\ln 2 = 1.39 \approx 1.42\text{dB} \tag{9.1.23}$$

式(9.1.22)给出差错概率的简单上界，意味着只要 SNR≥1.42dB，可以达到任意低的 P_M。但是，这个联合界并不是在较低 SNR 值时很紧的上界。实际上，采用更精细的定界技术，可以证明 $k\to\infty$ 时有 $P_M\to0$，只要满足

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} > \ln 2 = 0.693 \approx -1.6\text{dB} \tag{9.1.24}$$

因此，$k\to\infty(M\to\infty)$ 时，要达到任意小的差错概率，最小的 SNR/bit 是－1.6dB。这个最小值(－1.6dB)称为加性高斯噪声信道的香农限。更多关于香农限的讨论以及－1.6dB 数值的推导见 12.6 节的式(12.6.7)及导出过程。

9.2 双正交信号

一般来说，一组 M 个双正交信号可以用 $M/2$ 个正交信号波形$[s_i(t), i=1,2,\cdots,M/2]$及其负值$[-s_i(t), i=1,2,\cdots,M/2]$构成。下面将看到，采用双正交信号发送信息序列所需带宽是发送 M 个正交信号所需带宽的一半。因此，在某些应用中双正交信号优于正交信号。

为了推导 M 进制双正交信号的几何表达形式，可以首先考虑 PPM 信号。先给出以下 $M/2$ 个 PPM 信号

492
$$s_m(t) = \sqrt{\mathscr{E}_s}\psi_m(t),\quad m=1,2,\cdots,M/2,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{9.2.1}$$

其中 $\psi_m(t)(m=1,2,\cdots,M/2)$ 是一组 $M/2$ 个基信号，如图 9-4 所示，其表达式如下

$$\psi_m(t) = g_T\left(t-\frac{(m-1)T}{M/2}\right),\quad \frac{(m-1)T}{M/2}\leqslant t\leqslant\frac{mT}{M/2} \tag{9.2.2}$$

其中 $g_T(t)$ 如图 9-4 所示。这些信号的负值为

$$s_{M/2+m}(t) = -s_m(t) = -\sqrt{\mathscr{E}_s}\psi_m(t),\quad m=1,2,\cdots,M/2 \tag{9.2.3}$$

可以看到表示 $M/2$ 个正交信号所需的维数是 $N=M/2$。对于 PPM 信号，$M/2$ 维信号矢

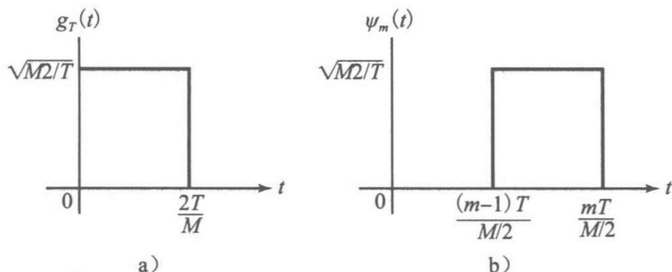


图 9-4　M 进制双正交 PPM 信号的矩形脉冲 $g_T(t)$ 及基函数 $\psi_m(t)$

量为

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,\cdots,0); \\ \mathbf{s}_2 &= (0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0,\cdots,0); \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_{M/2} &= (0,0,0,\cdots,\sqrt{\mathscr{E}_s}) \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

对应 PPM 信号波形负值的另外$M/2$维信号矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{M/2+1} &= (-\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,\cdots,0); \\ \mathbf{s}_{M/2+2} &= (0,-\sqrt{\mathscr{E}_s},0,\cdots,0); \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_M &= (0,0,0,\cdots,-\sqrt{\mathscr{E}_s}) \end{aligned} \tag{9.2.5}$$

例 9.2.1　对于图 9-5a 所示 4 个双正交信号波形，确定其矢量表示形式。

解：信号波形 $s_1(t)$与 $s_2(t)$相互正交，且分别可以表示为如下矢量

493

$$\mathbf{s}_1 = (\sqrt{\mathscr{E}_s},0)$$
$$\mathbf{s}_2 = (0,\sqrt{\mathscr{E}_s})$$

信号 $s_3(t)=-s_1(t)$，$s_4(t)=-s_2(t)$。因此，信号 $s_3(t)$和 $s_4(t)$的几何表示为

$$\mathbf{s}_3 = (-\sqrt{\mathscr{E}_s},0)$$
$$\mathbf{s}_4 = (0,-\sqrt{\mathscr{E}_s})$$

这些矢量对应的信号点如图 9-5b 所示。有趣的是，由图 9-5b 可以发现，对于 $M=4$ 双正交信号与 4 相 PSK 信号的信号点完全一致。◀

在一组 M 个双正交信号中，任意两个相互正交的信号矢量之间的距离为 $d_{mn}=\sqrt{2\mathscr{E}_s}$，而两个互为负数的信号矢量之间距离则为 $d_{mn}=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$。

与 M 进制正交信号的情况相同，基带双正交信号与适当的载波 $\cos 2\pi f_c t$ 相乘，可以生成 DSB-SC 幅度调制信号，这样就可以在带通信道中传输双正交信号。

9.2.1　M 进制双正交信号的差错概率

如 9.2 节所述，一组 $M=2^k$ 个双正交信号可以由$M/2$个正交信号及其负值信号构成。因此，可以发现双正交信号解调器相比正交信号解调器，复杂度得到降低。这个结论成立的条件是若前者采用$M/2$个互相关器或匹配滤波器实现，而后者需要 M 个互相关器或匹配滤波器。双正交信号相比正交信号也有更好的带宽利用率。

双正交信号的矢量表达式见式(9.2.4)和式(9.2.5)。为了计算最佳检测器的差错概率，假设发送信号是对应矢量 $\mathbf{s}_1=(\sqrt{\mathscr{E}_s}，0，0，\cdots，0)$的信号 $s_1(t)$。则接收信号矢量为

$$\mathbf{y} = (\sqrt{\mathscr{E}_s}+n_1,n_2,\cdots,n_{M/2}) \tag{9.2.6}$$

其中$\{n_m\}$是零均值、相互统计独立、分布相同的高斯随机变量，且方差为 $\sigma^2=N_0/2$。最

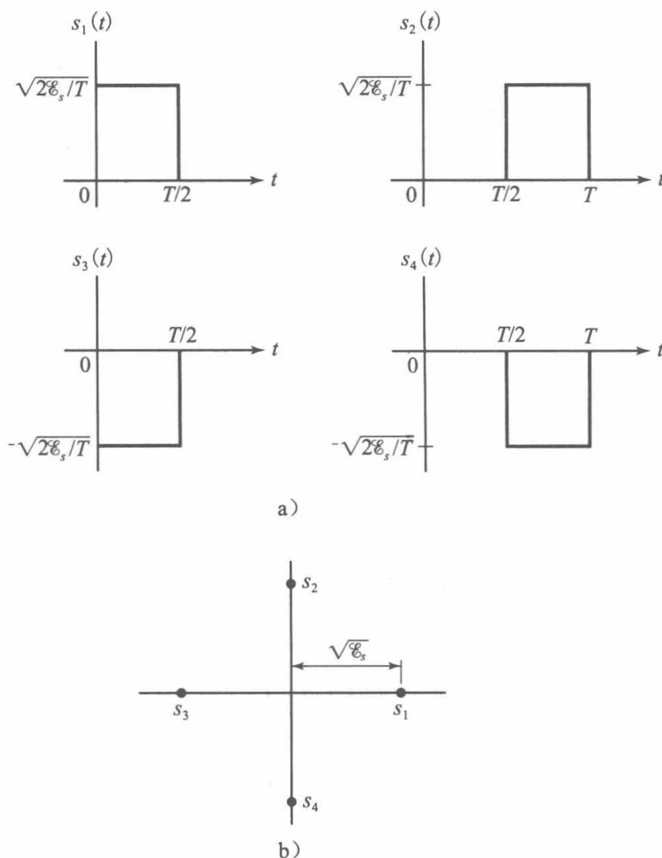


图 9-5 例 9.2.1 的 $M=4$ 双正交信号波形及信号点

佳检测器根据互相关器输出信号的幅值

$$C(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_m)=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_m=\sum_{k=1}^{M/2}y_k s_{mk},\quad m=1,2,\cdots,M/2 \tag{9.2.7}$$

选择对应互相关最大值的信号 $s_m(t)$或$-s_m(t)$判定为发送信号。按照这个判决规则，正确判决的概率等于 $y_1=\sqrt{\mathscr{E}_s}+n_1>0$ 且 y_1 大于$|y_m|=|n_m|$，$m=2$，3，…，$M/2$的概率。而

$$\begin{aligned}P(|n_m|<y_1|y_1>0)&=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\int_{-y_1}^{y_1}\mathrm{e}^{-x^2/N_0}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1/\sqrt{N_0/2}}^{y_1/\sqrt{N_0/2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{9.2.8}$$

494~495

所以正确判决概率为

$$P_c=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1/\sqrt{N_0/2}}^{y_1/\sqrt{N_0/2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{M}{2}-1}f(y_1)\,\mathrm{d}y_1$$

采用式(9.1.9)给出的 y_1 的 PDF 替换 $f(y_1)$，可得

$$P_c=\int_{-\sqrt{2\mathscr{E}_s/N_0}}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(v+\sqrt{2\mathscr{E}_s/N_0})}^{v+\sqrt{2\mathscr{E}_s/N_0}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{M}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v \tag{9.2.9}$$

因此符号错误概率为 $P_M=1-P_c$。

根据式(9.2.9)，可以对不同的 M 取值，对 P_c 及 P_M 进行数值计算。图 9-6 给出了 $m=1$，2，…，M 时 P_M 与 $\mathscr{E}_b/N_0$ 的关系曲线，其中对于 $M=2$，4，8，16 和 32，$\mathscr{E}_s=k\,\mathscr{E}_b$。可以发现此图与正交信号类似(见图 9-3)。不过，这种情况下，$M=4$ 的差错概率比

$M=2$ 的大。这是因为图 9-6 给出的是符号差错概率 P_M。如果画出等效的比特差错概率，可以发现 $M=2$ 和 $M=4$ 的曲线是重合的。在正交信号的情况下，当 $M\to\infty$（或 $k\to\infty$）时，要达到任意小的差错概率，需要的 $\mathscr{E}_b/N_0$ 最小取值为 1.6dB，即香农限。

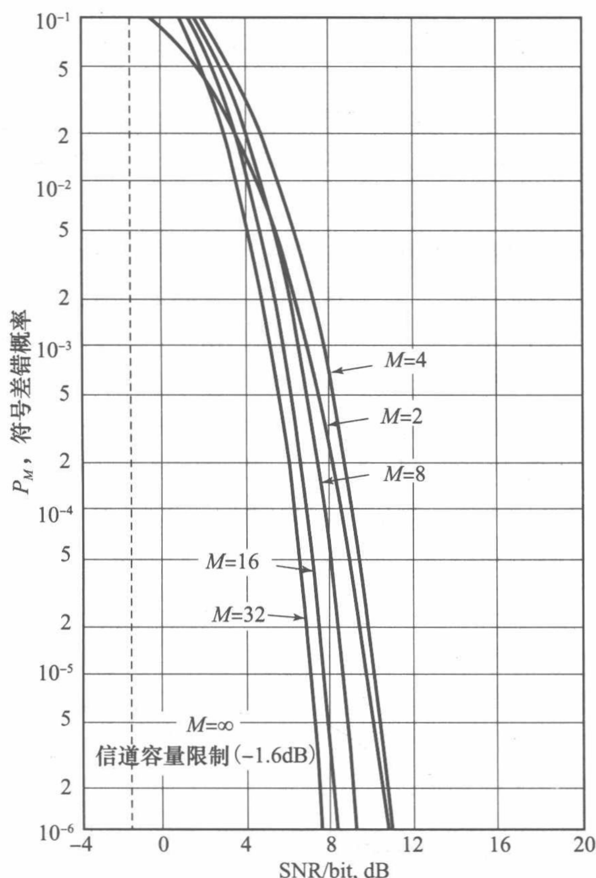


图 9-6　双正交信号符号差错概率

9.3　单纯形信号

将 M 个正交信号波形分别减去这 M 个正交信号的均值可以构成 M 个正交信号，这种正交信号的波形称为单纯形信号波形。如果有 M 个基带正交信号波形 $\{s_m(t)\}$，则单纯形信号 $\{s'_m(t)\}$ 可以表示为

$$s'_m(t)=s_m(t)-\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}s_k(t) \tag{9.3.1}$$

那么，可以得到这些信号 $\{s'_m(t)\}$ 的能量（参见习题 9.3）为

$$\mathscr{E}'_s=\int_0^T[s'_m(t)]^2\mathrm{d}t=\left(1-\frac{1}{M}\right)\mathscr{E}_s \tag{9.3.2}$$

并且

$$\int_0^T s'_m(t)\,s'_n(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathscr{E}_s}{M-1},\quad m\neq n \tag{9.3.3}$$

其中 $\mathscr{E}_s$ 是每个正交信号的能量，$\mathscr{E}'_s$ 是单纯形信号集内每个信号的能量。可以发现，单纯形信号集的波形能量小于正交信号集的波形能量。而且单纯形信号并不正交，而是负相关，每对信号波形具有相等的负值相关系数。归纳得出，在所有可能的等能量 $\mathscr{E}_s$ 的 M 进制信号波形中，单纯形信号在加性高斯噪声信道上传输信息时的差错概率最小。

一组 M 个单纯形信号的几何表示可以通过从 M 个正交信号中减去均值信号矢量得到，即

$$\mathbf{s}'_m=\mathbf{s}_m-\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{s}_k,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{9.3.4}$$

从每个正交信号矢量中减去均值信号矢量

$$\bar{\mathbf{s}}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{s}_k \tag{9.3.5}$$

496～497

相当于把 M 个正交信号的原点平移到 $\bar{\mathbf{s}}$，从而使信号集 $\{\mathbf{s}'_m\}$ 的能量最小化。

如果正交信号的信号能量是 $\mathscr{E}_s=\|\mathbf{s}_m\|^2$，那么单纯形信号的能量为

$$\mathscr{E}'_s=\|\mathbf{s}'_m\|^2=\|\mathbf{s}_m-\bar{\mathbf{s}}\|^2=\left(1-\frac{1}{M}\right)\mathscr{E}_s \tag{9.3.6}$$

原点平移不改变两个信号点的距离，即 $d=\sqrt{2\mathscr{E}_s}$。最后，M 个单纯形信号是相关的。第 m 个信号与第 n 个信号的互相关系数（归一化互相关）为

$$\gamma_{mn}=\frac{\boldsymbol{s}_m'\cdot\boldsymbol{s}_n'}{\|\boldsymbol{s}_m'\|\|\boldsymbol{s}_n'\|}=\frac{-1/M}{1-1/M}=\frac{-1}{M-1} \tag{9.3.7}$$

因此，所有信号中的每对信号具有相同的互相关系数。图 9-7 给出了一组 $M=4$ 个单纯形信号。

在 M 进制正交信号的情况下，通过将基带信号乘以适当的载波 $\cos 2\pi f_c t$ 生成 DSB-SC 信号，从而在带通信道中传输基带单纯形信号。

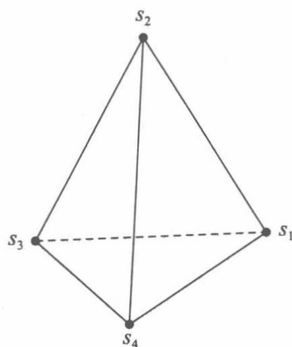


图 9-7　$M=4$ 个单纯形信号的信号星座图

9.3.1　M 进制单纯形信号的差错概率

下面分析 M 进制单纯形信号的差错概率。根据本节前面的讨论已知，单纯形信号集的 M 个信号，每一对都具有相同的互相关系数 $\gamma_{mn}=-1/(M-1)$。M 维正交信号空间中相邻信号点之间的最小间隔为$\sqrt{2\mathscr{E}_s}$。达到这个最小间隔需要的信号能量为 $\mathscr{E}_s(M-1)/M$，仅为正交信号所需能量的 $(M-1)/M$倍。相应地，单纯形信号的差错概率与正交信号差错概率相同时，需要的 SNR 可以节省

498

$$10\log(1-\gamma_{mn})=10\log\frac{M}{M-1}\text{dB} \tag{9.3.8}$$

注意，对于 $M=2$，即二进制调制，单纯形信号就是对极信号。要达到与二进制正交信号相同的性能，需要的发送信号能量（或功率）少 3dB。因此，式(9.3.8)给出的结果与前面对二进制正交信号与对极信号的比较是一致的。对于 M 的较大取值，正交信号与单纯形信号的性能差别接近于零。

9.4　二进制编码信号

发送数字信息的信号波形也可以由一组 M 个二进制码字构成，码字形式如下

$$\boldsymbol{c}_m=(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mN}),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{9.4.1}$$

其中对于所有 m 和 j 有 $c_{mj}=0$ 或 1。在这种形式中，N 称为码字的块长或维度。给定 M 个码字，将 $c_{mj}=1$ 映射到时长为T/N的脉冲 $g_T(t)$，将 $c_{mj}=0$ 映射到时长为T/N的负脉冲$-g_T(t)$，可以构造 M 个信号波形。

例 9.4.1　给定码字

$$c_1=[1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0]$$
$$c_2=[1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1]$$
$$c_3=[1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1]$$
$$c_4=[0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0]$$

按照前文所述方法，用矩形脉冲 $g_T(t)$构成一组 $M=4$ 个信号波形。

解：码字中的比特 1 映射到持续时间为$T/5$的矩形脉冲 $g_T(t)$，比特 0 映射到矩形脉冲$-g_T(t)$。可以构成如图 9-8 所示的 4 个波形，这 4 个波形对应上述 4 个码字。◀

给定如下形式的一组 M 个二进制码字

$$\boldsymbol{c}_m=(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mN}),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{9.4.2}$$

其中对于所有 m 和 j 有 $c_{mj}=0$ 或 1，考虑这些码字对应的 M 个信号的几何表示。这 M 个 N 维信号的几何矢量表示形式如下

$$\boldsymbol{s}_m=(s_{m1},s_{m2},\cdots,s_{mN}),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{9.4.3}$$

499

其中对于所有 m 和 j 有 $s_{mj}=\pm\sqrt{\mathscr{E}_s/N}$。可见每个信号波形的能量为$\mathscr{E}_s$。

一般而言，由 2^N 个可能的二进制码字可以构成 2^N 个可能的信号。M 个码字是 2^N 个可能二进制码字的子集。可以看到，以立方体的中心为原点，2^N 个信号点对应 N 维超立

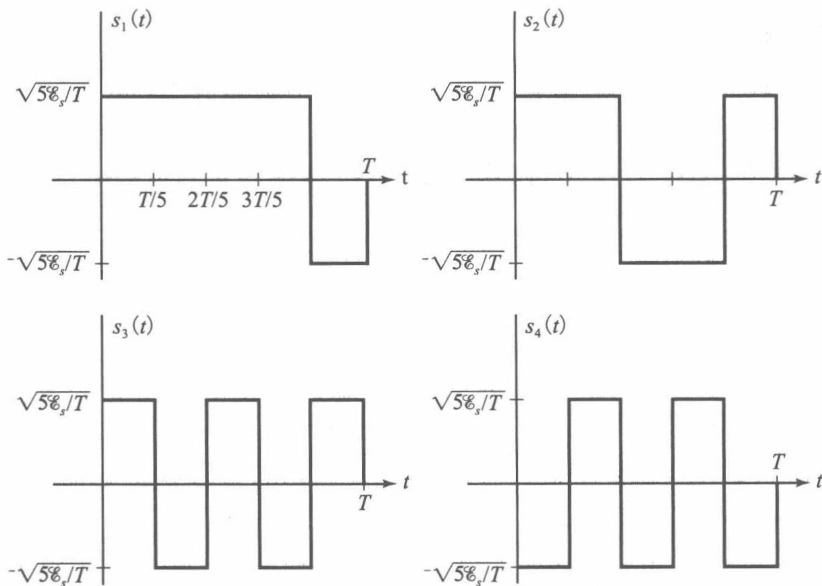


图 9-8　例 9.4.1 根据 4 个码字构成的维度 $N=5$ 的 $M=4$ 个信号波形

方体的顶点。图 9-9 给出了维数 $N=2$ 和 $N=3$ 的情况。

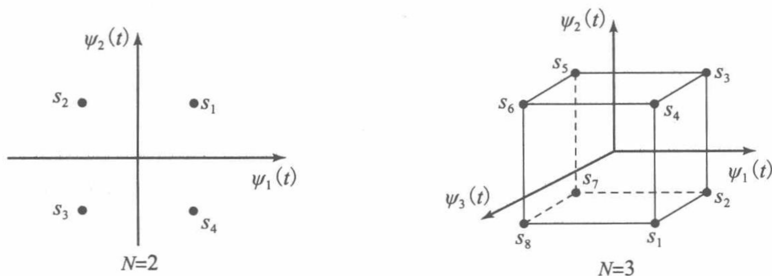


图 9-9　二进制码产生信号的信号点

按照上述方式构成的 M 个信号具有相等能量 $\mathscr{E}_s$。根据从 2^N 个可能的信号中选择 M 个信号的方法，可以确定每对信号的互相关系数。这个问题将在第 13 章讨论。可以推出(参见习题 9.2)每对相邻信号点的互相关系数为

$$\gamma = \frac{N-2}{N} \tag{9.4.4}$$

并且对应的欧氏距离为

$$d = 2\sqrt{\mathscr{E}_s/N} \tag{9.4.5}$$

如前所述，相邻信号点间距离影响检测器的性能。

500

二进制编码信号的差错概率

根据上面的讨论，一组如下形式的 N 维二进制码字

$$\boldsymbol{c}_m = (c_{m1}, c_{m2}, \cdots, c_{mN}), \quad m = 1, 2, \cdots, M \tag{9.4.6}$$

对应的几何矢量表示形式为

$$\boldsymbol{s}_m = (s_{m1}, s_{m2}, \cdots, s_{mN}), \quad m = 1, 2, \cdots, M \tag{9.4.7}$$

其中对于所有 m 和 j 有 $s_{mj} = \pm\sqrt{\mathscr{E}_s/N}$，$\mathscr{E}_s$ 为每个信号波形的能量。编码系统的差错概率可以根据式(8.4.42)的联合界得到。采用二进制编码信号的数字通信系统性能将在第 13 章讨论。

9.5 频移键控

实现数字传输的最简单的频率调制形式是8.8.2节描述的二进制频率调制(FSK)。在二进制FSK中，采用两个不同的频率，例如 f_0 和 $f_1=f_0+\Delta f$，传输二进制信息序列。稍后考虑对频率间隔 $\Delta f=f_1-f_0$ 的选择。那么两个信号波形可以表示为

501

$$
\begin{aligned}
u_0(t)&=\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_0 t,0\leqslant t\leqslant T_b \\
u_1(t)&=\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_1 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T_b
\end{aligned}
\tag{9.5.1}
$$

其中 $\mathscr{E}_b$ 为每比特信号能量，T_b 为比特持续时间。

更一般地，M 进制FSK可用来传送由 $k=\log_2 M$ 个比特构成的信息分组。在这种情况下，M 个信号波形可以表示为

$$
u_m(t)=\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_s}{T}}\cos(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t),\quad m=0,1,\cdots,M-1,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{9.5.2}
$$

其中 $\mathscr{E}_s=k\,\mathscr{E}_b$ 是每个符号的能量，$T=kT_b$ 为符号间隔，Δf 为连续频率之间的频率间隔，即 $\Delta f=f_m-f_{m-1}$，其中 $f_m=f_c+m\Delta f$。

MFSK信号波形具有相等的能量 $\mathscr{E}_s$。频率间隔 Δf 决定了对 M 个可能的发送信号的识别程度。作为一对信号波形之间相似性(或不同性)的度量，可以定义如下相关系数

$$
\gamma_{mn}=\frac{1}{\mathscr{E}_s}\int_0^T u_m(t)u_n(t)\mathrm{d}t \tag{9.5.3}
$$

将 $u_m(t)$ 与 $u_n(t)$ 的表达式代入式(9.5.3)中，可得

$$
\begin{aligned}
\gamma_{mn}&=\frac{1}{\mathscr{E}_s}\int_0^T\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_s}{T}}\cos(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t)\cos(2\pi f_c t+2\pi n\Delta f t)\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{T}\int_0^T\cos 2\pi(m-n)\Delta f t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\cos[4\pi f_c t+2\pi(m+n)\Delta f t]\mathrm{d}t \\
&=\frac{\sin 2\pi(m-n)\Delta f T}{2\pi(m-n)\Delta f T}
\end{aligned}
\tag{9.5.4}
$$

当 $f_c\gg 1/T$ 时，上式中第二个积分项为零。图9-10给出了 γ_{mn} 关于频率间隔 Δf 的函数关系曲线，可以看出，当 Δf 是 $1/2T$ 的整数倍时，信号波形是正交的。因此，满足正交性的相邻频率的最小频率间隔为 $1/2T$。还可以看到，当频率间隔 $\Delta f=0.715/T$ 时，相关系数达到最小值，$\gamma_{mn}=-0.217$。

502

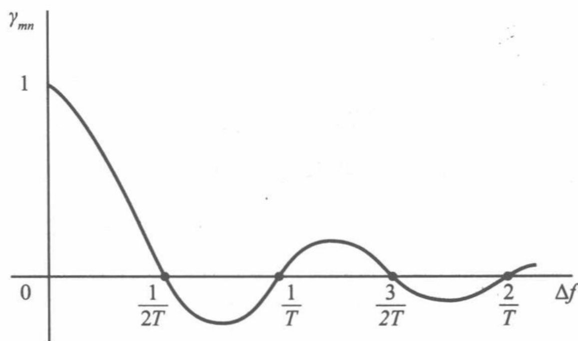


图9-10 FSK信号互相关系数与频率间隔的关系

M 进制正交FSK信号波形可以用以下 M 个 M 维的正交矢量表示

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_0&=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,\cdots,0); \\
\mathbf{s}_1&=(0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0,\cdots,0); \\
&\vdots \\
\mathbf{s}_{M-1}&=(0,0,0,\cdots,\sqrt{\mathscr{E}_s})
\end{aligned}
\tag{9.5.5}
$$

其中，基函数为 $\psi_m(t)=\sqrt{2/T}\cos 2\pi(f_c+m\Delta f)t$。对于所有的 m 和 n，任意两个信号矢量之间的距离均为 $d=\sqrt{2\,\mathscr{E}_s}$，这也是 M 个信号之间的最小距离。

9.5.1 M 进制 FSK 的解调

假设在加性高斯白噪声信道上传输 FSK 信号。并且假设各信号在信道传输过程中都会产生相位偏移。那么解调器输入端经滤波后的接收信号可以表示为

$$r(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t+\phi_m)+n(t) \tag{9.5.6}$$

其中，ϕ_m 为第 m 个信号的相位偏移，$n(t)$为加性带通噪声，可以表示为

$$n(t)=n_c(t)\cos 2\pi f_c t-n_s(t)\sin 2\pi f_c t \tag{9.5.7}$$

MFSK 信号的解调和检测方法有两种。一种方法是估计出 M 个载波相位偏移$\{\phi_m\}$，并进行相位相干解调与检测。另一种方法称为非相干解调与检测，是在 FSK 信号的解调和检测中忽略载波相位。 503

在相位相干解调中，接收信号 $r(t)$与 M 个可能的接收信号 $\cos(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t+\hat{\phi}_m)$，$m=0$，1，…，$M-1$，分别进行相关运算，其中$\{\hat{\phi}_m\}$为载波相位估计值。这种解调方法的方框图如图 9-11 所示。可以看到，当$\hat{\phi}_m\neq\phi_m$，$m=0$，1，…，$M-1$(即相位估计不完美)时，保证解调器中信号正交所需的频率间隔为 $\Delta f=1/T$(参见习题 9.10)，这个频率间隔是 $\phi=\hat{\phi}$ 时保证信号正交性所需的最小频率间隔的两倍。

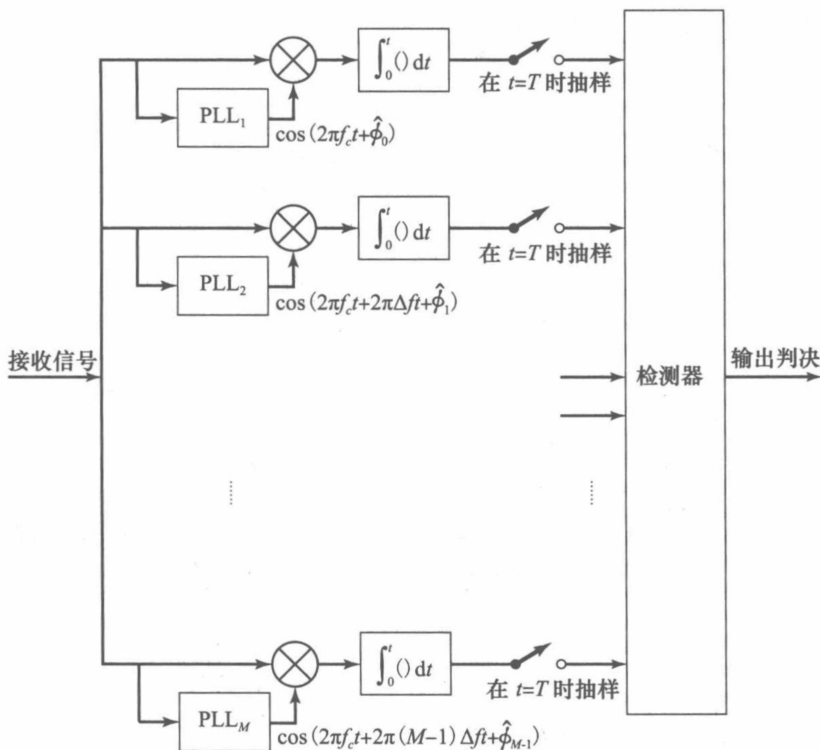


图 9-11　M 进制 FSK 信号的相位相干解调

对 M 个载波相位进行估计，使 FSK 信号相干相位解调变得非常复杂和不实际，特别是信号数量很大时尤为严重。因此不再讨论 FSK 信号的相干检测。

下面分析一种无需载波相位信息的解调和检测方法，如图 9-12 所示。这种情况下，为每个信号波形设置两个相关器，则共有 $2M$ 个相关器。对于 $m=0$，1，…，$M-1$，接收信号与如下(正交载波)基函数进行相关运算

$$\psi_{cm}(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t)$$

$$\psi_{sm}(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_c t+2\pi m\Delta f t)$$

504 ~ 505

对相关器的 $2M$ 个输出信号，在信号间隔结束时刻抽样，并将这些样本送至检测器。那么若发送第 m 个信号，则检测器的 $2M$ 个样本可以表示为

$$y_{kc}=\sqrt{\mathscr{E}_s}\left[\frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta fT}{2\pi(k-m)\Delta fT}\cos\phi_m-\frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta fT-1}{2\pi(k-m)\Delta fT}\sin\phi_m\right]+n_{kc}$$

$$y_{ks}=\sqrt{\mathscr{E}_s}\left[\frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta fT-1}{2\pi(k-m)\Delta fT}\cos\phi_m+\frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta fT}{2\pi(k-m)\Delta fT}\sin\phi_m\right]+n_{ks}$$

(9.5.8)

其中 n_{kc} 和 n_{ks} 表示抽样输出中的高斯噪声分量。

可以看出，当 $k=m$ 时，检测器的抽样值为

$$y_{mc}=\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos\phi_m+n_{mc}$$

$$y_{ms}=\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin\phi_m+n_{ms}\qquad(9.5.9)$$

而且，当 $k\neq m$ 时，只要连续频率的间隔为 $\Delta f=1/T$，抽样值 y_{kc} 和 y_{ks} 中的信号分量消失，与相移量 ϕ_k 无关。这种情况下，其他 $2(M-1)$ 个相关器输出仅包含噪声，即

$$y_{kc}=n_{kc},\quad y_{ks}=n_{ks},k\neq m\qquad(9.5.10)$$

在下面的推导中，假设 $\Delta f=1/T$，则信号正交。

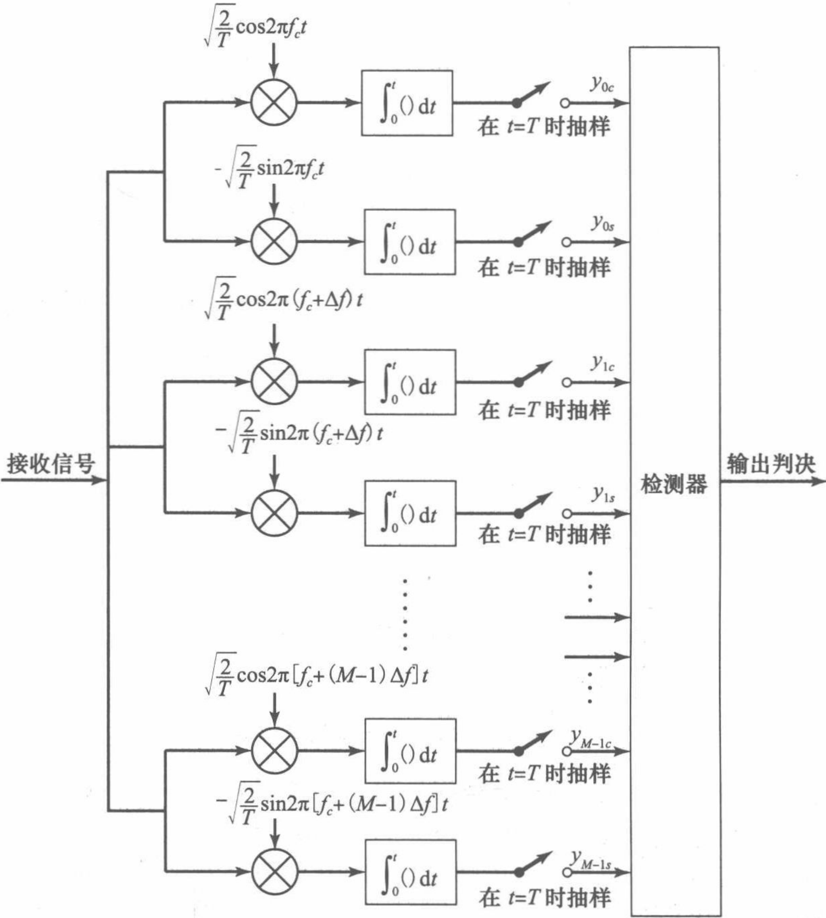


图 9-12 M 进制 FSK 信号的非相干解调

易见(参考习题 9.11)，$2M$ 个噪声样本 $\{n_{kc}\}$ 和 $\{n_{ks}\}$ 是均值为 0，方差均为 $\sigma^2=N_0/2$ 的

互不相关的高斯随机变量。因此，y_{mc} 与 y_{ms} 在以 ϕ_m 条件下的联合条件概率密度函数为

$$f_{Y_m}(y_{mc},y_{ms}|\phi_m)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-[(y_{mc}-\sqrt{\mathscr{E}_s}\cos\phi_m)^2+(y_{ms}-\sqrt{\mathscr{E}_s}\sin\phi_m)^2]/2\sigma^2} \tag{9.5.11}$$

对于 $k\neq m$ 有

$$f_{Y_k}(y_{kc},y_{ks})=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(y_{kc}^2+y_{ks}^2)^2/2\sigma^2} \tag{9.5.12}$$

如果给定 $2M$ 个随机变量的观测值$\{y_{kc}，y_{ks}，k=0，1，\cdots，M-1\}$，则最佳检测器将选择最大后验概率所对应的信号

$$P(\text{发送 }\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y})\equiv P(\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{y}),\quad m=0,1,\cdots,M-1 \tag{9.5.13}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为分量为$\{y_{kc}，y_{ks}，k=0，1，\cdots，M-1\}$的 $2M$ 维矢量。下面推导二进制 FSK 信号的最佳非相干检测器的形式，该形式可以直接推广到 M 进制 FSK 信号。 506

9.5.2 非相干二进制 FSK 的最佳检测器

在二进制正交 FSK 中，两个后验概率为

$$P(\boldsymbol{s}_0|\boldsymbol{y})=\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)P(\boldsymbol{s}_0)}{f_Y(\boldsymbol{y})}$$

$$P(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{y})=\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)P(\boldsymbol{s}_1)}{f_Y(\boldsymbol{y})} \tag{9.5.14}$$

因此最佳检测准则可以表示为

$$P(\boldsymbol{s}_0|\boldsymbol{y})\underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}}P(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{y}) \tag{9.5.15}$$

或者等效为

$$\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)P(\boldsymbol{s}_0)}{f_Y(\boldsymbol{y})}\underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}}\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)P(\boldsymbol{s}_1)}{f_Y(\boldsymbol{y})} \tag{9.5.16}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为四维矢量，$\boldsymbol{y}=(y_{0c}，y_{0s}，y_{1c}，y_{1s})$。式(9.5.16)中的关系可以简化为判决准则

$$\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)}{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)}\underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}}\frac{P(\boldsymbol{s}_1)}{P(\boldsymbol{s}_0)} \tag{9.5.17}$$

式(9.5.17)中左边的概率密度之比称为似然比，可记为

$$\Lambda(\boldsymbol{y})=\frac{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)}{f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)} \tag{9.5.18}$$

式(9.5.17)的右边是两个先验概率的比值，当两个信号等概率时取值为单位1。

似然比表达式中的概率密度函数 $f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)$和 $f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)$可以表示为

$$f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_0)=f_{Y_1}(y_{1c},y_{1s})\int_0^{2\pi}f_{Y_0}(y_{0c},y_{0s}|\phi_0)f_\Phi(\phi_0)d\phi_0$$

$$f_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s}_1)=f_{Y_0}(y_{0c},y_{0s})\int_0^{2\pi}f_{Y_1}(y_{1c},y_{1s}|\phi_1)f_\Phi(\phi_1)d\phi_1 \tag{9.5.19}$$

其中 $f_{Y_m}(y_{mc}，y_{ms}|\phi_m)$和 $f_{Y_k}(y_{kc}，y_{ks})(m\neq k)$分别如式(9.5.11)和式(9.5.12)所示。通过对 $f_{Y_m}(y_{mc}，y_{ms}|\phi_m)$取平均即可消去载波相位 ϕ_0 和 ϕ_1。

ϕ_m 的均匀概率密度函数表明载波相位影响最小，称之为 ϕ_m 的最不利概率密度函数。当 $f_{\Phi_m}(\phi_m)=1/2\pi，0\leqslant\phi_m\leqslant 2\pi$，代入式(9.5.19)的积分项中，可以得到 507

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_{Y_m}(y_{mc},y_{ms}|\phi_m)d\phi_m\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(y_{mc}^2+y_{ms}^2+\mathscr{E}_s)/2\sigma^2}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\sqrt{\mathscr{E}_s}(y_{mc}\cos\phi_m+y_{ms}\sin\phi_m)/\sigma^2}d\phi_m\end{aligned} \tag{9.5.20}$$

但是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{\mathscr{E}_s}(y_{mc}\cos\phi_m + y_{ms}\sin\phi_m)/\sigma^2}\,d\phi_m = I_0\left(\frac{\sqrt{\mathscr{E}_s(y_{mc}^2+y_{ms}^2)}}{\sigma^2}\right) \tag{9.5.21}$$

其中 $I_0(x)$是零阶修正贝塞尔函数。这个函数如图 9-13 所示，是自变量的增函数。$I_0(x)$的幂级数表达式如下

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \tag{9.5.22}$$

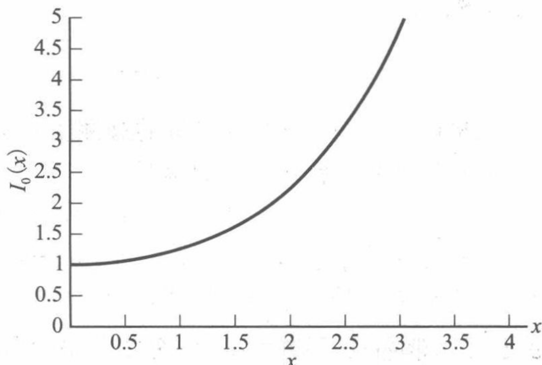


图 9-13 $I_0(x)$图

根据式(9.5.17)到式(9.5.19)，可以得到似然比的表达式

$$\Lambda(\boldsymbol{y}) = \frac{I_0\sqrt{\mathscr{E}_s(y_{0c}^2+y_{0s}^2)}/\sigma^2)}{I_0\sqrt{\mathscr{E}_s(y_{1c}^2+y_{1s}^2)}/\sigma^2)} \mathop{\gtrless}_{s_1}^{s_0} \frac{P(\boldsymbol{s}_1)}{P(\boldsymbol{s}_0)} \tag{9.5.23}$$

因此，最佳检测器计算两个包络

508

$$y_0 = \sqrt{y_{0c}^2 + y_{0s}^2}$$

和

$$y_1 = \sqrt{y_{1c}^2 + y_{1s}^2}$$

以及相应的贝塞尔函数值

$$I_0(\sqrt{\mathscr{E}_s y_0^2}/\sigma^2)$$

和

$$I_0(\sqrt{\mathscr{E}_s y_1^2}/\sigma^2)$$

则可以得到似然比。可以看到，这个计算需要知道噪声方差 σ^2 和信号能量 $\mathscr{E}_s$。进一步将似然比与阈值$P(\boldsymbol{s}_1)/P(\boldsymbol{s}_0)$比较，可以确定发送的是哪个信号。

当两个信号概率相等时，可以简化最佳检测器。这种情况下，门限变为单位 1，并且由于贝塞尔函数的单调性，最佳检测准则就可以简化为

$$\sqrt{y_{0c}^2 + y_{0s}^2} \mathop{\gtrless}_{s_1}^{s_0} \sqrt{y_{1c}^2 + y_{1s}^2} \tag{9.5.24}$$

所以，最佳检测器可以根据如下两个包络

$$y_0 = \sqrt{y_{0c}^2 + y_{0s}^2}$$

和

$$y_1 = \sqrt{y_{1c}^2 + y_{1s}^2}$$

进行判决。因此，称该最佳检测器为包络检测器。

显然，根据解调器输出端接收信号样本，计算包络并判决发送的是哪一个信号，与载波信号相位 ϕ_m 无关。同样，也可以通过计算包络平方值 y_0^2 和 y_1^2 进行判决，这种检测器称为平方律检测器。图 9-14 给出了解调器与平方律检测器的原理框图。

二进制 FSK 的最佳解调器和检测器可以直接推广到 M 进制正交 FSK 信号。如图 9-12 所示，在采样时刻，最佳解调器输出信号由 $2M$ 个矢量分量(y_{0c}，y_{0s}，y_{1c}，y_{1s}，…，y_{M-1c}，y_{M-1s})组成。最佳非相干检测器计算的 M 个包络为

$$y_m = \sqrt{y_{mc}^2 + y_{ms}^2}, \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.5.25}$$

因此，接收信号的未知载波相位不会影响发送信号的判决。当 M 个信号以相等的概率发送时，最佳检测器选取包络值(或包络平方值)最大的信号。当发送信号的概率不相等时，

509

最佳检测器必须计算式(9.5.13)中的 M 个后验概率，然后选择最大后验概率所对应的信号。

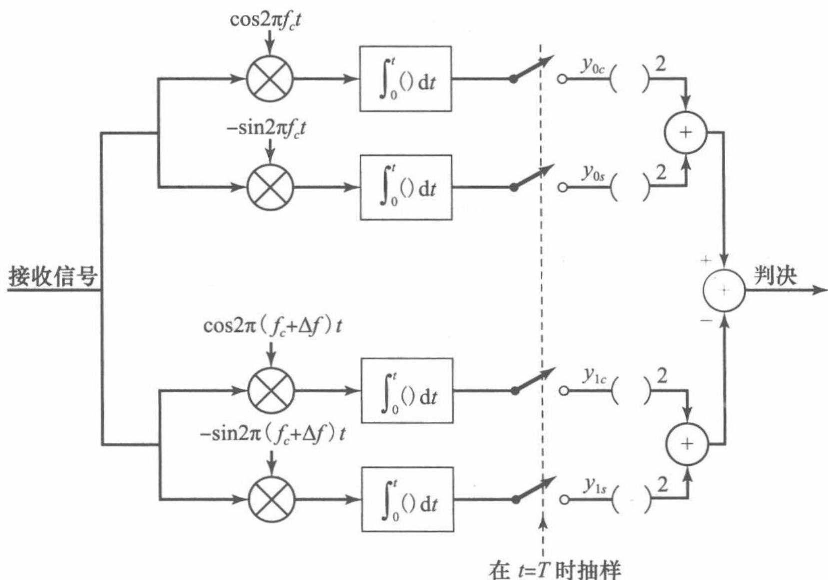


图 9-14 二进制 FSK 信号的解调和平方律检测图

9.5.3 M 进制 FSK 信号非相干检测的差错概率

考虑非相干检测的 M 进制正交 FSK 信号。假定 M 个信号的先验概率相同，并且在间隔 $0 \leqslant t \leqslant T$ 发送信号 $u_0(t)$。

检测器采用的 M 元判决测度是 M 个包络

$$y_m = \sqrt{y_{mc}^2 + y_{ms}^2}, \quad m = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.5.26}$$

其中

$$\begin{aligned} y_{0c} &= \sqrt{\mathscr{E}_s}\cos\phi_0 + n_{0c} \\ y_{0s} &= \sqrt{\mathscr{E}_s}\sin\phi_0 + n_{0s} \end{aligned} \tag{9.5.27}$$

且

$$\begin{aligned} y_{mc} &= n_{mc}, \quad m = 1,\cdots,M-1 \\ y_{ms} &= n_{ms}, \quad m = 1,\cdots,M-1 \end{aligned} \tag{9.5.28}$$

加性噪声分量$\{n_{mc}\}$与$\{n_{ms}\}$是相互统计独立的零均值高斯随机变量，方差均为 $\sigma^2 = N_0/2$。所以，检测器输入端随机变量的概率密度函数为

510

$$f_{Y_0}(y_{0c},y_{0s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(y_{0c}^2+y_{0s}^2+\mathscr{E}_s)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{\sqrt{\mathscr{E}_s(y_{0c}^2+y_{0s}^2)}}{\sigma^2}\right) \tag{9.5.29}$$

$$f_{Y_m}(y_{mc},y_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(y_{mc}^2+y_{ms}^2)/2\sigma^2}, \quad m = 1,2,\cdots,M-1 \tag{9.5.30}$$

下面对式(9.5.29)与式(9.5.30)给出的联合概率密度函数进行变量替换。定义归一化变量

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{\sqrt{Y_{mc}^2 + Y_{ms}^2}}{\sigma}, \\ \Theta_m &= \tan^{-1}\frac{Y_{ms}}{Y_{mc}} \end{aligned} \tag{9.5.31}$$

显然，$Y_{mc} = \sigma R_m \cos\Theta_m$ 且 $Y_{ms} = \sigma R_m \sin\Theta_m$。该变换的雅可比(Jacobian)行列式为

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \sigma\cos\Theta_m & \sigma\sin\Theta_m \\ -\sigma R_m\sin\Theta_m & \sigma R_m\cos\Theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 R_m \tag{9.5.32}$$

相应地，

$$f_{R_0\Theta_0}(r_0,\theta_0)=\frac{r_0}{2\pi}e^{-(r_0^2+2\mathscr{E}_s/N_0)/2}I_0\left(\frac{\sqrt{2\mathscr{E}_s}}{N_0}r_0\right) \tag{9.5.33}$$

$$f_{R_m\Theta_m}(r_m,\theta_m)=\frac{r_m}{2\pi}e^{-r_m^2/2},\quad m=1,2,\cdots,M-1 \tag{9.5.34}$$

最后求 $f_{R_m\Theta_m}(r_m,\ \theta_m)$关于 Θ_m 的均值，就可以消去式(9.5.33)与式(9.5.34)中的因子 2π(参见例 5.1.11 与习题 5.30)。这样可以得到 R_0 服从莱斯(Rice)概率分布，$R_m(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$，服从瑞利(Rayleigh)分布。

正确判决概率就是 $R_0>R_1$，$R_0>R_2$，…且 $R_0>R_{M-1}$ 的概率。则

$$\begin{aligned}P_c&=P(R_1<R_0,R_2<R_0,\cdots,R_{M-1}<R_0)\\&=\int_0^\infty(R_1<R_0,R_2<R_0,\cdots,R_{M-1}<R_0\mid R_0=x)f_{R_0}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{9.5.35}$$

因为随机变量 R_m，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1$ 是独立同分布的，所以式(9.5.35)中以 R_0 为条件的联合条件概率可以分解为 $M-1$ 个相同概率的乘积，即

$$P_c=\int_0^\infty[P(R_1<R_0\mid R_0=x)]^{M-1}f_{R_0}(x)\mathrm{d}x \tag{9.5.36}$$

其中

511

$$P(R_1<R_0\mid R_0=x)=\int_0^x f_{R_1}(r_1)dr_1=1-e^{-x^2/2} \tag{9.5.37}$$

式(9.5.37)中第 $M-1$ 次幂可以表示为

$$[1-e^{-x^2/2}]^{M-1}=\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n\binom{M-1}{n}e^{-nx^2/2} \tag{9.5.38}$$

将上式代入式(9.5.36)，并对 x 求积分，可以得到正确判决概率为

$$P_c=\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n\binom{M-1}{n}\frac{1}{n+1}e^{-n\rho_s/(n+1)} \tag{9.5.39}$$

其中 $\rho_s=\mathscr{E}_s/N_0$ 为每码元信噪比。于是，符号差错概率 $P_M=1-P_c$ 变为

$$P_M=\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^{n+1}\binom{M-1}{n}\frac{1}{n+1}e^{-nk\rho_b/(n+1)} \tag{9.5.40}$$

其中 $\rho_b=\mathscr{E}_b/N_0$ 为每比特信噪比。

对于二进制 FSK($M=2$)而言，式(9.5.40)可以简化为

$$P_2=\frac{1}{2}e^{-\rho_b/2} \tag{9.5.41}$$

对于 $M>2$，根据 9.1.1 节给出的关系式

$$P_2=\frac{2^{k-1}}{2^k-1}P_M \tag{9.5.42}$$

可以计算比特差错概率。图 9-15 给出了 $M=2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$ 时比特差错概率与每比特信噪比 ρ_b 的函数关系曲线。可以发现，与 M 进制正交信号的相干检测(参见 9.1.1 节)相同，对于任意给定的比特差错概率，每比特 SNR 随着

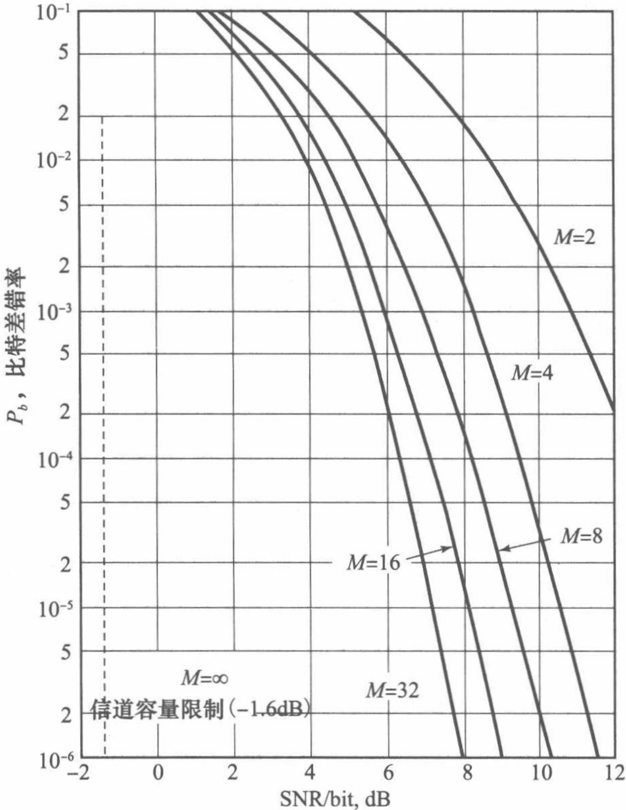


图 9-15　正交 FSK 信号非相干检测的比特差错概率

M 的增大而降低。12.6 节将证明，在满足每比特 SNR 大于香农限 -1.6dB 的条件下，$M\to\infty$（即 $k=\log_2 M\to\infty$）时的比特差错概率 P_b 可以达到任意小值。

例 9.5.1　比较式(9.5.41)给出的二进制 FSK 的差错概率与式(8.6.42)给出的二进制 DPSK 的差错概率。

解：二进制 DPSK 的差错概率为

$$P_2 = \frac{1}{2}e^{-\rho_b}$$

与二进制 FSK 的差错概率相比可以看出，要达到相同的性能，二进制 FSK 所需的发送信号能量为二进制 DPSK 的两倍。◀

512

9.6 有记忆的调制系统

目前为止我们讨论的系统都是无记忆的，即任意间隔中发送的信号仅与该间隔中当前信息有关，不依赖于之前间隔中所发送的信息。本节将讨论有记忆的调制系统。这类系统中，每个间隔中发送的信号不仅与当前信息有关，还与前面已经发送的信息有关。我们将看到这类调制方法具有更高的带宽效率，而且可以利用调制系统中的因有存储器以达到更好的性能。

9.6.1 连续相位 FSK

利用 $M=2^k$ 个调谐到期望频率 $f_c+m\Delta f\equiv f_m$ 的独立振荡器，并根据信号间隔内待发送的特定 k 比特码元，选择 M 个频率之一，可以产生普通的 FSK 信号。但是，相邻信号间隔中，从一个振荡器输出到另一个振荡器输出的突然切换，会在信号主频带以外产生相当大的频谱旁瓣，且这些旁瓣随频率间隔的衰减比较缓慢。因此，这种调制方式会浪费信道带宽。

513

为了避免信号频谱旁瓣过大，可以用携带信息的信号对相位连续变化的单个载波进行频率调制，得到相位连续的频率调制信号，称为连续相位 FSK。

为了表示 CPFSK 信号，先考虑一个 PAM 信号

$$v(t) = \sum_n a_n g_T(t-nT) \tag{9.6.1}$$

其中的幅值是将二进制信息序列中的 k 比特分组映射为幅度电平 ±1，±3，…，$\pm(M-1)$而得到的，并且 $g_T(t)$是幅度为$1/2T$，持续时间为 T 的矩形脉冲。使用信号 $v(t)$对载波进行频率调制，则频率已调载波为

$$u(t) = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos\left[2\pi f_c t + 4\pi T f_d\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{9.6.2}$$

其中 f_d 为峰值频率偏移。注意到载波的瞬时频率为 $f_c+2Tf_d v(t)$。

可以发现，虽然 $v(t)$包含不连续点，但 $v(t)$的积分是连续的。可将载波相位表示为

$$\theta(t;\boldsymbol{a}) = 4\pi T f_d\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.6.3}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 表示信号幅度序列。因为 $\theta(t;\boldsymbol{a})$为 t 的连续函数，所以得到的是连续相位的信号。

在区间 $nT\leqslant t\leqslant(n+1)T$ 中的载波相位可以由式(9.6.3)积分确定，即

$$\begin{aligned}\theta(t;\boldsymbol{a}) &= 2\pi f_d T\sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k + 2\pi(t-nT)f_d a_n\\ &= \theta_n + 2\pi h a_n q(t-nT)\end{aligned} \tag{9.6.4}$$

其中 h，θ_n 和 $q(t)$分别定义为

$$h = 2f_d T \tag{9.6.5}$$

$$\theta_n = \pi h\sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k \tag{9.6.6}$$

514

$$q(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t/2T, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 1/2, & t>T\end{cases} \tag{9.6.7}$$

参数 h 称为调制指数。注意 θ_n 表示 $(n-1)T$ 时刻之前的所有符号的相位累积（记忆），信号$q(t)$为矩形脉冲的积分，如图 9-16 所示。

画出信息序列$\{a_n\}$所有可能取值产生的全部相位轨迹 $\theta(t;\ \boldsymbol{a})$，对下面的讨论是很有意义的。例如，对于二进制符号 $a_n=\pm1$，从 $t=0$ 时开始的相位轨迹如图 9-17 所示。为了进行比较，图 9-18 给出了四进制 CPFSK（$a_n=\pm1$，±3）的相位轨迹。这些相位轨迹图称为相位树。可以看到，因为脉冲信号 $g_T(t)$是矩形的，所以相应的相位树为分段线性的。如果使用不包含间断点的连续脉冲，可以获得更平滑的相位轨迹和相位树。

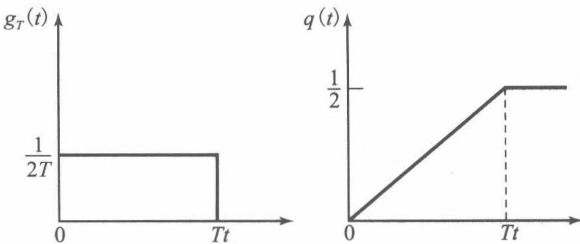


图 9-16　信号图 $g_T(t)$及其积分 $q(t)$

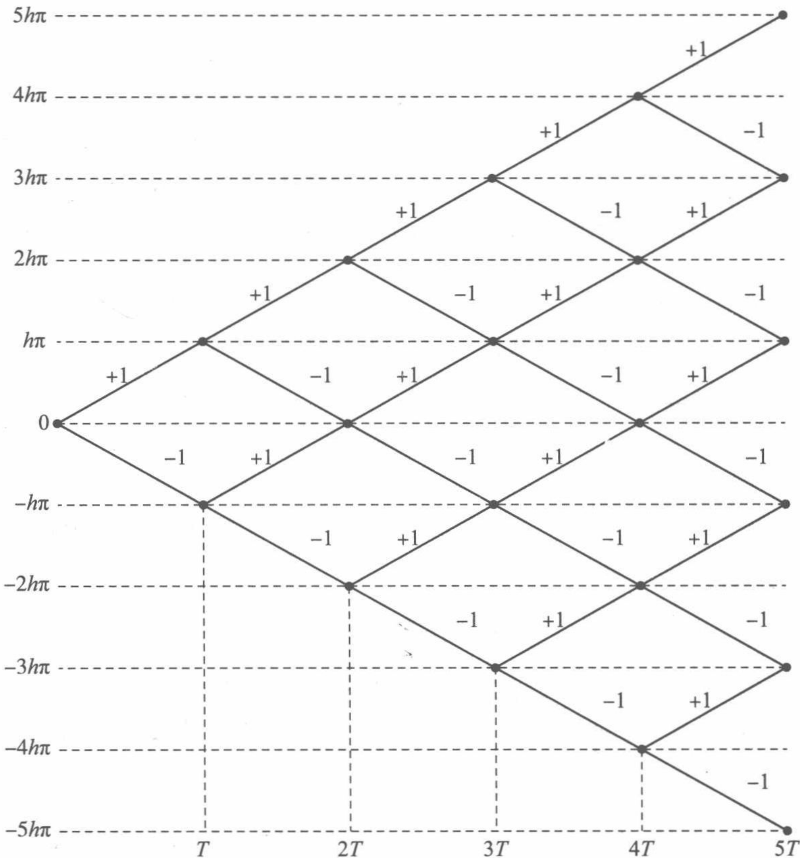


图 9-17　二进制 CPFSK 相位轨迹

这些图中给出的相位树随时间增长。但是载波相位仅在 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的范围内是唯一的，等价于，从 $\theta=-\pi$ 到 $\theta=\pi$ 的范围内是唯一的。对相位轨迹进行模 2π 计算，例如在区间$(-\pi,\ \pi)$内进行模 2π 计算，则其相位树简化为相位栅格图。

仅在时刻 $t=nT$ 处标出信号相位的终点相位值，可以得到更简单的相位轨迹表示方法。在这种情况下，限制调制指数 h 为有理数。特别地，假定 $h=m/p$，其中 m 和 p 互为质数。那么，在 $t=nT$ 时刻，m 为偶数时，终点相位为

$$\Theta_s = \left\{0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \cdots, \frac{(p-1)\pi m}{p}\right\} \tag{9.6.8}$$

且 m 为奇数时，终点相位为

$$\Theta_s = \left\{0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \cdots, \frac{(2p-1)\pi m}{p}\right\} \tag{9.6.9}$$

因此，当 m 为偶数时有 p 个终点相位，当 m 为奇数时有 $2p$ 个终点相位。例如，$h=1/2$ 的二进制 CPFSK 有 4 个终点相位状态，即 0，$\pi/2$，π，$3\pi/2$，该信号的状态栅格图如图 9-19 所示。在状态栅格图中，从一个状态到另一个状态的相位转移并不是真正的相位轨迹，而是代表相位转移到 $t=nT$ 时刻的终点状态。

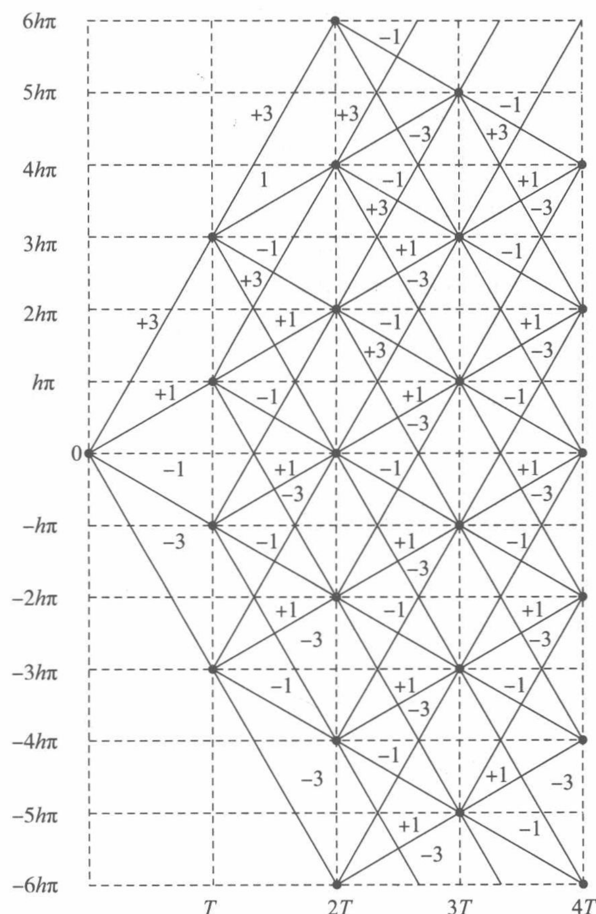


图 9-18　四进制 CPFSK 相位轨迹

状态栅格图的另一种表示法是状态图，它也可以说明 $t=nT$ 时刻的状态转移，这是 CPFSK 信号的一种更为简洁的表示方法。状态图中仅画出可能的终点状态及其相位转移，并未将时间作为一个变量明确地显示出来。例如，图 9-20 给出了 $h=1/2$ 的二进制 CPFSK 信号的状态图。

515

应该强调，与 PAM、PSK 和 QAM 不同，CPFSK 信号具有随时间变化的载波相位，因此不能用信号空间中的离散点来表示。相反，CPFSK 信号幅度恒定，可以在二维空间中用圆来表示，圆上的点表示载波幅度及相位随时间变化的轨迹。例如图 9-21 所示为 $h=1/2$ 与 $h=l/4$ 的二进制 CPFSK 信号空间图。与 $h=1/2$ 和 $h=1/4$ 对应的点分别为 $\theta=0$，$\pi/2$，π，$3\pi/2$以及 $\theta=0$，$\pm\pi/4$，$\pm\pi/2$，$\pm3\pi/4$，这些点表示前面状态图中给出的终点相位状态。

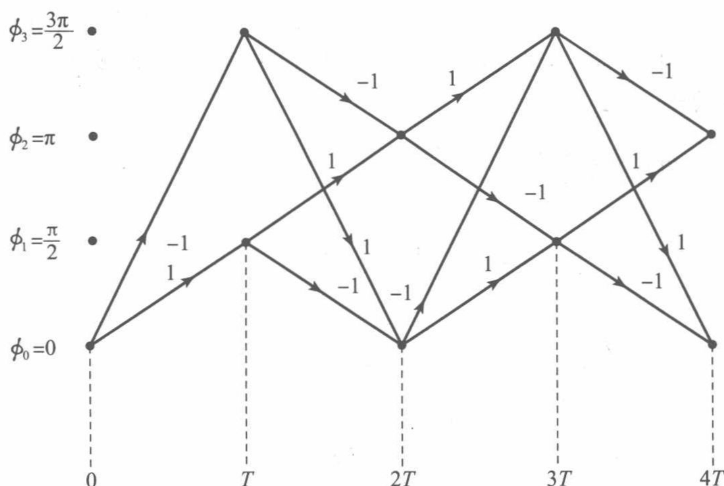


图 9-19　$h=1/2$ 的二进制 CPFSK 信号状态栅格图

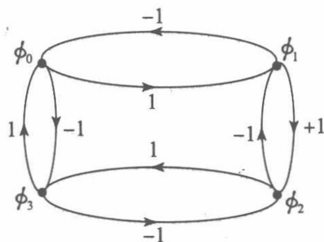


图 9-20 $h=1/2$ 的二进制 CPFSK 信号状态图

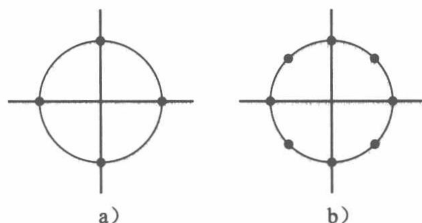


图 9-21 $h=1/2$(图 a)和 $h=1/4$(图 b)的二进制 CPFSK 信号空间图

最小频移键控(MSK)。MSK 是二进制 CPFSK 的一种特殊形式，其调制指数 $h=1/2$。因此 MSK 信号载波的相位可以由式(9.6.4)推出，即

$$\begin{aligned}\theta(t;\boldsymbol{a})&=\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{n-1}a_k+\pi a_n q(t-nT_b)\\&=\theta_n+\frac{\pi}{2}\frac{(t-nT_b)}{T_b}a_n,\quad nT_b\leqslant t\leqslant(n+1)T_b\end{aligned}\tag{9.6.10}$$

相应的已调波信号为

$$\begin{aligned}u(t)&=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos[2\pi f_c t+\theta_n+\pi(t-nT_b)a_n/2T_b]\\&=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos\left[2\pi\left(f_c+\frac{1}{4T_b}a_n\right)t-\frac{n\pi}{2}a_n+\theta_n\right]\end{aligned}\tag{9.6.11}$$

式(9.6.11)表明，MSK 信号在区间 $nT_b\leqslant t\leqslant(n+1)T_b$ 上为正弦波，其频率为以下两个可能的频率之一，

516~518

$$\begin{aligned}f_1&=f_c-\frac{1}{4T_b}\\f_2&=f_c+\frac{1}{4T_b}\end{aligned}\tag{9.6.12}$$

因此，两个正弦信号可以表示为

$$u_i(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos\left[2\pi f_i t+\theta_n+\frac{n\pi}{2}(-1)^{i-1}\right],\quad i=1,2\tag{9.6.13}$$

频率间隔为 $\Delta f=f_2-f_1=2/T_b$。前面已经提到，此频率间隔为信号进行相干检测时，两正弦信号相互正交的最小频率间隔。这也解释了为什么称 $h=1/2$ 的二进制 CPFSK 为最小频移键控。注意，第 n 个信号间隔中载波相位是信号的相位状态，并且相邻间隔之间相位连续。有趣的是，可以证明 MSK 也是一种四相 PSK。为了证明这一点，首先讨论四相 PSK 信号，其形式如下

$$\begin{aligned}u(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\Big\{&\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{2n}g_T(t-2nT_b)\Big]\cos 2\pi f_c t\\&+\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{2n+1}g_T(t-2nT_b-T_b)\Big]\sin 2\pi f_c t\Big\}\end{aligned}\tag{9.6.14}$$

其中 $g_T(t)$ 是定义如下的正弦脉冲

$$g_T(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi t}{2T_b}, & 0\leqslant t\leqslant 2T_b\\0, & \text{其他}\end{cases}\tag{9.6.15}$$

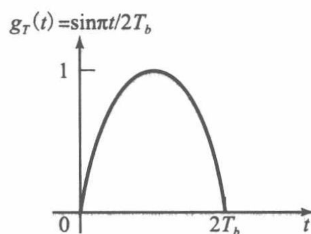


图 9-22 正弦脉冲波形

并且如图 9-22 所示。首先，可以看到四相 PSK 信号由两个幅度受到调制的正交载波 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$ 组成，发送速率为每 $2T_b$ 间隔一个比特。偶数序号的信息比特$\{a_{2n}\}$调制在余

弦载波上发送，奇数序号的信息比特$\{a_{2n+1}\}$则被调制在正弦载波上发送。注意，两个正交调制载波错开 T_b，而每个载波的发送速率均为$1/2T_b$。这类四相调制称为偏移正交 PSK(OQPSK)或者交错正交 PSK(SQPSK)。

519

图 9-23 给出了两个相互交错正交的二进制 PSK 信号构成的 SQPSK 信号。这两个正交信号之和，就是一个幅度恒定，相位连续的 FSK 信号，如图 9-23 所示。

另一个有趣之处是，将 MSK 信号与 SQPSK 信号及常规 QPSK 信号分别进行波形对比，后面两种信号的基带脉冲 $g_T(t)$在区间 $0\leqslant t\leqslant 2T_b$ 上均为矩形的。需要强调的是，这三种调制方式会得到相同的数据速率。MSK 信号的相位是连续的。采用矩形基带脉冲的 SQPSK 信号本质上是两个以 T_b 秒为间隔的相位交替变化的二进制 PSK 信号，因此，这种 SQPSK 信号每隔 T_b 秒会发生一次$\pm 90°$的相位跳变。另一方面，在具有恒定包络的常规 QPSK 中，一个或两个信息码元会造成间隔为 $2T_b$ 秒的相位跳变。这些相位跳变可以是$\pm 180°$或$\pm 90°$。这三类四相 PSK 的波形图如图 9-24 所示。

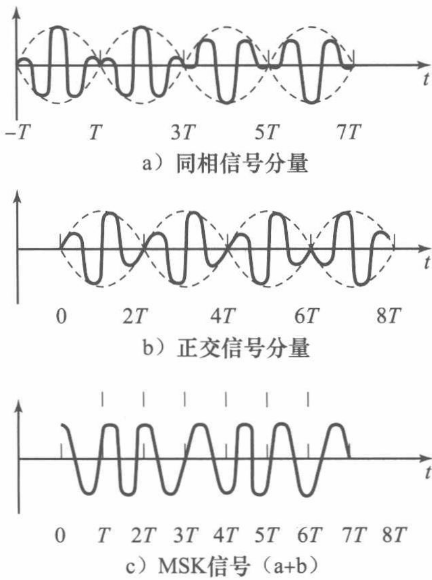


图 9-23　将一个 MSK 信号表示为两个交错二进制 PSK 信号的叠加

通过以上描述可以看出，CPFSK 是一种有记忆的调制方法。这种记忆性来自于相邻码元间载波相位的连续性。由于具有连续相位，CPFSK 信号的功率谱带宽比相应 FSK 信号的功率谱窄，后者的相位在码元起始位置可能突然跳变。

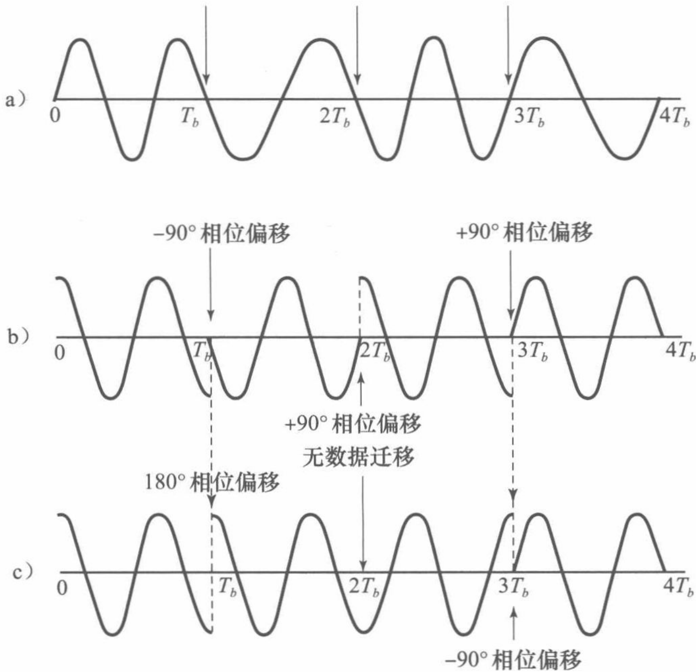


图 9-24　a)MSK；b)偏移 QPSK(矩形脉冲)；c)常规 QPSK(矩形脉冲)的信号波形（引自 Gronemeyer and Mcbride © 1976 IEEE）

连续相位调制。当载波相位如(9.6.4)式所示时，CPFSK 就是连续相位调制(CPM)信

号的一个特例，其中 CPM 信号的载波相位为

$$\theta(t;\boldsymbol{a}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{n} a_k h q(t-kT), \quad nT \leqslant t \leqslant (n+1)T \tag{9.6.16}$$

其中$\{a_k\}$为 M 进制信息符号序列，其可能的取值为±1，±3，…，$\pm M-1$，$q(t)$为任意归一化波形。在 CPFSK 中，当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$q(t)=t/2T$，当 $t<0$ 时，$q(t)=0$，当 $t>T$ 时，$q(t)=1/2$。波形 $q(t)$为任意形状的脉冲 $g_T(t)$的积分，即

$$q(t) = \int_0^t g_T(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.6.17}$$

若 $t>T$，则 $g_T(t)=0$，CPM 信号称为全响应 CPM 信号。如果 $t<0$ 时，信号脉冲 $g_T(t)$不为零，则调制信号称为部分响应 CPM。图 9-25 给出了几种 $g_T(t)$的波形及其相应的 $q(t)$。显然通过选择 $g_T(t)$的不同脉冲形状，改变调制指数 h 和符号个数 M，就可以获得无穷多种 CPM 信号。

520 ~ 521

将 $g_T(t)$脉冲的持续时间扩展到时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 以外，可以进一步降低发送信号的带宽。可以发现，当脉冲 $g_T(t)$的持续时间扩展到时间间隔 $0\leqslant t\leqslant LT$ 且 $L>1$ 时，CPM 信号提供了附加的记忆，从而增加了相位状态的数量。

表 9-1 给出了三种常用的脉冲波形。LREC 表示持续时间为 LT 的矩形脉冲，其中 L 为正整数。在这种情况下，$L=1$ 的 LREC 脉冲如图 9-25a，对应 CPFSK 信号；$L=2$ 的 LREC 脉冲如图 9-25c 所示。LRC 表示持续时间为 LT 的升余弦脉冲，对应于 $L=1$ 和 $L=2$ 的 LRC 脉冲分别如图 9-25b 和图 9-25d 所示。

表 9-1　部分常用 CPM 脉冲波形

脉冲	表达式
LREC	$g_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2LT}, & 0\leqslant t\leqslant LT\\ 0, & 其他\end{cases}$
LRC	$g_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2LT}\left(1-\cos\dfrac{2\pi t}{LT}\right), & 0\leqslant t\leqslant LT\\ 0, & 其他\end{cases}$
GMSK	$g_T(t)=\left\{Q\left[2\pi B\left(t-\dfrac{T}{2}\right)/(\ln 2)^{1/2}\right]-Q\left[2\pi B\left(t+\dfrac{T}{2}\right)/(\ln 2)^{1/2}\right]\right\}$ $Q(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$

表 9-1 中给出的第三个脉冲称为高斯最小频移键控(GMSK)脉冲，其带宽参数为 B，表示高斯脉冲的$-3\mathrm{dB}$ 带宽。图 9-25e 显示了时间带宽积 BT 在 0.1 到 1 之间的一组高斯最小频移键控脉冲。从图中可以看出，随着脉冲带宽的减小，相应的脉冲持续时间确实会增加。在实际应用中，通常将脉冲截短为某个指定的固定持续时间。欧洲的数字蜂窝通信系统，即 GSMK 系统，采用 $BT=0.3$ 的 GMSK。由图 9-25e 可以看出，当 $BT=0.3$ 时，GMSK 可在$|t|=1.5T$ 处截短，而在 $t>1.5T$ 时的其误差相当小。

由于 CPFSK 和 CPM 信号内在的相位连续性，这些调制方法是有记忆的，因此其解调和检测从计算角度来看更加复杂。一般而言，解调器需要对每个信号间隔中的接收信号与每个可能的相位调制发送信号进行互相关计算，并将计算的相关测度传递给最大似然(ML)检测器。不同于一般的 ML 逐个符号检测，检测器在每个信号间隔中计算相关性来实现 ML 序列分析，从而利用发送信号的记忆信息(相位连续性)。在第 13 章中将介绍一种用于 ML 序列检测的高效的计算方法——维特比(Vitebi)算法。

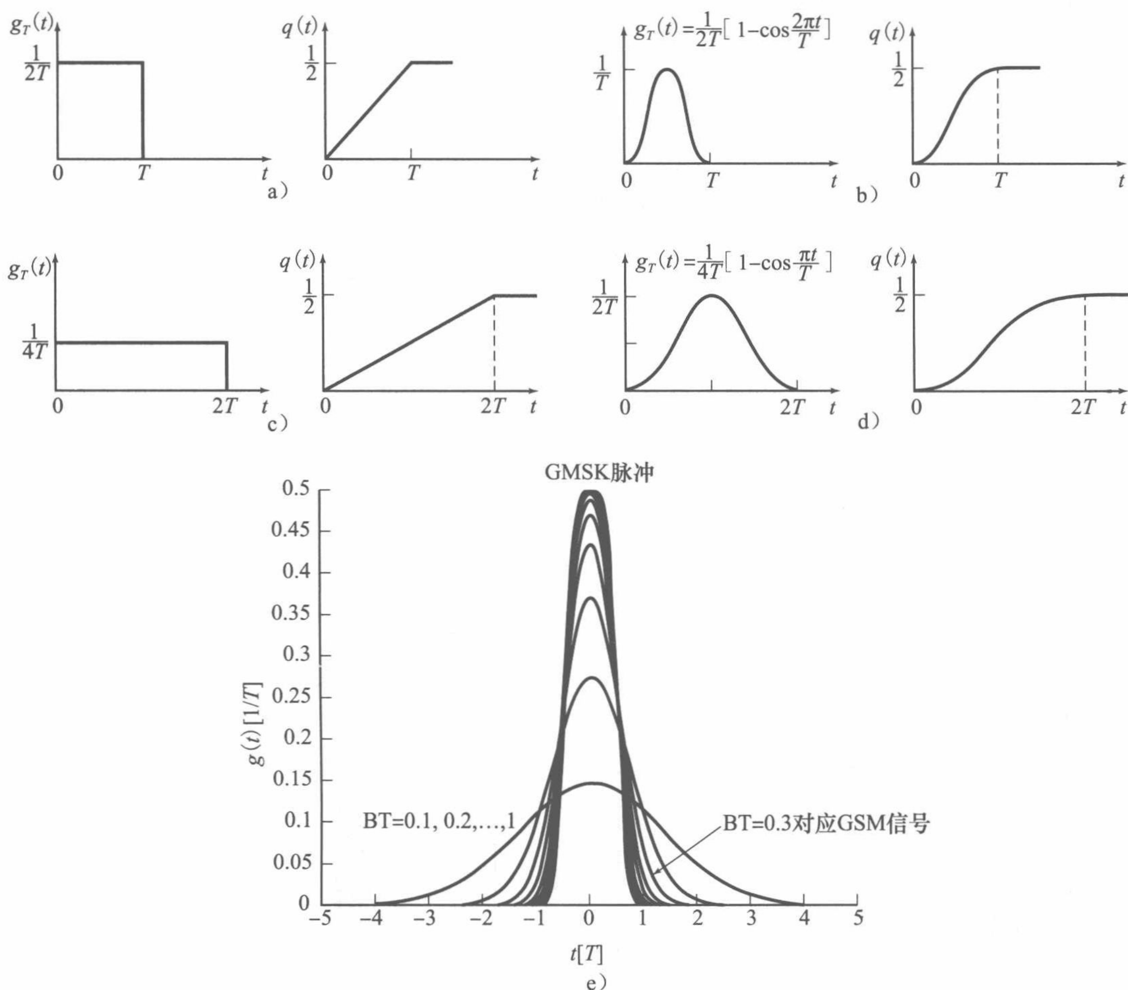


图 9-25 a), b)全响应 CPM 的脉冲形状；c), d)部分响应 CPM 的脉冲形状；e)GMSK 脉冲形状

522 ~ 523

9.6.2 CPFSK 信号的谱特征

这一节考虑 CPFSK 信号的谱特征，并用功率谱密度表示一些结果。这些结果的推导可以在一些更深入的数字通信教材中找到，例如，安德森(Anderson)等人 1986 年出版的著作[Anderson et al，1986]和 Proakis 与 Salehi2008 年的著作[Proakis and Salehi，2008]。

CPFSK 信号的通用形式可以表示为如下

$$u(t;\boldsymbol{a})=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos[2\pi f_c t+\theta(t;\boldsymbol{a})]=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi f_c t+\theta(t;\boldsymbol{a})]}\right\} \tag{9.6.18}$$

其中载波相位 $\theta(t;\boldsymbol{a})$如式(9.6.16)所示。CPFSK 信号的低通分量是如下复值基带信号

$$v(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t;\boldsymbol{a})} \tag{9.6.19}$$

由此可见，把注意力集中在承载信息的信号 $v(t)$上就足够了。

计算 CPFSK 信号(或 CPM 信号)的功率谱密度在某种程度上是困难和繁琐的。困难来自于 CPFSK 信号的记忆性和 $v(t)$与 $\theta(t;\boldsymbol{a})$的指数关系。主要计算过程涉及基带信号 $v(t)$的自相关计算，以及将自相关函数经傅里叶变换得到功率谱密度 $S_V(f)$的过程。

实值信号 $u(t;\boldsymbol{a})$的功率谱密度可以通过对 $S_V(f)$频移载频 f_c 得到，即

$$\mathcal{S}_U(f)=\frac{1}{4}[\mathcal{S}_V(f-f_c)+\mathcal{S}_V(f+f_c)] \tag{9.6.20}$$

对于 CPFSK 信号，上述计算过程可以得到如下的功率谱密度表达式

$$\mathcal{S}_V(f)=2\,\mathscr{E}_s\left[\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}A_n^2(f)+\frac{2}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}B_{nm}(f)A_n(f)A_m(f)\right] \tag{9.6.21}$$

其中

524

$$\begin{aligned}A_n(f)&=\frac{\sin\pi[fT-(2n-1-M)h/2]}{\pi[fT-(2n-1-M)h/2]}\\&=\operatorname{sinc}\left[fT-\frac{(2n-1-M)h}{2}\right]\end{aligned} \tag{9.6.22}$$

$$B_{nm}(f)=\frac{\cos(2\pi fT-\alpha_{nm})-\beta\cos\alpha_{nm}}{1+\beta^2-\beta\cos 2\pi fT} \tag{9.6.23}$$

$$\alpha_{nm}=\pi h(m+n-1-M) \tag{9.6.24}$$

$$\beta=\frac{\sin M\pi h}{M\sin\pi h} \tag{9.6.25}$$

$M=2$ 时，以调频指数 $h=2f_dT$ 为参数，CPFSK 信号的功率谱密度与归一化频率 fT 的函数关系如图 9-26 所示。注意依据频谱对称性，图中仅显示了单边频谱。原点 $fT=0$ 对应实值信号谱的载频 f_c。

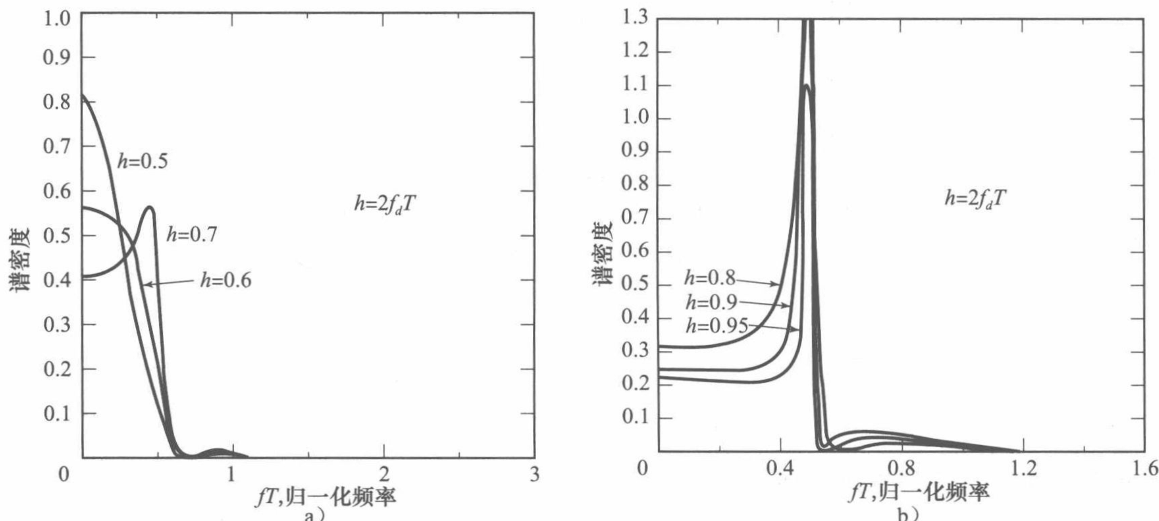


图 9-26 二进制 CPFSK 的功率谱密度

图 9-26 表明在 $h<1$ 时，CPFSK 信号的功率谱相对平滑且功率集中在主瓣。随着 h 趋近 1，功率谱越来越尖锐；当 $h=1$，$|\beta|=1$ 时，在 M 倍频处出现冲激，但这种情况在实际中通常可以避免。在采用 CPFSK 的系统中，调频指数的选择中主要考虑带宽效率，因此有 $h<1$。

在 $h=1/2(f_d=1/4T_b)$ 和 $\beta=0$ 时，二进制 CPFSK 信号的特例对应 MSK 信号。在这种情况下，从式(9.6.21)到式(9.6.24)得到的功率谱密度为

$$\mathcal{S}_V(f)=\frac{32\,\mathscr{E}_s}{\pi^2}\left[\frac{\cos 2\pi fT_b}{1-16f^2T_b^2}\right]^2 \tag{9.6.26}$$

相反，持续时间为 $2T_b$ 的矩形脉冲对应的 SQPSK 信号的功率谱密度为

$$\mathcal{S}_V(f)=4\,\mathscr{E}_s\left(\frac{\sin 2\pi fT_b}{2\pi fT_b}\right)^2 \tag{9.6.27}$$

式(9.6.26)和式(9.6.27)中的功率谱密度如图 9-27 所示。注意 MSK 信号的主瓣比 SQPSK 信号的主瓣宽 50%。但是，MSK 信号的旁瓣下降得比 SQPSK 信号快得多。因

此，MSK 比 SQPSK 信号的带宽效率高得多。

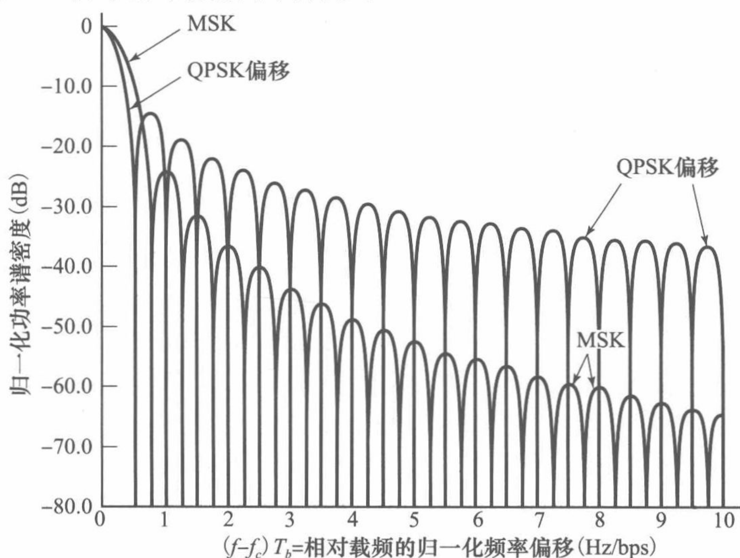


图 9-27　MSK 与 QPSK 信号的功率谱密度(引自 Gronemeyer and McBride；@ 1976IEEE)

在 CPM 信号更一般的情况下，采用例如表 9-1 所示的升余弦脉冲(LRC)，$L=1$ 对应全响应，$L>1$ 对应部分响应。相比矩形脉冲，升余弦脉冲占用带宽更低，因而带宽利用率更高。图 9-28 给出了 $h=1/2$ 时不同升余弦脉冲对应的二进制 CPM 信号的功率谱密度。作为对比，$h=1/2$ 的 CPFSK(MSK)信号的功率谱密度也在图中给出。可以发现随着 L 增大，脉冲 $g_T(t)$变得更加平滑，相应的信号频谱占用率也随之降低。

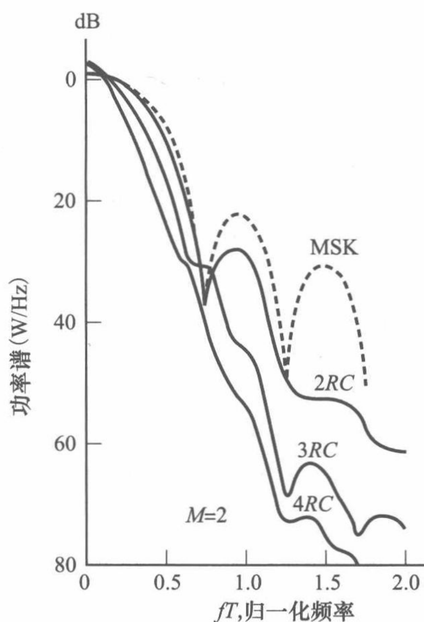


图 9-28　$h=1/2$时不同脉冲波形的二进制 CPM 信号的功率谱密度(引自 Aulin et al.；@ 1981IEEE)

9.7　调制方法比较

可以采用多种方式比较本章和第 8 章介绍的各种数字调制方法。例如，可以在给定差错概率的条件下比较所需的 SNR，但是这种比较通常意义不大，除非给定某些约束条件，比如传输速率，在此基础上进行比较。

525 ~ 527

假设给定比特速率 R_b，分析传输不同信号所需的信道带宽。如果采用 M 进制 PAM，其中 $M=2^k$，那么传输信号所需的信道带宽就等于信号脉冲 $g_T(t)$的带宽，当然这取决于具体的信号特征。为了说明问题，假定 $g_T(t)$是持续时间为 T、带宽 W 近似为$1/2T$的脉冲，其中 T 为符号间隔。因为在一个符号间隔内传输 k 个信息比特，所以 $T=k/R_b$秒，因此，传输 M 进制 PAM 信号所需的带宽为

$$W = R_b/2k = R_b/2\log_2 M\text{Hz} \tag{9.7.1}$$

如果采用抑制载波的双边带信号，传输带通 PAM 信号，则所需带宽是传输基带信号所需带宽的两倍。不过，如果只传输一个边带信号(即带通信号的上边带或下边带信号)，则带通 PAM 信号的带宽可以减少一半。因此，单边带带通 PAM 信号所需的信道带宽与基带信号的带宽完全相等。

在 QAM 系统中，信道带宽(近似)为 $W=1/T$，但是由于信息承载在两路正交载波上，所以有 $T=2k/R_b$，其中 k 为每一路载波所携带的信息比特数。因此

$$W=R_b/2k=R_b/2\log_2 M_{\mathrm{PAM}}=R_b/\log_2 M_{\mathrm{QAM}} \tag{9.7.2}$$

其中 M 进制 QAM 的信号数量以 M_{QAM} 表示，等于 PAM 信号数量 M_{PAM} 的平方。

对于 M 进制相位调制($M>2$)，传输多相位信号所需信道带宽为 $W=1/T$，其中 $T=k/R_b$。因此有，

$$W=R_b/k=R_b/\log_2 M \tag{9.7.3}$$

注意 PAM、QAM 与 PSK 调制有一个共同特征，就是在比特速率 R_b 一定时，传输信号所需信道带宽随着信号点数 M 的增大而减小。这就表明 M 越大，系统的带宽利用率越高。另一方面，从图 8-46、图 8-51 和图 8-61 可以看出，给定 $\mathscr{E}_b/N_0$ 时，M 增大将导致系统的差错概率增大，系统性能下降。换言之，在这些系统中，增大 M，能提高带宽利用率，但同时会降低功率利用率。其直接原因是这些系统中，信号空间的维数 N 都是 1(PAM 系统)或 2(PSK 和 QAM 系统)，并且 N 与 M 无关。

正交信号的带宽要求完全不同。以 PPM 信号为例，它实际上是将基带信号的符号间隔 T 划分成持续时间为 T/M 的 M 个子间隔，宽度为 T/M 的脉冲在相应的子间隔传输。因此，传输 PPM 信号所需的信道带宽为

528

$$W=M/2T=M/2(k/R_b)=MR_b/2\log_2 M\,\mathrm{Hz} \tag{9.7.4}$$

如果为了实现正交，将 M 个正交信号构建为具有最小频率间隔 $1/2T$ 的 M 进制 FSK 信号，可以得到相同的结果。对于双正交信号和单纯形信号也可以得到与(正交)PPM 类似的关系式。双正交信号所需带宽是正交信号所需带宽的一半。从正交信号的带宽关系式可以发现，当 R_b 一定时，随着 M 的增大，信道带宽以 $M/(2\log_2 M)$ 的比例增大。说明这种情况下，M 的增大会导致系统带宽利用率的降低。另一方面，从图 9-3 和 9-15 可以看出，当 $\mathscr{E}_b/N_0$ 一定时，M 的增大能够改善这些系统的性能，提高系统的功率利用率。需要注意的是正交、双正交和单纯形信号的信号空间维数不是固定的，而是随着 M 的增大而增大的。

综上所述，PAM、PSK 和 QAM 的特性与正交、双正交和单纯形信号完全不相同，因此，其应用也完全不同。

一般而言，可以发现，任一数字调制方法所要求的最小带宽可以表示为

$$W=\frac{R_b N}{2\log_2 M} \tag{9.7.5}$$

其中 R_b 是传输速率，单位是比特/秒，N 是信号空间的维度，M 是信号星座图中信号点数。采用这个一般表达式，不同通信系统所要求的最小传输带宽可以在式(9.7.6)中给出

$$\begin{aligned}
\text{PAM}:\ W&=\frac{R_b}{2\log_2 M}\\
\text{MPSK}:\ W&=\frac{R_b}{\log_2 M},\quad \text{对于 } M>2\\
\text{BPSK}:\ W&=\frac{R_b}{2\log_2 M}\\
\text{QAM}:\ W&=\frac{R_b}{\log_2 M}\\
\text{正交信号}:\ W&=\frac{MR_b}{2\log_2 M}\\
\text{双正交信号}:\ W&=\frac{MR_b}{4\log_2 M}\\
\text{单纯形信号}:\ W&=\frac{(M-1)R_b}{2\log_2 M}
\end{aligned} \tag{9.7.6}$$

对这些调制方法的一种简洁而有意义的比较方法是，给定差错概率，比较各系统所需的归一化数据速率(也称为谱比特率)$r=R_b/W$(比特每秒每赫兹带宽)与 SNR/bit(即 $\mathscr{E}_b/N_0$)之间的关系。根据式(9.7.6)，可以得到不同数字系统的谱比特率为：

529

$$
\begin{aligned}
\text{PAM}:\ r &= 2\log_2 M \\
\text{MPSK}:\ r &= \log_2 M, \quad \text{对于 } M>2 \\
\text{BPSK}:\ r &= 2\log_2 M \\
\text{QAM}:\ r &= \log_2 M \\
\text{正交信号}:\ r &= \frac{2\log_2 M}{M} \\
\text{双正交信号}:\ r &= \frac{4\log_2 M}{M} \\
\text{单纯形信号}:\ r &= \frac{2\log_2 M}{M-1}
\end{aligned}
\tag{9.7.7}
$$

图 9-29 给出了符号差错概率 $P_M=10^{-5}$ 时，PAM，QAM，PSK 和正交信号的归一化数据率 $r=R_b/W$(频带利用率的度量)与 $\mathscr{E}_b/N_0$(功率效率的量度)之间的关系曲线。正如前面对 PAM，QAM 和 PSK 的讨论，增大信号点数 M 能够获得更高的比特率带宽比 $r=R_b/W$。但是这个数据速率的提高是以增大 SNR/bit 为代价换取的。因此，M 进制 PAM，QAM 和 PSK 调制适用于带宽受限的通信信道。在这种信道中，我们期望比特率带宽比 $r>1$，并且 SNR 足够大能支持多电平和多相位。电话信道就是这样一类典型的限带信道。图中

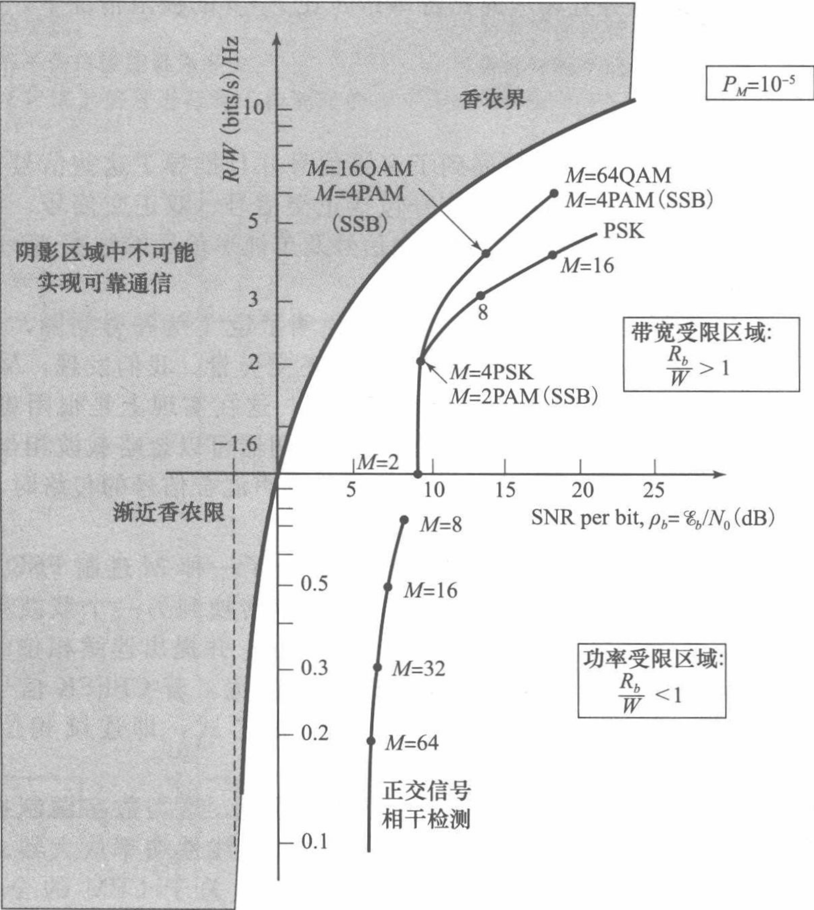


图 9-29　符号速率为 10^{-5} 时几种调制方法的比较

标有“香农限”的曲线给出了可靠通信区域与不可靠通信区域(阴影区域)的分界线，该曲线满足下式

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}=\frac{2^r-1}{r} \tag{9.7.8}$$

这个关系式将在第 12 章中给出推导[见式(12.6.5)]。

已经发现，对于较大的 M，如果将 PSK 调制的相位数加倍(即每个码元的比特数加 1)，则传输功率要增加 6dB(即 4 倍)。对 QAM 调进制行类似比较可知，每个符号的比特数加 1，其传输功率约增加 3dB。表 9-2 给出了当 QAM 矩形星座图中信号点数增加时，为了保持系统性能需要增加的发送功率为 $10\log_2(M-1)/3$倍。由此可见，当信号星座图规模比较大时，QAM(以及 PAM)的性能优于 PSK。

表 9-2 QAM 信号星座图比较

信号点数 M	相对于 M=2 平均功率增长分贝数
4	3
8	6.7
16	10.0
32	13.2
64	16.2
128	19.2

与 PAM、QAM 和 PSK 调制不同，M 进制正交信号的比特率带宽比 $r\leqslant 1$。M 增大时，所需信道带宽增加，导致 r 减小。但是给定差错概率时(图中是 $P_M=10^{-5}$)，系统所需的 SNR/bit 随 M 的增大而减小。因此，M 进制正交信号和双正交信号，以及单纯形信号，适用于功率受限信道。这种信道通常有足够的带宽容纳大量的信号。这种情况下，当 $W\to\infty$时，其差错概率也能达到要求的最小值，使得 $\mathscr{E}_b/N_0>0.693(\approx -1.6\text{dB})$。这个值是在信道带宽 $W\to\infty$并且相应的比特率带宽比 $r\to 0$ 的极限情况下，实现可靠传输所需的最小 SNR/bit。

530 ~ 531

9.8 小结及深入阅读

本章将 M 进制数字调制的讨论扩展到了多维信号并且推导了这些信号在加性高斯噪声(AWGN)信道中的性能。讨论的多维信号包括正交信号、双正交信号、单纯形信号以及二元编码信号。M 进制的正交信号、双正交信号及单纯形信号的维度 $N=M$。相反，M 进制二元编码信号的 N 维矢量则有 $N>M$。

本章还讨论了 M 进制频移键控(FSK)信号，说明了设 T 为符号间隔，相邻载频间隔为 $\Delta f=1/T$的 FSK 信号可以在几何上表示为 M 个正交矢量。我们发现，M 进制 FSK 解调器需要估计 M 种载波相位才能实现相位相干解调，这在实现上是很困难和不现实的。实际上，通过计算接收信号的包络，并将包络送入检测器可以忽略载波相位而实现解调。对于 M 进制 FSK 信号，还推导了输入为接收信号与噪声混合信号的包络时，FSK 检测器的差错概率。

此外，本章讨论了有记忆的调制系统，重点分析了一种 M 进制 FSK 的特殊形式。其发送载波在每个符号间隔结束时刻从一个载波频率转换到另一个载波频率时，载波相位保持连续变化，称为连续相位频移键控(CPFSK)。并提出连续相位约束的目的是为了抑制 FSK 信号功率谱旁瓣，从而降低发送信号带宽。若 CPFSK 信号的基带脉冲采用非矩形信号，可以得到 CPFSK 信号更一般化的形式，即连续相位调制(CPM)信号。

由于 CPFSK 与 CPM 是高带宽效率的恒定包络调制，这类数字调制技术特别适用于无线数字通信。因此，在信号传输时可以采用高效非线性功率放大器。许多技术期刊和教科书中都有对 CPFSK 和 CPM 的大量介绍。关于 CPM 的全面讲解参见 Anderson 等人(1986)的著作，Aulin 与 Sundberg(1981，1982a，1982b，1984)的论文以及 Aulin 等人(1981)也详细地分析了 CPM 的性能特点。Sundberg(1986)的论文

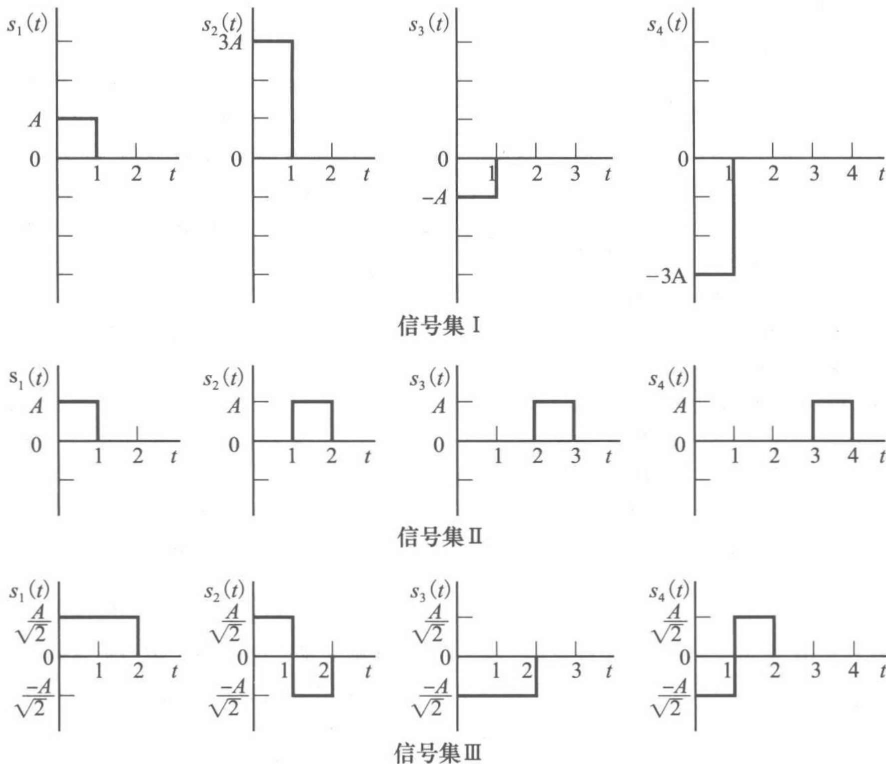
对 CPM 给出了很好的全面论述，包括 CPM 的解调和性能特点，还列出了详细的相关参考文献。

本章最后一节比较了前一章和本章介绍的多种一维和多维信号。将不同信号的差错概率限制为给定数值，如 $P_b=10^{-5}$，比较不同数字调制方式在给定差错概率时所需的比特率带宽比R_b/W(bps/Hz)和相应的信噪比 $\mathscr{E}_b/N_0$(SNR/bit)。发现对于 PAM，PSK，DPSK 和 QAM，随着信号数 M 的增大，R_b/W上升而 SNR/bit 也上升。因此，这些数字调制方式适用于需要高数据速率($R_b/W>1$)的场合，只要 SNR/bit 能够得到相应的提高即可。相反，$M>4$ 时，M 维信号波形的特点是随着 M 的增大，$R_b/W<1$，但是 SNR/bit 下降。因此 M 进制多维信号所需的传输带宽扩大。但是带宽扩大的代价换取了能以较低的 SNR/bit 传输数字信号。当 M 趋于无穷时，SNR/bit 的极限为 -1.6dB。这是在一个数字系统中实现可靠传输所能达到的 SNR/bit 最低值。这个 SNR/bit 的极限值称为香农限。 [532]

习题

9.1　3 个信号集的低通等效信号波形如习题 9.1 图所示。每一个信号集都可用来在功率谱密度为$N_0/2$的加性高斯白噪声信道中传输 4 个等概率消息中的一个。

1. 对这三个信号集的波形进行分类，即说明各信号集所属的类别。
2. 各个信号集的平均传输能量为多少？
3. 对于信号集Ⅰ，试求信号进行相干检测时的差错概率。
4. 对于信号集Ⅱ，试求信号进行相干检测与非相干检测时的码元差错概率的联合界。
5. 对信号集Ⅲ，可以采用非相干检测吗？为什么？
6. 如果要使比特率带宽比(R_b/W)至少为 2，你会选择哪个或哪些信号集？为什么？



习题 9.1 图

9.2 分析说明以原点为中心的 N 维超立方体顶点所对应的两个相邻信号点的相关系数为

$$\gamma = \frac{N-2}{N}$$

并且二者欧氏距离为

$$d = 2\sqrt{\frac{\mathscr{E}_s}{N}}$$

9.3 考虑 M 个正交信号集 $s_m(t)$，$1 \leqslant m \leqslant M$ 并且 $0 \leqslant t \leqslant T$，这些信号都具有同样的能量 $\mathscr{E}$。定义新的一组 M 个信号的集合如下

$$s_m'(t) = s_m(t) - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s_k(t), \quad 1 \leqslant m \leqslant M, 0 \leqslant t \leqslant T$$

说明 M 信号波形 $\{s_m'(t)\}$ 具有相等的能量

$$\mathscr{E}' = (M-1)\mathscr{E}/M$$

并且等相关，相关系数为

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{\mathscr{E}'}\int_0^T s_m'(t)\, s_n'(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{M-1}$$

9.4 考虑一个正交信号集，包含 8 个信号点。确定以 $\mathscr{E}_b/N_0$ 为自变量的符号错误概率的联合界。信号点等先验概率。

9.5 考虑一个 M 进制数字通信系统，$M=2^N$，N 为信号空间的维度。假设 M 个信号矢量在如图 9-9所示的以原点为中心的超立方的顶点上。求平均符号错误概率与 $\mathscr{E}_s/N_0$ 的函数关系，其中 $\mathscr{E}_s$ 是每符号能量，$N_0/2$ 是 AWGN 信道中的功率谱密度，所有信号等先验概率。

9.6 考虑信号波形

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i p(t - iT_c)$$

其中 $p(t)$ 是一个具有单位幅值且持续时间为 T_c 的矩形脉冲。$\{c_i\}$ 可以视为一个码字矢量 $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$，其中元素 $c_i = \pm 1$。说明匹配 $s(t)$ 的滤波器可以视为匹配 $p(t)$ 的滤波器之后串联一个匹配矢量 $\boldsymbol{c}$ 的离散时间滤波器得到。求匹配滤波器在抽样时刻 $t=NT_c$ 的输出信号值。

9.7 哈德玛(Hadamard)矩阵定义为元素为 ± 1 且行矢量两两正交的矩阵。若 n 为 2 的幂次，一个 $n \times n$ 的 Hadamard 矩阵可以通过递归得到

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_n & \boldsymbol{H}_n \\ \boldsymbol{H}_n & -\boldsymbol{H}_n \end{bmatrix}$$

1. 令 $\boldsymbol{c}_i$ 代表上面定义的 $n \times n$ 的 Hadamard 矩阵的第 i 行。说明如下构造的波形

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} p(t - kT_c), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

是正交的，其中 $p(t)$ 是持续时间为 $t(0 \leqslant t \leqslant T_s)$ 的任意脉冲。

2. 证明匹配 n 个波形 $\{s_i(t)\}$ 的一组匹配滤波器（或者互相关器），可以用一个匹配脉冲 $p(t)$ 的滤波器（或者相关器）和一组 n 个采用码字 $\{c_i\}$ 的互相关器来实现。

9.8 离散序列

$$r_k = \sqrt{\mathscr{E}_c}c_k + n_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

表示解调器样本的输出序列，其中 $c_k = \pm 1$ 是两个可能码字 $\boldsymbol{c}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_2$ 的元素，$\boldsymbol{c}_1 = [1, 1, \cdots, 1]$ 和 $\boldsymbol{c}_2 = [1, 1, \cdots, 1, -1, -1, \cdots, -1]$。码字 $\boldsymbol{c}_2$ 有 w 个元素值为 $+1$，$n-w$ 个元素值为 -1，w 为正整数。噪声序列 $\{n_k\}$ 是方差为 σ^2 的高斯白噪声。

1. 确定这两个可能发送信号的最佳最大似然检测器。
2. 求以 $(\sigma^2, \mathscr{E}_b, w)$ 为参数的差错概率函数。
3. 求能使差错概率最小的 w 取值。

9.9 在 9.5.1 中，已经说明采用相干检测的正交二进制 FSK 的最小频率间隔是 $\Delta f = 1/2T$。但是，如果 Δf 超过 $1/2T$，FSK 相干检测可以得到更低的差错概率。求 $\Delta f = 0.75/T$ 对应的相关最小值，确定选择这个 Δf 值所对应的差错概率。

9.10 考虑如图 9-11 所示的 M 进制 FSK 信号的相位相干解调器，

1. 假设发送信号

$$u_0(t) = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{T}}\cos 2\pi f_c t, 0 \leqslant t \leqslant T,$$

求当 $\hat{\phi}_m \neq \phi_m$ 时，对应信号 $u_m(t)$，$m = 1, 2, \cdots, M-1$ 的 $M-1$ 个相关器在 $t=T$ 时的输出。

2. 分析说明当 $\hat{\phi}_m \neq \phi_m$ 时，解调器的正交性所要求的最小频率间隔为 $\Delta f = 1/T$。

9.11 在 M 进制 FSK 信号的解调和非相干检测中，如图 9-12 所示，分析说明(9.5.8)式和(9.5.9)式中给出的 $2M$ 个噪声样值是相互独立的高斯随机变量，均值为零，方差为 $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$。

9.12 在开关键控的载波调制信号中，两个可能信号是

$$s_0(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_b$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos 2\pi f_c t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_b$$

对应的接收信号为

$$r(t) = n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_b$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_b$$

其中 ϕ 是载波相位，$n(t)$ 为 AWGN。

1. 画出采用非相干(包络)检测的接收机(解调器和检测器)框图。
2. 求对应两个可能接收信号的检测器的两个可能判决变量的概率密度函数。

3. 推导检测器的差错概率。

9.13 采用载波调制在加性高斯噪声信道中数字信息，已知带宽 100KHz，$N_0=10^{-10}$ W/Hz。求在此信道中采用非相干检测分别传输四相 PSK、二进制 FSK 和四频正交 FSK 信号，需要的最大传输速率。

9.14 在 MSK 信号中，相位初始状态是 0 或 π。确定以下 4 对输入数据的最终相位状态：(a)00，(b)01，(c)10，(d)11。

9.15 连续相位 FSK 信号，$h=1/2$，可以表示为

$$s(t)=\pm\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right)\cos 2\pi f_c t \pm\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right)\sin 2\pi f_c t,$$

$$0\leqslant t\leqslant 2T_b$$

其中±号取决于发送的信息。

1. 证明该信号有恒定幅值。
2. 画出同步信号的调制器框图。
3. 画出恢复信息的检测器和解调器框图。

9.16 部分响应 CPM 信号，$h=1/2$，并且脉冲为

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4T}, & 0\leqslant t\leqslant 2T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

画出对应的相位树，状态栅格图和状态图。

9.17 确定下列信号的状态栅格图中的结束时刻相位状态数：(a)完全响应的二进制 CPM(CPFSK)，$h=2/3$或$3/4$；(b)$L=3$ 部分响应的二进制 CPM(CPFSK)，$h=2/3$或$3/4$。

533 ~ 537

上机习题

9.1 $M=4$ 正交信号的检测器性能仿真

本题目的是对于采用 $M=4$ 正交信号在加性高斯白噪声信道中传输的数字通信系统，估计并画出差错概率与 SNR 的函数关系。系统仿真模型见上机习题 9.1 图。

如图所示，仿真生成检测器的输入随机变量 y_0，y_1，y_2，y_3。首先，生成 0，1 等概率发生且相互独立的二值序列。将二值序列划分成比特对，映射为相应的信号分量。另一个不生成单个比特而直接生成比特对的替代方法，见上机习题 8.5的描述。两种方法中，4 个符号与信号点的映射关系如下

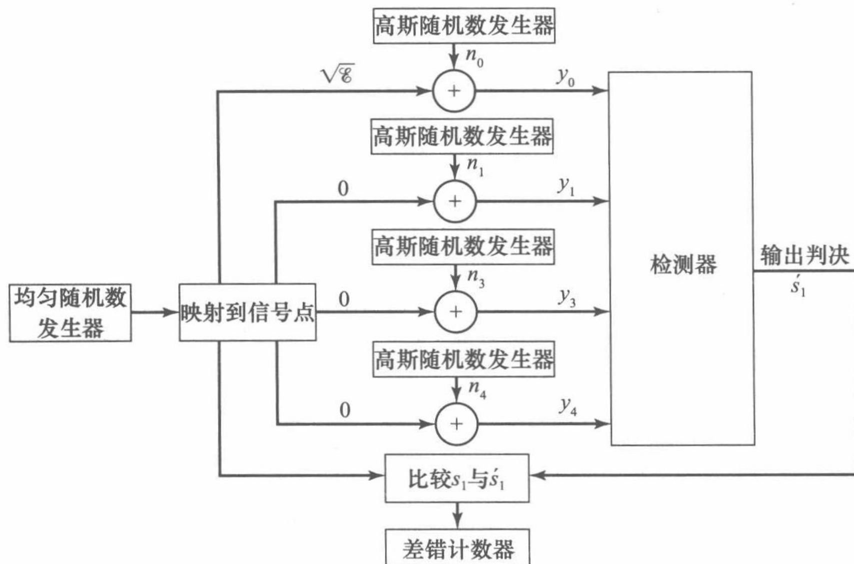
$$00\rightarrow \boldsymbol{s}_0=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0,0);$$

$$01\rightarrow \boldsymbol{s}_1=(0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0,0);$$

$$10\rightarrow \boldsymbol{s}_2=(0,0,\sqrt{\mathscr{E}_s},0);$$

$$11\rightarrow \boldsymbol{s}_3=(0,0,0,\sqrt{\mathscr{E}_s})$$

通过 4 个高斯噪声发生器分别生成加性噪声分量 n_0，n_1，n_2，n_3，每个噪声分量的均值为零，方差为 $\sigma^2=N_0/2$。为方便起见，将符号能量归一化$\mathscr{E}_s=1$，将 σ^2 作为变量。由于$\mathscr{E}_s=2\mathscr{E}_b$，可以得到$\mathscr{E}_b=1/2$。检测器的输入是接收信号矢量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}_i+\boldsymbol{n}$，$i=0$，1，2，3。检测器计算相关测度 $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{s}_j$，$j=0$，1，2，3，并且检测具有最大相关值的信号。采用差错计数器计算错误比特数。仿真 10 000 个符号(20 000 比特)的传输，SNR/bit 采用 $0\leqslant 10\log\mathscr{E}_b/N_0\leqslant 8$dB 范围中若干不同取值。画出比特差错概率的估计值，比较比特差错概率的仿真值与理论计算值，说明比较结果。



上机习题 9.1 图　$M=4$ 正交信号检测的仿真模型

9.2 $M=8$ 正交信号的检测器性能仿真

将上机习题 9.1 问题中的仿真修改为 $M=8$ 正交信号，进行仿真并画出结果。

9.3 双正交信号波形的相关性

图 9-5 给出了一组 $M=4$ 双正交信号。可以发现 $s_2(t)=-s_0(t)$ 和 $s_3(t)=-s_1(t)$。因此，接收机仅需两个相关器就可以处理接收信号。其中一个用于计算接收信号 $r(t)$ 与 $s_1(t)$ 的相关，另一个用于计算接收信号 $r(t)$ 与 $s_0(t)$ 的相关。

假设以 $F_s=40/T$ 速率对接收信号 $r(t)$ 抽样，接收机的相关计算如下

$$y_0(kT_s)=\sum_{n=1}^{k}r(nT_s)s_0(nT_s),\quad k=1,2,\cdots,20$$

$$y_1(kT_s)=\sum_{n=21}^{k}r(nT_s)s_1(nT_s),\quad k=21,22,\cdots,40$$

假设零均值白色高斯噪声，噪声方差为 $\sigma^2=0$，$\sigma^2=0.1$ 以及 $\sigma^2=1$，比较并画出下列不同条件下的 $y_0(kT_s)$ 和 $y_1(kT_s)$：(a)发送 $s_0(t)$，(b)发送 $s_1(t)$，(c)发送 $-s_0(t)=s_2(t)$，(d)发送 $-s_1(t)=s_3(t)$。

9.4 $M=4$ 双正交信号的检测器性能仿真

本题目的是对于采用 $M=4$ 双正交信号在加性高斯白噪声信道中传输的数字通信系统，估计并画出差错概率与 SNR 的函数关系。系统仿真模型见上机习题 9.4 图。

如图所示，仿真生成检测器的输入随机变量 y_0，y_1。首先，生成 0，1 等概率发生且相互独立的二值序列。二值序列分成比特对，映射为相应的信号分量。另一个不生成单个比特而直接生成比特对的替代方法，见上机习题 8.1 的描述。两种方法中，4 个符号与信号点的映射关系如下

$$00\rightarrow \mathbf{s}_0=(\sqrt{\mathscr{E}_s},0);$$

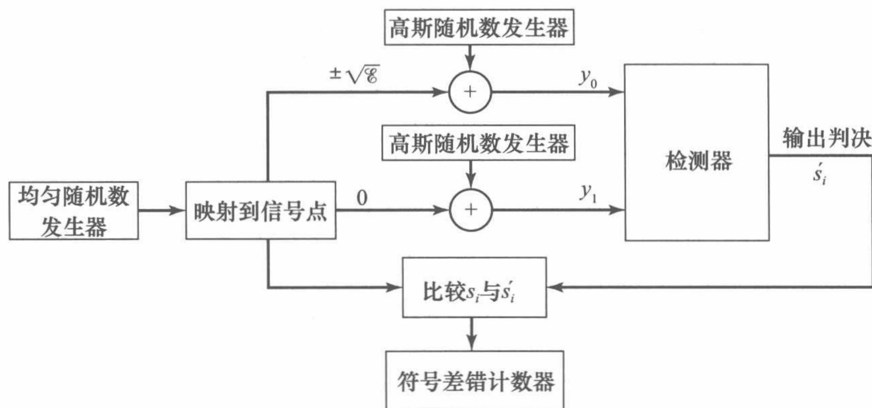
$$01\rightarrow \mathbf{s}_1=(0,\sqrt{\mathscr{E}_s});$$

$$10\rightarrow \mathbf{s}_2=(0,-\sqrt{\mathscr{E}_s});$$

$$11\rightarrow \mathbf{s}_3=(-\sqrt{\mathscr{E}_s},0)$$

由于 $\mathbf{s}_2=-\mathbf{s}_1(t)$ 和 $\mathbf{s}_3=-\mathbf{s}_0$，解调器要求两个相关器或两个匹配滤波器，其输出为 y_0，y_1。通过 2 个高斯噪声发生器分别生成加性噪声分量 n_0 和 n_1，每个噪声分量均值为零，方差为 $\sigma^2=N_0/2$。为方便起见，将符号能量归一化 $\mathscr{E}_s=1$，将 σ^2 作为变量。由于 $\mathscr{E}_s=2\mathscr{E}_b$，可以得到 $\mathscr{E}_b=1/2$。采用差错计数器比较检测器的输出比特序列与发送比特序列，计算错误比特数和错误符号数。

仿真 10 000 个符号(20 000 比特)的传输，SNR/bit 采用 $0\leqslant 10\log\mathscr{E}_b/N_0\leqslant 8\text{dB}$ 范围中若干不同取值。画出比特差错概率的估计值，比较比特差错概率的仿真值与理论计算值，说明比较结果。



上机习题 9.4 图 $M=4$ 双正交信号检测的仿真模型

9.5 二进制 FSK 的非相干解调

本题目的是数字实现一个数字通信系统的相关器型解调器，传输如下形式的二进制 FSK 信号

$$u_1(t)=\cos 2\pi f_1 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T_b$$

$$u_2(t)=\cos 2\pi f_2 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T_b$$

其中 $f_1=1000/T_b$，$f_2=f_1+1/T_b$。假设信道对每个发送信号引入一个相位偏移 $\phi=45°$。相应地，无噪声情况下的接收信号为

$$r(t)=\cos(2\pi f_i t+\pi/4),\quad i=1,2\cdots;0\leqslant t\leqslant T_b$$

采用数字方式实现 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的相关器型解调器。假设以 $F_s=5000/T_b$ 速率在比特间隔 $0\leqslant t\leqslant T_b$ 中对接收信号 $r(t)$ 抽样。因此，接收信号 $r(t)$ 可以用 5000 个样值 $\{r(n/F_s)\}$ 表示。相关解调器将 $\{r(n/F_s)\}$ 与 $u_1(t)=\cos 2\pi f_1 t$，$v_1(t)=\sin 2\pi f_1 t$，$u_2(t)=\cos 2\pi f_2 t$ 和 $v_2(t)=\sin 2\pi f_2 t$ 的抽样信号分别相乘，得到输出信号

$$y_{1c}(k)=\sum_{n=0}^{k}r\left(\frac{n}{F_s}\right)u_1\left(\frac{n}{F_s}\right),\quad k=1,2,\cdots,5000;$$

$$y_{1s}(k)=\sum_{n=0}^{k}r(\frac{n}{F_s})v_1(\frac{n}{F_s}),\quad k=1,2,\cdots,5000;$$

$$y_{2c}(k)=\sum_{n=0}^{k}r(\frac{n}{F_s})u_2(\frac{n}{F_s}),\quad k=1,2,\cdots,5000;$$

$$y_{2s}(k)=\sum_{n=0}^{k}r(\frac{n}{F_s})v_2(\frac{n}{F_s}),\quad k=1,2,\cdots,5000$$

平方律检测器计算两个判决变量

$$y_1=y_{1c}^2(5000)+y_{1s}^2(5000)$$

$$y_2=y_{2c}^2(5000)+y_{2s}^2(5000)$$

选择较大判决变量所对应的信息比特。

编程实现二进制 FSK 信号处理的相关解调器。假设 $r(t)=\cos 2\pi f_1 t$，画出 4 个输出序列 $\{y_{1c}(k), y_{1s}(k), y_{2c}(k), y_{2s}(k)\}$，$0\leqslant k\leqslant 5000$。当 $r(t)=\cos 2\pi f_2 t$ 时，重复上述计算。求两个实验中 y_1 和 y_2 的取值分别是多少？

9.6　二进制 FSK 的非相干检测

本题目的是估计一个二进制 FSK 调制数字通信系统的差错概率。二进制 FSK 信号波形为

$$u_1(t)=\cos 2\pi f_1 t,\quad 0\leqslant t\leqslant T_b$$

$$u_2(t)=\cos 2\pi(f_1+\frac{1}{T_b})t,\quad 0\leqslant t\leqslant T_b$$

需要仿真的二进制 FSK 系统如上机习题 9.6 图所示。

由于信号是正交的，发送 $u_1(t)$ 时第 1 个解调器的输出为

$$y_{1c}=\sqrt{\mathscr{E}_b}\cos\phi+n_{1c}$$

$$y_{1s}=\sqrt{\mathscr{E}_b}\sin\phi+n_{1s}$$

而第 2 个解调器的输出为

$$y_{2c}=n_{2c}$$

$$y_{2s}=n_{2s}$$

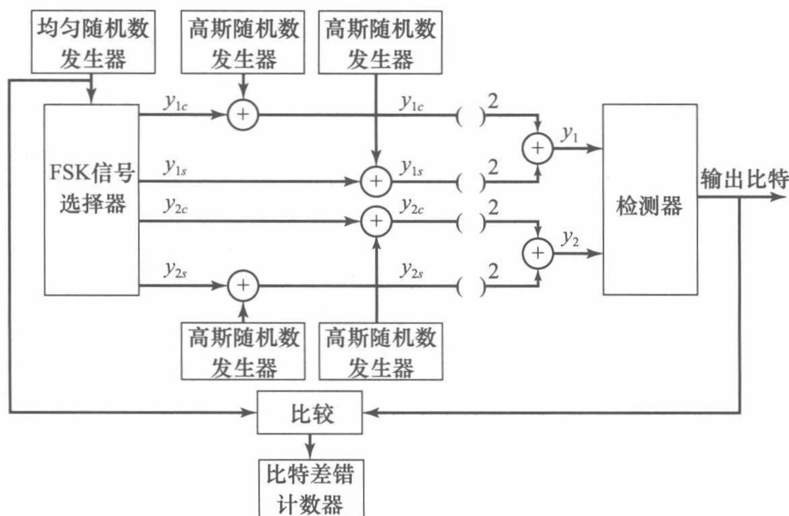
其中，n_{1c}，n_{1s}，n_{2c} 和 n_{2s} 是相互统计独立的零均值高斯随机变量，方差均为 σ^2，ϕ 表示信道相位偏移。为了分析简单，设 ϕ 为零。平方律检测器计算

$$y_1=y_{1c}^2+y_{1s}^2$$

$$y_2=y_{2c}^2+y_{2s}^2$$

选择较大判决变量所对应的信息比特。采用差错计数器比较检测器的输出比特序列与发送比特序列，计算错误比特数和错误符号数。

仿真 10 000 比特的传输，SNR/bit 采用 $0\leqslant 10\log\mathscr{E}_b/N_0\leqslant 12\text{dB}$ 范围中若干不同取值，画出估计的差错概率。同时画出二进制 FSK 的比特差错概率的理论值，比较比特差错概率的仿真值与理论计算值，说明比较结果。



上机习题 9.6 图　二进制 FSK 信号非相干检测的仿真模型

538 ~ 542

第10章

限带 AWGN 信道中的数字传输

前两章中我们研究了加性高斯白噪声信道中的数字通信技术，并针对几种不同类型基带调制技术的最佳接收机的差错概率性能进行了评估。本章将讨论在带宽受限的具有线性滤波器特性的信道中如何进行数字通信。在实际生活中，常见的带宽受限信道包括电话信道、微波视距(LOS)无线信道、卫星信道和水下声波信道。

一般而言，线性滤波器信道对调制信号有更为严格的要求。具体来讲，发送的信号必须满足信道带宽的限制。因此，一般不允许调制输出矩形脉冲信号。需要采用脉冲成形技术将发送信号的频谱限制在信道可用带宽范围内。本章讨论的一个主要问题就是限带信号的设计。

我们将会看到，线性滤波器信道会导致发送信号失真，信道失真将在解调器输出端造成符号间干扰(ISI)，从而导致检测器差错概率的增加。本章将介绍纠正或消除信道失真的器件或方法——信道均衡器。

10.1 限带信道的特征与信号失真

类似电话信道这样的限带信道可以表征为具有冲激响应 $c(t)$、频率响应 $C(f)$ 的线性滤波器，其中，

$$C(f)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t \qquad (10.1.1)$$

如果信道为带宽不超过 B_c Hz 的基带信道，则当 $|f|>B_c$ 时，$C(f)=0$。信道输入端任何高于 B_c Hz 的频率分量都不能通过该信道。为此，需要研究在如图 10-1 所示带宽限制为 $W=B_c$ Hz 的信道中，实现传输的信号设计方法。下面我们用 W 表示信号和信道的限定带宽。

543

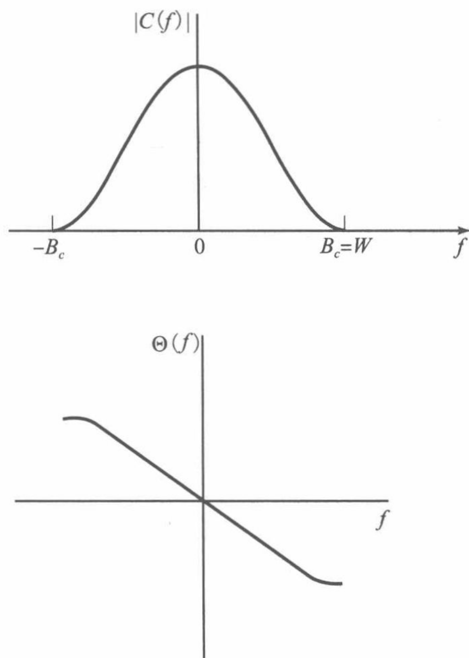


图 10-1 限带信道的幅度和相位响应

假设限带信道的输入信号为 $g_T(t)$，下标 T 表示该信号波形是发射机的输出信号。通过限带信道后的响应为 $g_T(t)$ 与 $c(t)$ 的卷积，即

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\tau)g_T(t-\tau)\mathrm{d}\tau=c(t)*g_T(t) \qquad (10.1.2)$$

或者在频域上表示为

$$H(f)=C(f)G_T(f) \qquad (10.1.3)$$

其中 $G_T(f)$ 是信号 $g_T(t)$ 的频谱，$H(f)$ 是系统冲激响应 $h(t)$ 的频谱。因此，信道会使发送信号 $g_T(t)$ 发生改变或失真。

假设信道的输出信号受到 AWGN 的影响，则解调器的输入信号就变为 $h(t)+n(t)$，其中 $n(t)$ 表示 AWGN。线性滤波器信道模型如图 10-2 所示。

根据第 8 章可知，在 AWGN 信道中，解调器采用与信号 $h(t)$ 相匹配的滤波器可使输

出信号的信噪比(SNR)达到最大。因此，令接收信号$r(t)=h(t)+n(t)$通过一个滤波器，该滤波器的频率响应为

544

$$G_R(f)=H^*(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \tag{10.1.4}$$

其中 t_0 表示对滤波器输出进行抽样的标称时间延迟。下标 R 表示匹配滤波器位于接收端。

$g_T(t)$ / $G_T(f)$ → 线性滤波器信道 $c(t)\leftrightarrow C(f)$ → $h(t)$ → (+) ← $n(t)$ → $r(t)=h(t)+n(t)$

图 10-2　限带信道的线性滤波器模型

在抽样时刻 $t=t_0$，匹配滤波器输出的信号分量为

$$y_s(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f=\mathscr{E}_h \tag{10.1.5}$$

这是信道输出波形 $h(t)$的能量。匹配滤波器输出的噪声分量的均值为零，功率谱密度为

$$\mathcal{S}_n(f)=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2 \tag{10.1.6}$$

匹配滤波器输出的噪声功率有方差

$$\sigma_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_n(f)\mathrm{d}f=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{N_0\mathscr{E}_h}{2} \tag{10.1.7}$$

那么，匹配滤波器的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{\mathscr{E}_h^2}{N_0\mathscr{E}_h/2}=\frac{2\mathscr{E}_h}{N_0} \tag{10.1.8}$$

可以发现，上式就是第 8 章中得到的匹配滤波器输出信噪比，不同之处是用接收信号能量 $\mathscr{E}_h$ 代替了发送信号能量$\mathscr{E}_s$。与前面的结果相比较，主要差别在于滤波器冲激响应与接收信号 $h(t)$相匹配，而不是与发送信号相匹配。注意，接收端匹配滤波器的实现要求$h(t)$或者等效的信道冲激响应 $c(t)$必须为接收端所知。

例 10.1.1 信号脉冲

545

$$g_T(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right],\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

通过频率响应特性如图 10-3a 所示的基带信道传输，信号脉冲如图 10-3b 所示。信道输出信号受到 AWGN 干扰，噪声功率谱密度为$N_0/2$。试求匹配该接收信号的匹配滤波器，并计算该滤波器的输出信噪比。

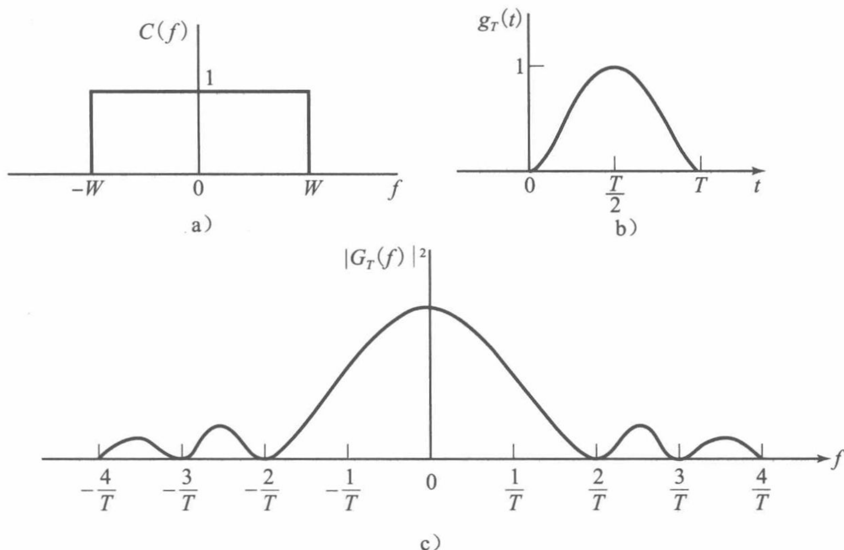


图 10-3　b)中的信号脉冲通过 a)中的理想限带信道传输。$g_T(t)$的频谱如 c)所示

解： 此问题在频域中容易求解。首先，发送信号脉冲的功率谱为

546

$$G_T(f)=\frac{T}{2}\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT(1-f^2T^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}=\frac{T}{2}\frac{\mathrm{sinc}(fT)}{(1-f^2T^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}$$

频谱 $|G_T(f)|^2$ 如图 10-3(c)所示。因此，

$$H(f)=C(f)G_T(f)=\begin{cases}G_T(f), & |f|\leqslant W\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是，与 $H(f)$ 匹配的滤波器输出信号分量为

$$\mathscr{E}_h=\int_{-W}^{W}|G_T(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-W}^{W}\frac{\sin^2(\pi fT)}{f^2(1-f^2T^2)^2}\mathrm{d}f=\frac{T}{(2\pi)^2}\int_{-W}^{W}\frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}\mathrm{d}\alpha$$

噪声分量的方差为

$$\sigma_n^2=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|G_T(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{N_0\mathscr{E}_h}{2}$$

因此输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{2\mathscr{E}_h}{N_0}$$

在这个例子中，可以发现信道输入端的信号不是带宽受限的。因此，接收端仅能接收到发送信号的一部分能量，即落入信道通带 $|f|\leqslant W$ 内的信号能量。当信号脉冲的持续时间固定不变时，匹配滤波器输出的信号能量取决于信道带宽 W 的值(参见习题 10.1)。当 $W\to\infty$ 时，信号能量 $\mathscr{E}_h$ 取得最大值。

$$\max\mathscr{E}_h=\int_{-\infty}^{\infty}|G_T(f)|^2\mathrm{d}f=\int_0^T g_T^2(t)\mathrm{d}t=\mathscr{E}_g$$

$\mathscr{E}_g$ 是信号脉冲 $g_T(t)$ 的能量。◀

在上述分析中，只考虑了一个单独的信号波形 $g_T(t)$ 通过冲激响应为 $c(t)$ 的限带信道的发送和接收。从中可以看出该系统的性能由接收信号 $h(t)$ 的能量 $\mathscr{E}_h$ 决定。为了在接收端得到最大输出信噪比，必须将发送信号波形的频谱 $g_T(t)$ 限制在信道带宽以内。在研究波形序列的传输时，还将体会到信道带宽限制的影响，这个问题将在下一节讨论。

10.1.1　信道传输中的符号间干扰

考虑图 10-4 功能框图所示的基带脉幅调制(PAM)通信系统，该系统包括冲激响应为 $g_T(t)$ 的发送滤波器、含有 AWGN 的线性滤波器信道、冲激响应为 $g_R(t)$ 的接收滤波器、对接收滤波器输出信号进行周期性抽样的抽样器和符号检测器。由 8.9 节的介绍可知，抽样器要从接收信号中提取定时信号。该定时信号用来确定接收滤波器输出信号合适抽样时刻的时钟。

547

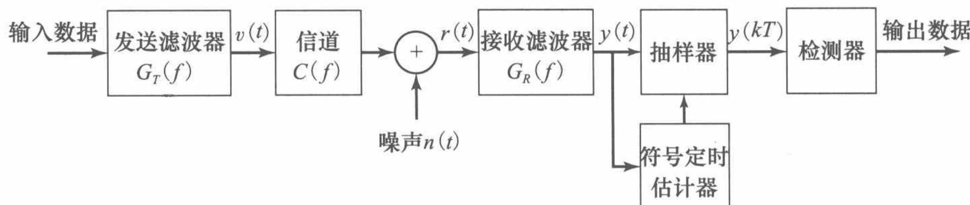


图 10-4　数字 PAM 系统框图

考虑利用 M 进制 PAM 进行数字通信。因此，将输入二进制数据序列分成 k 比特符号，每个符号映射为发送滤波器的输出信号进行振幅调制后的幅度电平。发送滤波器输出的基带信号(即信道的输入)可以表示为一个对应的幅值电平

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g_T(t-nT)\tag{10.1.9}$$

其中 $T=k/R_b$ 是符号间隔($1/T=R_b/k$ 是符号速率)，R_b 是比特速率，$\{a_n\}$ 是对应 k 比特分组序列的幅度电平序列。

信道输出，即解调器的接收信号，可以表示为

$$r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n h(t-nT)+n(t) \tag{10.1.10}$$

其中 $h(t)$ 是发送滤波器与信道级联后的冲激响应，即 $h(t)=c(t)*g_T(t)$，$c(t)$ 为信道的冲激响应，$n(t)$ 表示加性高斯白噪声。

接收信号通过冲激响应为 $g_R(t)$、频率响应为 $G_R(f)$ 的线性接收滤波器。如果 $g_R(t)$ 与 $h(t)$ 相匹配，则输出信噪比在某个适当的抽样时刻取得最大值。接收滤波器的输出信号可以表示为

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x(t-nT)+w(t) \tag{10.1.11}$$

其中 $x(t)=h(t)*g_R(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$，$w(t)=n(t)*g_R(t)$ 表示接收滤波器输出的加性噪声。

548

为了恢复信息符号 $\{a_n\}$，以周期 T 对接收滤波器输出进行抽样。抽样器输出为

$$y(mT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x(mT-nT)+w(mT) \tag{10.1.12}$$

也可等价地表示为

$$y_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x_{m-n}+w_m=x_0 a_m+\sum_{n\neq m}a_n x_{m-n}+w_m \tag{10.1.13}$$

其中 $x_m=x(mT)$，$w_m=w(mT)$，$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。

式(10.1.13)右边第一项是期望符号 a_m 乘以增益参数 x_0 的结果。当接收滤波器与接收信号 $h(t)$ 相匹配时，由式(10.1.4)和式(10.1.5)的推导可以得到该比例因子为

$$x_0=\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f=\int_{-W}^{W}|G_T(f)|^2|C(f)|^2\mathrm{d}f=\mathscr{E}_h \tag{10.1.14}$$

式(10.1.13)右边第二项表示其他符号在抽样时刻 $t=mT$ 产生的影响，称为符号间干扰或符号间干扰(ISI)。符号间干扰通常会导致数字通信系统性能的恶化。最后，表示加性噪声的第三项 w_m 为零均值高斯随机变量，其方差为前面式(10.1.7)给出的 $\sigma_w^2=N_0\mathscr{E}_h/2$。

适当地设计发送滤波器和接收滤波器，可以在 $n\neq0$ 时满足条件 $x_n=0$，从而消除符号间干扰。在这种情况下，导致接收数字序列出现错误的项就只剩下加性噪声了。10.3 节将介绍发送滤波器和接收滤波器的设计问题。

10.1.2 限带带通信道的数字传输

10.1.1 节中基带 PAM 的推导很容易扩展到脉幅调制 PAM、正交幅度调制 QAM 和相移键控 PSK。在载波幅度调制信号中，用式(10.1.9)中的基带 PAM 信号 $v(t)$ 调制载波，得到发送信号 $u(t)$

$$u(t)=v(t)\cos2\pi f_c t \tag{10.1.15}$$

这样，基带信号 $v(t)$ 被频移 f_c。

549

QAM 信号为带通信号，其最简单的形式可以视为相位正交的幅度调制信号。即 QAM 信号可以表示为

$$u(t)=v_c(t)\cos2\pi f_c t-v_s(t)\sin2\pi f_c t \tag{10.1.16}$$

其中

$$v_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nc} g_T(t-nT)$$
$$v_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ns} g_T(t-nT) \tag{10.1.17}$$

其中$\{a_{nc}\}$和$\{a_{ns}\}$是两个正交载波上分别承载的幅度序列。基带信号可以更简洁地表达为复值基带信号

$$v(t) = v_c(t) + \mathrm{j}v_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nc} + \mathrm{j}a_{ns}) g_T(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT) \tag{10.1.18}$$

其中$\{a_n = a_{nc} + \mathrm{j}a_{ns}\}$是一个复值序列，代表 QAM 信号星座图的信号点。对应的 QAM 信号$u(t)$为

$$u(t) = \mathrm{Re}[v_c(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}] \tag{10.1.19}$$

类似地，也可以用式(10.1.19)表示数字载波相位调制信号，其中等价的基带信号为

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT) \tag{10.1.20}$$

并且序列$\{a_n\}$在集合$\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m/M}, m=0, 1, \cdots, M-1\}$中取值。这样，所有这三种载波调制信号——PAM、QAM 和 PSK 信号，都可以用式(10.1.19)和式(10.1.20)表示，唯一不同的是发送序列$\{a_n\}$的取值。

式(10.1.20)给出的信号$v(t)$称为等效低通信号。对于 QAM 信号和 PSK 信号，由于基带信号$\{a_n\}$是复值的，因此该等效低通信号也是复值基带信号。对于 PAM 信号，$v(t)$是实值信号。

550

经基带信道传输，接收到的带通信号可以表示为

$$q(t) = \mathrm{Re}[r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}] \tag{10.1.21}$$

其中$r(t)$是等效低通(基带)信号，可以表示为

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t-nT) + n(t) \tag{10.1.22}$$

并且，在基带传输中$h(t)$为发送滤波器和信道级联的冲激响应，即$h(t) = c(t) * g_T(t)$。其中$c(t)$是等效低通信道的冲激响应，$n(t)$表示加性高斯白噪声，在这里是等效低通(基带)噪声。

将接收的带通信号$q(t)$与正交载波信号$\cos 2\pi f_c t$和$\sin 2\pi f_c t$分别相乘，然后将两个相互正交的分量通过低通滤波器，如图 10-5 所示，可以滤除倍频分量，从而将接收的带通信号转换成基带信号。假设两个低通滤波器的冲激响应为$g_R(t)$，则可将两个低通滤波器输出的正交分量表示为等效的复值信号

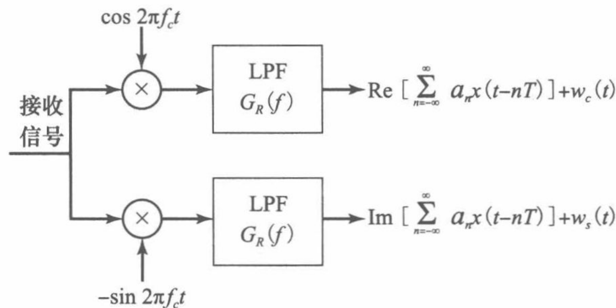


图 10-5　带通接收信号转换为基带信号

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t-nT) + w(t) \tag{10.1.23}$$

对于实值基带信号，上式与式(10.1.11)等价。可以发现，带通信号的设计问题与 10.1.1 节基带信号的设计基本一致。

10.3 节中将讨论能消除或控制 ISI 的限带发送滤波器和接收滤波器的设计。在此之前，先确定发送数字信号的功率谱，就可以建立发送信号功率谱与信道带宽要求之间的关系。 551

10.2　数字调制信号的功率谱

这一节将描述 PAM，PSK 和 QAM 等线性调制数字信号的功率谱。

如 10.1.2 节所述，PAM，PSK 或 QAM 数字信号的等价基带发送信号的一般表达式为

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT) \tag{10.2.1}$$

其中，$\{a_n\}$是对应信源信息符号的 PAM，QAM 或 PSK 信号的星座图中选定的取值序列，而 $g_T(t)$是发送滤波器的冲激响应。由于信息序列$\{a_n\}$是随机的，$v(t)$是随机过程 $V(t)$的样本函数。在这一节中，我们将估计 $V(t)$的功率谱密度。具体方法是先推导 $V(t)$的自相关函数，然后再求出其傅里叶变换。推导过程在附录 10A 中给出。

基带信号 $v(t)$的功率谱可以表示为

$$\mathcal{S}_V(f) = \frac{1}{T}\mathcal{S}_a(f)\,|G_T(f)|^2 \tag{10.2.2}$$

其中$\mathcal{S}_a(f)$是信息序列$\{a_n\}$的功率谱，定义为

$$\mathcal{S}_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a[m]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fmT} \tag{10.2.3}$$

$G_T(f)$是发送滤波器的频谱，$R_a[m]$是信息序列$\{a_n\}$的自相关序列，定义为

$$R_a[m] = E[a_n^* a_{n+m}] \tag{10.2.4}$$

式(10.2.2)的结果说明发送信号的功率谱密度与发送滤波器谱特性 $G_T(f)$及信息序列$\{a_n\}$的功率谱$\mathcal{S}_a(f)$有关。可以通过设计 $G_T(f)$和$\mathcal{S}_a(f)$控制发送信号功率谱密度的形状。

虽然$\mathcal{S}_V(f)$和 $G_T(f)$的相关关系容易理解，但是信息序列自相关特征的影响很微妙。首先，可以发现对于任意自相关 $R_a[m]$，相应的功率谱密度$\mathcal{S}_a(f)$是以频率$1/T$为周期的。实际上，式(10.2.3)给出的$\mathcal{S}_a(f)$是以$\{R_a[m]\}$为系数的指数形式傅里叶级数，相应地，自相关序列$\{R_a[m]\}$可以表示为

$$R_a[m] = T\int_{-1/2T}^{1/2T} \mathcal{S}_a(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi fmT}\mathrm{d}f \tag{10.2.5}$$ 552

其次，考虑序列$\{a_n\}$中的符号互不相关的情况，则有

$$R_a[m] = \begin{cases}\sigma_a^2 + m_a^2, & m = 0\\ m_a^2, & m \neq 0\end{cases} \tag{10.2.6}$$

其中 $\sigma_a^2 = E(\sigma_n^2) - m_a^2$ 是信息符号的方差。将 $R_a[m]$代入式(10.2.3)，可以得到功率谱密度为

$$\mathcal{S}_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fmT} \tag{10.2.7}$$

式(10.2.7)中对等号右侧的求和是以$1/T$为周期的。可以视为冲激序列的指数傅里叶级数，每个冲激的面积为$1/T$(见表 2.1)。因此式(10.2.7)可以表示为

$$\mathcal{S}_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) \tag{10.2.8}$$

将此表达式代入式(10.2.2)的$\mathcal{S}_V(f)$表达式中，可以得符号序列统计无关条件下，发送信号 $V(t)$的功率谱密度为

$$\mathcal{S}_V(f)=\frac{\sigma_a^2}{T}|G_T(f)|^2+\frac{m_a^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|G_T\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) \tag{10.2.9}$$

式(10.2.9)特意将发送信号功率谱密度表示为两项，以强调两类不同的功率谱分量。式(10.2.9)的第一项$\sigma_a^2|G_T(f)|^2/T$是连续谱分量，其形状取决于$G_T(f)$；第二项由间隔$1/T$的离散频谱分量构成，$f=m/T$处每根谱线的功率与$|G_T(f)|^2$成正比。发现通过选择零均值信息符号序列$\{a_n\}$，可以消除离散频谱分量。由于离散谱线被认为是不理想的，数字调制中通常都具备符号序列零均值这个条件。具体地讲，通过在星座图中选择相对于原点的复平面上对称位上的信号星座点，很容易将 PAM、PSK 或 QAM 的均值置为零。在$m_a=0$的条件下，可以得到

$$\mathcal{S}_V(f)=\frac{\sigma_a^2}{T}|G_T(f)|^2 \tag{10.2.10}$$

因此，通过选择发送滤波器的$G_T(f)$，系统设计者可以控制发送信号的谱特征。下面的例子说明$g_T(t)$的频谱形成过程。

553

例 10.2.1 求式(10.2.10)的功率谱密度，设$g_T(t)$如图 10-6a 所示的矩形脉冲。

解： $g_T(t)$的傅里叶变换为

$$G_T(f)=AT\,\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}$$

则有

$$|G_T(f)|^2=(AT)^2\left(\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right)^2=(AT)^2\operatorname{sinc}^2(fT)$$

此功率谱密度如图 10-6b 所示，具有$1/T$倍频处的过零点，并且衰减与频率变量平方成反比。◀

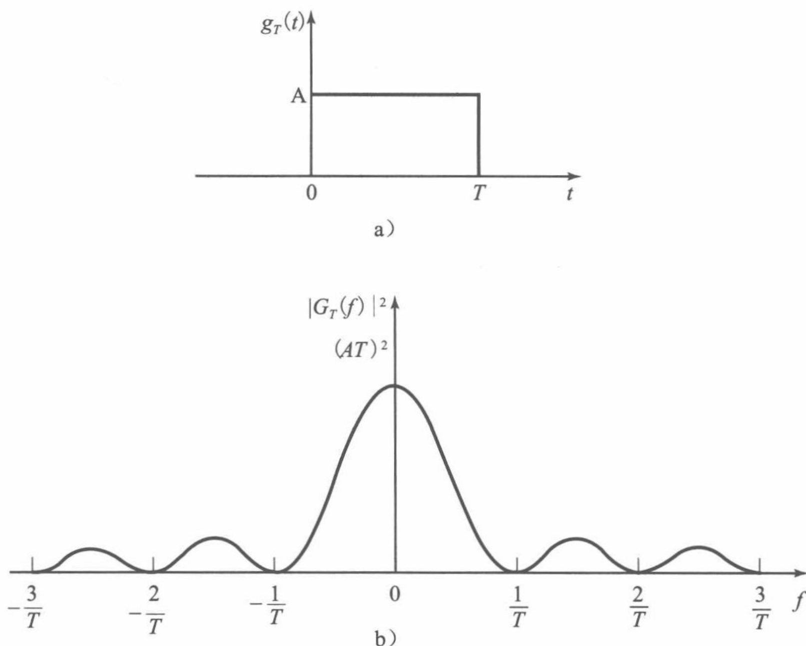


图 10-6 矩形脉冲$g_T(t)$及其功率谱密度$|G_T(f)|^2$

例 10.2.2 说明对输入信息序列进行处理可以实现谱形成。

例 10.2.2 考虑一个二进制序列$\{b_n\}$，可以形成符号

$$a_n=b_n+b_{n-1}$$

554

假设$\{b_n\}$是统计无关的二值随机变量，具有零均值和单位方差。求发送信号的功率谱密度。

解： 序列$\{a_n\}$的自相关函数为

$$R_a[m]=E(a_n a_{n+m})=E[(b_n+b_{n-1})(b_{n+m}+b_{n+m-1})]=\begin{cases}2, & m=0\\ 1, & m=\pm 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因此，输入序列的功率谱密度为

$$\mathcal{S}_a(f)=2(1+\cos 2\pi fT)=4\cos^2\pi fT$$

并且根据式(10.2.2)可以得到相应的已调信号功率谱为

$$\mathcal{S}_V(f)=\frac{4}{T}\left|G_T(f)\right|^2\cos^2\pi fT$$

图 10-7 给出了输入序列的功率谱密度$\mathcal{S}_a(f)$，和 $G_T(f)$为矩形脉冲时相应的$\mathcal{S}_V(f)$。

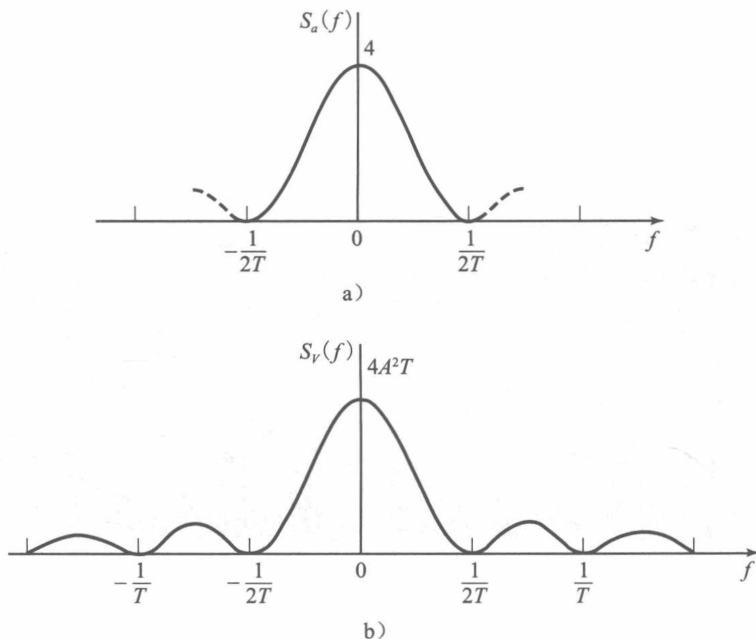


图 10-7　a)信息序列及 b)PAM 调制信号的信号功率谱密度

如上例所示，将相关序列$\{a_n\}$作为调制器的输入，可以实现发送信号的频谱形成。 555

得到基带信号 $v(t)$的功率谱后，很容易就可以得到相应的带通信号 $u(t)$

$$u(t)=\mathrm{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

的功率谱。附录 10A 中将证明 $u(t)$的功率谱为

$$\mathcal{S}_u(f)=\frac{1}{4}[\mathcal{S}_v(f-f_c)+\mathcal{S}_v(f+f_c)]$$

因此，带通信号的功率谱就是将 $v(t)$的功率谱平移载频$\pm f_c$，并将结果乘以 1/4。

10.3　限带信道的信号设计

本节将研究限带发送滤波器的设计问题。首先，在没有信道失真的条件下研究此问题，然后再考虑信道导致发送信号失真时的滤波器设计问题。由于 $H(f)=C(f)G_T(f)$，可知无失真传输的条件为，在发送信号带宽之内，信道频率响应特性 $C(f)$必须具有恒定幅度特性和线性相位特性。即

$$C(f)=\begin{cases}C_0 e^{-j2\pi f t_0}, & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases}\tag{10.3.1}$$

其中 W 是可用信道带宽，t_0 是任意有限延时，为方便起见可以将其设为零，C_0 是常数因子，为方便起见可以设为 1。这样，在信道无失真且 $g_T(t)$带宽不超过 W 的条件下，有 $H(f)=G_T(f)$。那么，接收机匹配滤波器的频率响应为 $G_R(f)=G_T^*(f)$，并且在周期性

的抽样时刻$t=mT$输出为

$$y(mT)=x(0)a_m+\sum_{n\neq m}a_n x(mT-nT)+w(mT) \tag{10.3.2}$$

或者简写为

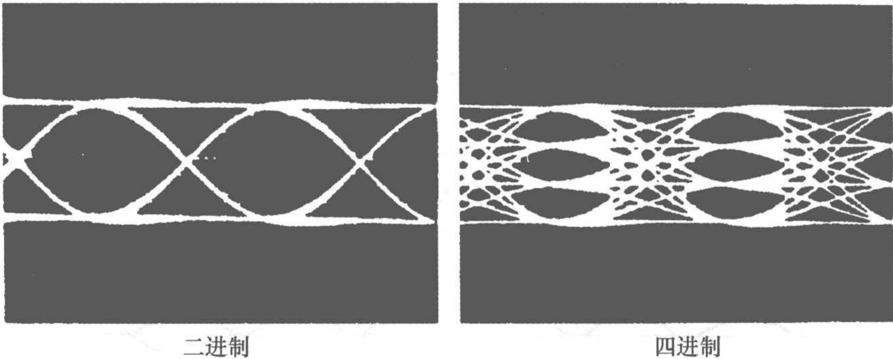
$$y_m=x_0 a_m+\sum_{n\neq m}a_n x_{m-n}+w_m \tag{10.3.3}$$

其中 $x(t)=g_T(t)^* g_R(t)$，$w(t)$是输入 AWGN 噪声 $n(t)$的匹配滤波器输出。

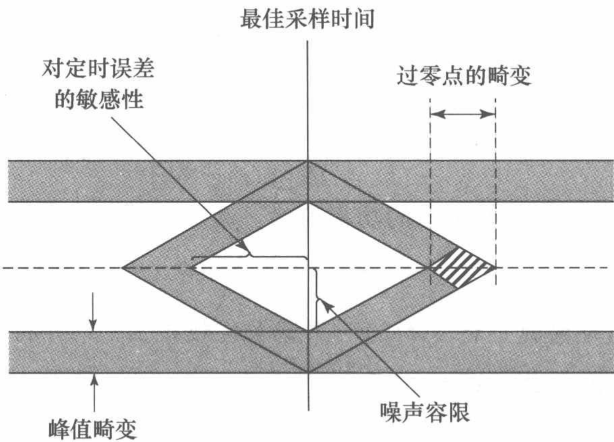
式(10.3.3)等号右侧的中间项表示 ISI。接收信号中的 ISI 项和噪声项可以在示波器上观察。具体地讲，可以将接收信号作为垂直输入量，水平扫描速率设为$1/T$，则示波器上显示的图形类似人的眼睛，称为眼图。图 10-8a 给出了两个眼图的例子，一个是二进制 PAM 信号的眼图，另一个是四进制($M=4$)PAM 信号的眼图。

556

ISI 的影响会引起眼睛闭合，导致引起差错的加性噪声容限降低。图 10-8b 说明了 ISI 降低眼睛张开程度的影响。注意 ISI 会导致过零点的位置发生畸变，并且引起眼睛张开程度的降低。因此系统对同步误差更敏感，对加性噪声有更小的容限。



a）二进制和四进制PAM的眼图示例



b）ISI对眼睛张开程度的影响

图 10-8　眼图

例 10.3.1 考虑二进制 PAM 系统，在带宽为 W 的理想信道上以$1/T$速率发送数据。接收机的匹配滤波器抽样输出为

557

$$y_m=a_m+0.2a_{m-1}-0.3a_{m-2}+w_m$$

其中 $a_m=\pm1$，等概发生。求如图 10-8b 定义的 ISI 峰值和噪声容限。

解： 如果将匹配滤波器输出 y_m 与式(10.3.3)给出的结果比较，显然有 $x_0=1$，$x_1=0.2$，$x_3=-0.3$，否则有 $x_m=0$。当 $a_{m-1}=-a_{m-2}$时，ISI 取得峰值$+0.5$。由于 $x_0=1$，$a_m=\pm1$，ISI 在抽样时刻 $t=mT$，

$m=0$，± 1，± 2，…的眼睛张开程度降低 50%，则噪声容限降低 50%，到达 0.5。因此，相比零 ISI 的情况，噪声分量比引起检测器发生差错的噪声低 50%。 ◀

下面，考虑下列两个条件下的信号设计问题：抽样时刻零 ISI，有控制地允许一定量的 ISI。

10.3.1 零 ISI 的限带信号设计——奈奎斯特准则

考虑图 10-4 所示数字通信系统，接收滤波器输出的信号分量 $x(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$在频域上可以表示为

$$X(f)=G_T(f)C(f)G_R(f)=G_T(f)G_R(f)C_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}=G_T(f)G_R(f) \tag{10.3.4}$$

其中 $G_T(f)$和 $G_R(f)$分别为发送滤波器和接收滤波器的频率响应，$C(f)=C_0\exp(-\mathrm{j}2\pi f t_0)$，$|f|\leqslant W$，表示信道的频率响应，并且为了表示方便，令 $C_0=1$，$t_0=0$。从(10.3.3)式可以得到 $t=mT$，$m=\cdots$，-2，-1，0，1，2，…各时刻的周期性抽样值。这个表达式的等号右侧第 1 项对应想要接收的符号，第 2 项构成 ISI，第 3 项是加性噪声。

消除 ISI 影响的充要条件是，对 $n\neq m$ 且 $x(0)\neq 0$，有 $x(mT-nT)=0$。不失一般性，假设 $x(0)=1$。这就意味着需要设计整个通信系统以保证

$$x(nT)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{10.3.5}$$

在这一节中，我们要推导出 $X(f)$的充要条件使 $x(t)$满足上面的关系式。这个条件就是奈奎斯特脉冲形成准则或者零 ISI 奈奎斯特条件。

零 ISI 奈奎斯特条件。使 $x(t)$满足

558

$$x(nT)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{10.3.6}$$

的充要条件是其傅里叶变换必须满足

$$\sum_{m=\infty}^{\infty}X\left(f+\frac{m}{T}\right)=T \tag{10.3.7}$$

证明：$x(t)$是 $X(f)$的反傅里叶变换，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}f \tag{10.3.8}$$

在抽样时刻 $t=nT$，上式变成

$$x(nT)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f nT}\mathrm{d}f \tag{10.3.9}$$

将式(10.3.9)的积分分解成有限范围$1/T$上积分之和，可以得到

$$\begin{aligned}x(nT)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{(2m-1)/2T}^{(2m+1)/2T}X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f nT}\mathrm{d}f=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-1/2T}^{1/2T}X(f+\frac{m}{T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f nT}\mathrm{d}f\\&=\int_{-1/2T}^{1/2T}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(f+\frac{m}{T})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f nT}\mathrm{d}f=\int_{-1/2T}^{1/2T}Z(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f nT}\mathrm{d}f\end{aligned} \tag{10.3.10}$$

其中 $Z(f)$可以定义为

$$Z(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(f+\frac{m}{T}) \tag{10.3.11}$$

显然，$Z(f)$是以$1/T$为周期的周期函数。因此，可以将其表示为系数为$\{z_n\}$的傅里叶级数，即

$$Z(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n f T} \tag{10.3.12}$$

其中，

$$z_n = T\int_{-1/2T}^{1/2T} Z(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nfT}\mathrm{d}f \tag{10.3.13}$$

对比式(10.3.13)与式(10.3.10)，可以得到

559

$$z_n = Tx(-nT) \tag{10.3.14}$$

因此，要满足式(10.3.6)的充要条件是

$$z_n = \begin{cases} T, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases} \tag{10.3.15}$$

将其代入式(10.3.12)，可以得到

$$Z(f) = T \tag{10.3.16}$$

或者，等价于

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f+\frac{m}{T}) = T \tag{10.3.17}$$

这就是要保证 ISI 为零，$X(f)$必须满足的条件。

假设信道带宽为 W。那么对于$|f|>W$，$C(f)=0$；因而对于$|f|>W$，$X(f)=0$。可以区分三种情况。

1. 第一种情况，$T<\frac{1}{2W}$或者等价于$\frac{1}{T}>2W$。如图 10-9 所示，$Z(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f+\frac{n}{T})$由间隔为$\frac{1}{T}$的互不交叠的 $X(f)$构成。这种情况下，不存在满足 $Z(f)=T$ 的 $X(f)$。因此，这种情况下，无法设计零 ISI 的系统。

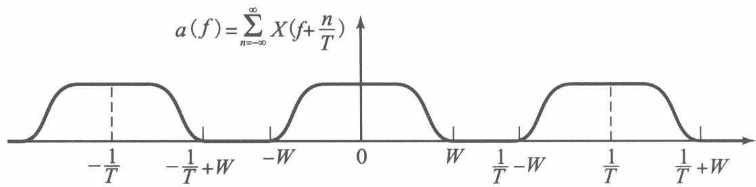


图 10-9 $T<\frac{1}{2W}$情况下的 $Z(f)$示意图

2. 第二种情况，$T=\frac{1}{2W}$或者等价于$\frac{1}{T}=2W$(奈奎斯特速率)。如图 10-10 所示，间隔

560

为$\frac{1}{T}$的 $X(f)$刚好不交叠，显然，仅有一种 $X(f)$能满足 $Z(f)=T$，即

$$X(f) = \begin{cases} T, & |f|<W \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{10.3.18}$$

或者 $X(f)=T\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$，相应地

$$x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{10.3.19}$$

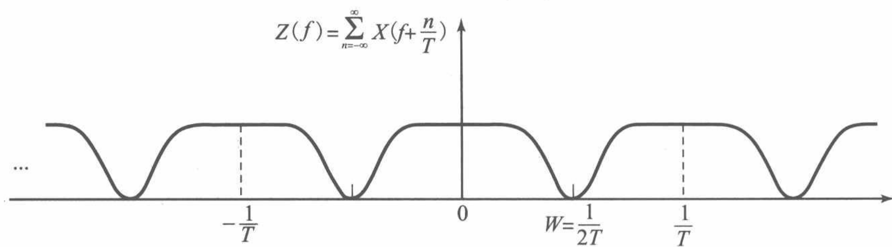


图 10-10 $T=\frac{1}{2W}$情况下的 $Z(f)$示意图

这意味着可能实现零 ISI 传输的最小 T 值是 $T=\frac{1}{2W}$，且在此取值下，$x(t)$须为 sinc 函数。这种 $x(t)$波形选择的困难在于其非因果性，亦即不可实现性。要使它可实现，通常采用它的延迟信号 $\text{sinc}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$，选择其中的 t_0，保证 $t<0$ 时，$\text{sinc}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\approx 0$。当然，对于这样的 $x(t)$，抽样时刻也要延迟到 $mT+t_0$。这种脉冲波形的第 2 个困难是其收敛到零的速度慢。$x(t)$的尾部衰减速度为$1/t$，那么解调器中匹配滤波器输出抽样时刻的一个小偏移量，可能导致 ISI 分量的无穷级数。因为脉冲衰减速率为$1/t$，此级数不是绝对可积的，因此所导致的 ISI 之和不收敛。

3. 第三种情况，$T>\frac{1}{2W}$或者等价于$\frac{1}{T}<2W$。如图 10-11 所示，$Z(f)$由间隔为$\frac{1}{T}$的相互交叠的 $X(f)$构成。这种情况下，$X(f)$有无穷多种选择，例如 $Z(f)\equiv T$。

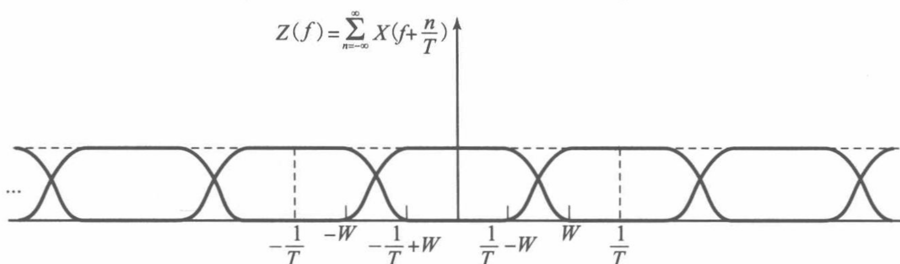


图 10-11　$T>\frac{1}{2W}$情况下的 $Z(f)$示意图

对于 $T>\frac{1}{2W}$，升余弦频谱是一种具有理想频谱特性并且在实际中广泛使用的脉冲频谱。升余弦特性表示如下(参见习题 10.5)

$$X_{\text{rc}}(f)=\begin{cases}T, & 0\leqslant |f|\leqslant \frac{1-\alpha}{2T}\\ \frac{T}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f|-\frac{1-\alpha}{2T}\right)\right)\right], & \frac{1-\alpha}{2T}\leqslant |f|\leqslant \frac{1+\alpha}{2T}\\ 0, & |f|>\frac{1+\alpha}{2T}\end{cases} \tag{10.3.20}$$

561

其中 α 称为滚降因子，取值范围为 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$。信号带宽超出奈奎斯特频率$\frac{1}{2T}$的部分称为额外带宽，通常表示为相对于奈奎斯特频率的百分比。例如，当 $\alpha=\frac{1}{2}$时，额外带宽为 50%；当 $\alpha=1$ 时，额外带宽为 100%。具有升余弦频谱的脉冲 $x(t)$可以表示为

$$x(t)=\frac{\sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}\frac{\cos\frac{\pi\alpha t}{T}}{1-\frac{4\alpha^2t^2}{T^2}}=\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\frac{\cos\frac{\pi\alpha t}{T}}{1-\frac{4\alpha^2t^2}{T^2}} \tag{10.3.21}$$

注意，对 $x(t)$归一化可以保证 $x(0)=1$。图 10-12 给出了升余弦频谱特性，及 $\alpha=0$，1/2，1 时分别对应的脉冲波形 $x(t)$。可以看到，$\alpha=0$ 时，对应脉冲为 $x(t)=\text{sinc}(t/T)$，符号速率为$1/T=2W$。当 $\alpha=1$ 时，符号速率为$1/T=W$。总之，当 $\alpha>0$ 时，$x(t)$的尾部衰减速率为$1/t^3$。这样，抽样中的定时错误引起的符号间干扰序列能收敛至有限值。

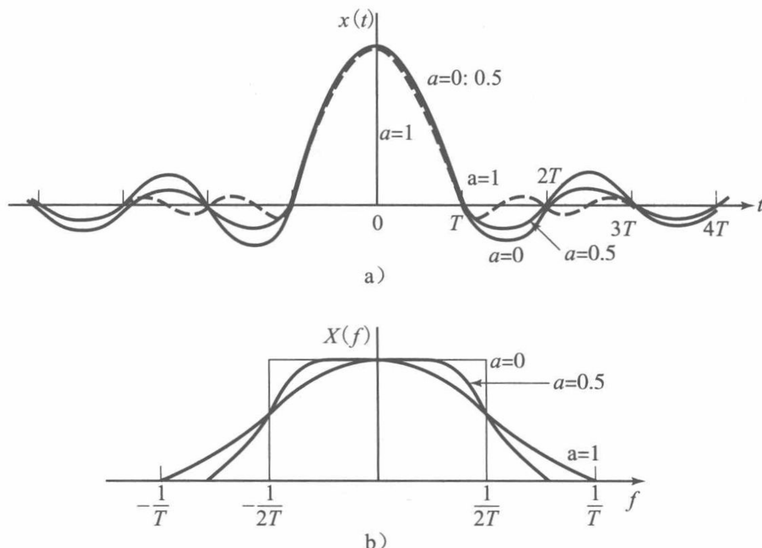


图 10-12 具有升余弦频谱的脉冲

由于升余弦频谱特性的平滑性，可以为发送机和接收机设计实际的滤波器，实现对总的理想频率响应的近似。在理想信道特性 $C(f)=\Pi(f/2W)$ 的特殊情况下，有

562

$$X_{rc}(f)=G_T(f)G_R(f) \tag{10.3.22}$$

这种情况下，如果接收滤波器与发送滤波器匹配，则有 $X_{rc}(f)=G_T(f)G_R(f)=|G_T(f)|^2$。那么发送滤波器理想特性为

$$G_T(f)=\sqrt{|X_{rc}(f)|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \tag{10.3.23}$$

且接收滤波器的特性为 $G_R(f)=G_T^*(f)$，其中 t_0 为保证滤波器物理可实现性所要求的标称时延。因此，总的升余弦谱特性可以均匀地分解为发送滤波器特性和接收滤波器特性。可以发现，额外时延是保证接收滤波器物理可实现性的必要条件。

例 10.3.2 理想信道的频响特性如图 10-13 所示，要使 $G_T(f)G_R(f)=X_{rc}(f)$，$X_{rc}(f)$ 是由式(10.3.20)给出的升余弦频谱特性，并且滚降系数为 $\alpha=1/2$，求发送滤波器和接收滤波器的频响特性 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$，及符号速率 $1/T$，并与奈奎斯特速率比较。

解：由于信道通频带为 $|f|<1200$，$\alpha=1/2$，则有

$$\frac{1+\alpha}{2T}=\frac{3/2}{2T}=1200$$

可得符号速率 $1/T=1600$ 符号/秒。相应的奈奎斯特速率为 2400 符号/秒。频响特性 $X_{rc}(f)(1/T=1600)$ 可以表示为

$$X_{rc}(f)=\begin{cases}T & 0\leqslant|f|\leqslant 400\\ \dfrac{T}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi}{800}(|f|-400)\right)\right] & 400\leqslant|f|\leqslant 1200\\ 0 & |f|\geqslant 1200\end{cases}$$

那么，

$$|G_T(f)|=|G_R(f)|=\sqrt{|X_{rc}(f)|}$$

563

$G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 的相频特性可以选择线性形式，$\theta_R(f)=-\theta_T(f)$。◀

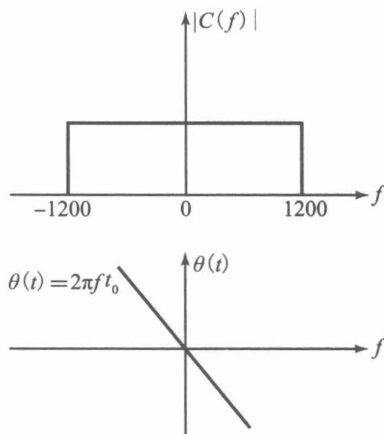


图 10-13 例 10.3.2 的理想信道频响特性

10.3.2 受控 ISI 限带信号设计——部分响应信号

从零 ISI 的信号设计讨论中可以发现，要保证发送滤波器和接收滤波器的物理可实现性，需要将符号速率 $1/T$ 降至奈奎斯特速率每秒 $2W$ 个符号以下。另一方面，假设可以将

零 ISI 的条件放松，以实现每秒 $2W$ 个符号的发送速率，只能通过控制 ISI 的数量，实现此符号速率。

由前面的讨论已知，零 ISI 的条件是对于 $n\neq 0$ 有 $x(nT)=0$。假设可以设计一种信号，控制 ISI 仅在一个时刻出现，即允许样值 $\{x(nT)\}$ 中存在一个额外的非零值，这样引入的 ISI 是确定的或"受控的(controlled)"，可以在接收端去除。下面我们将讨论这种方法。

保证发送滤波器和接收滤波器(近似)物理可实现的一种具体方案是，定义样值[⊖]为

$$x(nT)=\begin{cases}1, & n=0,1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{10.3.24}$$

那么根据式(10.3.14)，可得

$$z_n=\begin{cases}T, & n=0,-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{10.3.25}$$

代入式(10.3.12)，则有

$$Z(f)=T+T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nfT} \tag{10.3.26}$$

与前一节同理可得，上式对于 $T<\frac{1}{2W}$ 不可能成立。但是，对于 $T=\frac{1}{2W}$ 可得

$$\begin{aligned}X(f)&=\begin{cases}\frac{1}{2W}[1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f/W}], & |f|<W\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\\ &=\begin{cases}\frac{1}{W}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f/2W}\cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right), & |f|<W\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned} \tag{10.3.27}$$

相应地 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=\mathrm{sinc}(2Wt)+\mathrm{sinc}(2Wt-1) \tag{10.3.28}$$

此脉冲称为双二进制信号脉冲。图 10-14 给出此脉冲信号及其幅度频谱特性。可以发现，频谱平滑地衰减至零，意味着可以设计物理可实现的滤波器，非常近似地实现这个频谱特性。这样，就可以达到 $2W$ 的符号速率。 564

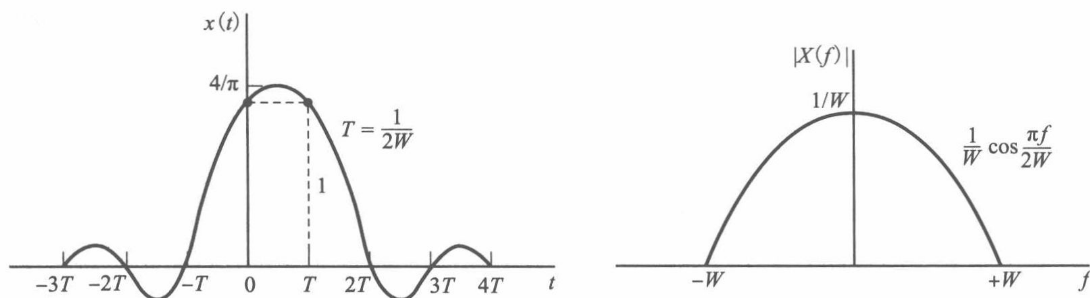


图 10-14　双二进制信号的时域和频域特征

保证发送滤波器和接收滤波器(近似)物理可实现的另一种特定方案是，定义样值为

$$x(nT)=\begin{cases}1, & n=-1\\ -1, & n=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{10.3.29}$$

相应地 $x(t)$ 可以表示为

⊖ 将 $x(t)$ 在 $n=0$，1 时的样值归一化便于分析。

$$x(t)=\operatorname{sinc}\left(\frac{t+T}{T}\right)-\operatorname{sinc}\left(\frac{t-T}{T}\right) \tag{10.3.30}$$

其频谱为

$$X(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{2W}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f/W}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi f/W}\right]=\dfrac{j}{W}\sin\left(\dfrac{\pi f}{W}\right), & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases} \tag{10.3.31}$$

此脉冲及其幅频特性在图 10-15 中给出。称此脉冲为修正双二进制信号脉冲。有趣的是，可以发现，此信号的频谱在 $f=0$ 处取值为零，适合在隔断直流的信道中传输。

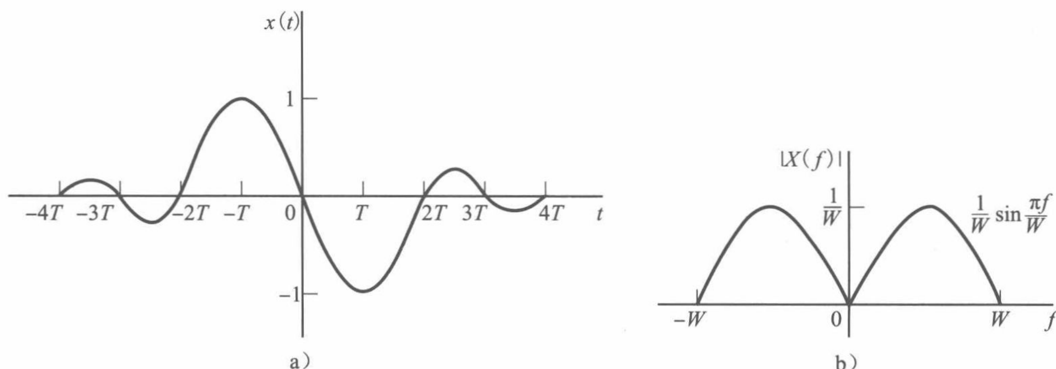


图 10-15 修正的双二进制信号的时域和频域特征

选择不同的抽样值$\{x(nT)\}$并且选择多于两个非零样值，可以得到其他有趣的物理可实现的滤波器特性。不过，如果选择多个非零样值，消除受控 ISI 的问题会变得更复杂甚至不可实现。

一般来讲，具有下列时域表达式

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(\frac{n}{2W}\right)\frac{\sin 2\pi W\left(t-\frac{n}{2W}\right)}{2\pi W\left(t-\frac{n}{2W}\right)}$$

且相应频谱为

$$X(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{2W}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x\left(\dfrac{n}{2W}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi f/W}, & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases}$$

的限带信号称为**部分响应信号**，因为这类信号具有受控的 ISI，并且这种 ISI 是通过从集合$\{x(n/W)\}$中选择两个或多个非零样值而有意引入的。采用这样的信号脉冲，能够以 2W 符号/秒的奈奎斯特速率发送信息符号。下一节介绍如何在有受控 ISI 的情况下检测接收符号。

10.4 部分响应信号的检测

当发送滤波器和接收滤波器 $G_T(f)$和 $G_R(f)$是按照零 ISI 设计的，前两章所介绍的各种调制方法都可以不加修改的应用，并且它们在高斯白噪声中的差错概率性能保持不变，如这两章中推导所示。这一节要讨论的是，在有受控 ISI 的系统下，数据符号的检测，以及检测器的差错概率性能。

565 ~ 566

10.4.1 逐符号检测

本节要介绍接收信号中具有受控 ISI 的情况下，在 PAM 信号解调器中检测信息符号的逐符号检测方法，这种符号检测方法很容易实现。另一种基于最大似然(ML)检测出一系列符号的检测方法将在 10.4.3 节介绍，这种方法能将差错概率最小化，但是实现比较

复杂。具体考虑双二进制和修正双二进制部分响应信号检测的两种情况。在这两种情况中，均假设部分响应信号的理想频谱特性$X(f)$可以在发送滤波器和接收滤波器之间均匀分解，即$|G_T(f)|=|G_R(f)|=|X(f)|^{1/2}$。

对于双二进制信号脉冲，当$n=0$，1时$x(nT)=1$，否则为零。则接收滤波器输出样值可以表示为

$$y_m = b_m + w_m = a_m + a_{m-1} + w_m \tag{10.4.1}$$

其中$\{a_m\}$是发送的幅值序列，$\{w_m\}$是加性高斯噪声样值。暂时忽略噪声，考虑$a_m=\pm1$等概率出现的双二进制情况。那么b_m有3个可能取值，即$b_m=-2$，0，2，概率分别为1/4，1/2和1/4。如果在$(m-1)$开始的信号间隔中检测到a_{m-1}，它对m信号间隔中接收信号b_m的影响可以通过减法消除，这样就可以检测出a_m。对每个接收符号可以顺序地重复这个过程。

这个处理过程的主要问题是，加性噪声引起的差错可能发生传播。例如，如果检测器在检测a_{m-1}时出现错误，那么它对b_m的影响就不能消除；实际上，由于错误的减法还会加重影响。因此，对a_m的检测就可能出现差错。

在发送端进行数据预编码可以取代接收端减法运算来消除受控ISI，从而避免差错传播。对二元数据序列的预编码是在调制之前进行的。根据要发送的0、1数据序列$\{d_n\}$，可以产生新序列$\{p_n\}$，称为预编码序列。根据双二进制信号，可以定义预编码序列为

$$p_m = d_m \ominus p_{m-1}, \quad m = 1,2,\cdots, \tag{10.4.2}$$

其中，"$\ominus$"表示模二减[⊖]。那么，若$p_m=0$设$a_m=-1$，若$p_m=1$设$a_m=1$，即$a_m=2p_m-1$。

接收滤波器输出的无噪声抽样值可以表示为

$$b_m = a_m + a_{m-1} = (2p_m - 1) + (2p_{m-1} - 1) = 2(p_m + p_{m-1} - 1) \tag{10.4.3}$$

567

则有

$$p_m + p_{m-1} = \frac{b_m}{2} + 1 \tag{10.4.4}$$

由于$d_m = p_m \oplus p_{m-1}$，利用下式

$$d_m = \frac{b_m}{2} + 1 \pmod 2 \tag{10.4.5}$$

可得数据序列d_m。那么，若$b_m=\pm2$则$d_m=0$；若$b_m=0$则$d_m=1$。由(10.4.5)式可以清楚地看到预编码的效果。第m个符号b_m的接收电平与同一时间内的数据d_m直接相关，因此，b_m的错误仅仅影响对应的数据d_m，而不会产生差错传播。

例 10.4.1 对于如下双二进制数据序列$\{d_n\}$

1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1

确定其预编码序列$\{p_n\}$，发送序列$\{a_n\}$，接收序列$\{b_n\}$以及解码序列$\{d_n\}$。

解：利用式(10.4.2)、(10.4.3)及(10.4.5)，可以得到所求序列，如表10-1所示。◀

表 10-1 双二进制脉冲的二进制信号

数据序列 d_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
预编码序列 p_n	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
发送序列 a_n	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	−1
接收序列 b_n		0	0	0	2	0	−2	−2	0	2	2	2	0	0	2	0
解码序列 d_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1

⊖ 尽管模2减等价于模2加，采用模2减可以使双二进制信号的预编码更容易理解。在M进制的情况下，模M的加与减则完全不同。

在前面的推导中，忽略了加性噪声对检测方法的影响。考虑加性噪声的存在，接收滤波器输出样值由式(10.4.1)给出，即 $y_m=b_m+w_m$，将其与两个门限值+1 和−1 比较。根据以下判决规则可以得到数据序列$\{d_m\}$

$$d_m=\begin{cases}1, & 若 -1<y_m<1\\ 0, & 若 |y_m|\geqslant 1\end{cases} \tag{10.4.6}$$

采用双二进制信号，可直接将二进制 PAM 扩展为多电平 PAM 信号。这种情况下，由 M 电平幅值序列$\{a_m\}$可以得到(无噪声)序列

568

$$b_m=a_m+a_{m-1},\quad m=1,2\cdots \tag{10.4.7}$$

该序列具有 $2M-1$ 个可能的等间隔电平。幅值电平可以由下列表达式确定

$$a_m=2p_m-(M-1) \tag{10.4.8}$$

其中$\{p_m\}$是预编码序列，由 M 电平数据序列$\{d_m\}$依下式得到

$$p_m=d_m\ominus p_{M-1}(\mathrm{mod}\ M) \tag{10.4.9}$$

其中$\{d_m\}$的取值为 0，1，2，…，$M-1$。

有噪声的情况下，接收滤波器的输出样值可以表示为

$$b_m=a_m+a_{m-1}=2[p_m+p_{m-1}-(M-1)] \tag{10.4.10}$$

因此

$$p_m+p_{m-1}=\frac{b_m}{2}+(M-1) \tag{10.4.11}$$

由于 $d_m=p_m+p_{m-1}$，利用下式

$$d_m=\frac{b_m}{2}+(M-1)(\mathrm{mod}\ M) \tag{10.4.12}$$

可得数据序列 d_m。同样可见，采用预编码可以避免差错传播。

例 10.4.2 考虑 4 电平数据序列$\{d_n\}$

0 0 1 3 1 2 0 3 3 2 0 1 0

可以通过将二进制序列每 2 比特映射为 4 电平符号，即，00→0，01→1，10→2，11→3。确定其预编码序列$\{p_n\}$，发送序列$\{a_n\}$，接收序列$\{b_n\}$以及解码序列$\{d_n\}$。

解：利用式(10.4.7)至(10.4.12)，可以得到所求序列，如表 10-2 所示。◀

表 10-2　双二进制脉冲的 4 电平传输

数据序列 d_n		0	0	1	3	1	2	0	3	3	2	0	1	0
预编码序列 p_n	0	0	0	1	2	3	3	1	2	1	1	3	2	2
发送序列 a_n	−3	−3	−3	−1	1	3	3	−1	1	−1	−1	3	1	1
接收序列 b_n		−6	−6	−4	0	4	6	2	0	0	−2	2	4	2
解码序列 d_n		0	0	1	3	1	2	0	3	3	2	0	1	0

考虑噪声存在的情况，将接收到的叠加有噪声的信号，量化到最接近的量化信号电平上，再基于量化值利用码变换准则来恢复数据序列。

569

在修正双二进制脉冲信号的情况中，受控 ISI 定义为，$n=1$ 时，$x(n/2W)=-1$；$n=-1$ 时，$x(n/2W)=1$；其他情况取值为零。那么，有噪情况下的接收滤波器输出样值为

$$b_m=a_m-a_{m-2} \tag{10.4.13}$$

其中，M 电平序列$\{a_n\}$可以通过将预编码序列按照(10.4.8)式的关系映射得到，并且

$$p_m=d_m\oplus p_{m-2}(\mathrm{mod}\ M) \tag{10.4.14}$$

根据上述关系，很容易发现，无噪情况下从$\{b_m\}$中恢复$\{d_m\}$的检测准则为

$$d_m=\frac{b_m}{2}(\mathrm{mod}\ M) \tag{10.4.15}$$

如上所述，发送端采用数据预编码，就不必利用前面已经检测到的符号，直接可以基于逐符号接收的方法实现接收数据检测。这样，可以避免差错传播。

上述逐符号检测器的差错概率在下一节讨论。

10.4.2 逐符号检测的差错概率

这一节将分析对采用双二进制和修正二进制脉冲的数字 M 进制 PAM 信号进行逐符号检测的差错概率。假设信道为理想限带信道，存在加性高斯白噪声。通信系统模型如图 10-16所示。

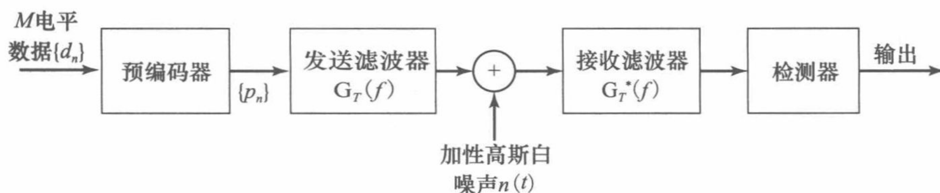


图 10-16　部分响应系统的调制器和解调器框图

在发送端，M 电平数据序列$\{d_n\}$先进行前面描述的预编码。预编码的输出映射为 M 个可能的幅值电平。然后经过频率响应为 $G_T(f)$的发送滤波器，输出信号

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \tag{10.4.16}$$

570

部分响应函数 $X(f)$在发送滤波器与接收滤波器之间平分。则接收滤波器与发送脉冲相匹配，两个滤波器级联的频率响应特性为

$$|G_T(f)G_R(f)| = |X(f)| \tag{10.4.17}$$

匹配滤波器输出在 $t=nT=n/2W$时抽样，抽样值送入解码器。对于双二进制信号，匹配滤波器的输出在抽样瞬间可以表示为

$$y_m = a_m + a_{m-1} + w_m = b_m + w_m \tag{10.4.18}$$

其中，w_m 是加性噪声分量。类似地，修正双二进制信号的匹配滤波器的输出为

$$y_m = a_m - a_{m-2} + w_m = b_m + w_m \tag{10.4.19}$$

对于二进制传输，令 $a_m=\pm d$，其中 $2d$ 为信号电平之间的距离。那么相应的 b_m 取值为 $(2d，0，-2d)$。对于 M 进制 PAM 信号传输，其中 $a_m=\pm d，\pm 3d，\cdots，\pm(M-1)d$，接收信号电平为 $b_m=0，\pm 2d，\pm 4d，\cdots，\pm 2(M-1)d$。因此接收信号电平数是 $2(M-1)$。假设输入发送符号$\{a_m\}$等概率出现，对于双二进制和修正二进制信号易证，无噪声条件下，接收到的输出电平具有如下(三角)概率质函数为

$$P(b = 2md) = \frac{M - |m|}{M^2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm (M - 1) \tag{10.4.20}$$

其中 b 表示无噪声接收电平，$2d$ 为两个相邻接收电平之差。

信道对传输信号的干扰是在信号上叠加零均值且功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声。假设加性噪声幅值超过距离 d 时出现符号差错(这个假设忽略了接收信号中所存在的幅值超过 d 的大噪声分量时也可能出现正确判决的小概率事件)。噪声分量 w_m 是零均值高斯噪声，方差为

571

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W} |G_R(f)|^2 \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W} |X(f)| \mathrm{d}f = 2\, N_0/\pi \tag{10.4.21}$$

其中的积分计算利用了式(10.3.27)和(10.3.31)。式(10.4.21)适用于双二进制信号和修正双二进制信号。因此，符号差错概率的上界为

$$P_M < \sum_{m=-(M-2)}^{M-2} P(|y - 2md| > d \mid b = 2md)P(b = 2md) + 2P(y + 2(M-1)d > d \mid b$$

$$
\begin{aligned}
&= -2(M-1)d)P(b=-2(M-1)d) \\
&= P(|y|>d|b=0)\left[2\sum_{m=0}^{M-1}P(b=2md|)-P(b=0)-P(b=-2(M-1)d)\right] \\
&= \left(1-\frac{1}{M^2}\right)P(|y|>d|b=0)
\end{aligned}
\tag{10.4.22}
$$

但是

$$
P(|y|>d|b=0)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_w}\int_d^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_w^2}\mathrm{d}x=2Q\left(\sqrt{\frac{\pi d^2}{2N_0}}\right) \tag{10.4.23}
$$

因此，平均符号差错概率的上界为

$$
P_M<2\left(1-\frac{1}{M^2}\right)Q\left(\sqrt{\frac{\pi d^2}{2N_0}}\right) \tag{10.4.24}
$$

式(10.2.24)中的尺度因子 d 可以利用信道平均发送功率表示，从而可将 d 消去。对于 M 进制 PAM 信号，其中各发送电平等概率出现，发送滤波器输出的平均功率为

$$
P_{\mathrm{av}}=\frac{E(a_m^2)}{T}\int_{-W}^{W}|G_T(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{E(a_m^2)}{T}\int_{-W}^{W}|X(f)|\mathrm{d}f=\frac{4}{\pi T}E(a_m^2) \tag{10.4.25}
$$

其中 $E(a_m^2)$ 是 M 个信号电平的均方值，即

$$
E(a_m^2)=\frac{d^2(M^2-1)}{3} \tag{10.4.26}
$$

则可得

572

$$
d^2=\frac{3\pi P_{\mathrm{av}}T}{4(M^2-1)} \tag{10.4.27}
$$

将(10.4.27)式代入(10.4.24)式中，可以得到符号差错概率的上界为

$$
P_M<2\left(1-\frac{1}{M^2}\right)Q\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{6}{M^2-1}\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{av}}}{N_0}}\right) \tag{10.4.28}
$$

其中 $\mathscr{E}_{\mathrm{av}}=P_{\mathrm{av}}T$ 是每个发送符号的平均能量，可以表示为平均每比特能量 $\mathscr{E}_{\mathrm{av}}=k\,\mathscr{E}_{\mathrm{bav}}=(\log_2 M)\mathscr{E}_{\mathrm{bav}}$。

式(10.4.28)表示的 M 进制 PAM 差错概率适用于双二进制及修正双二进制部分响应信号。与利用升余弦谱特征的信号脉冲得到的零 ISI 的 M 进制 PAM 相比较，可以发现双二进制和修正双二进制部分响应的性能有 $(\pi/4)^2$ 或者 2.1dB 的损失。这种 SNR 损失是因为部分响应信号检测器逐符号进行判决，忽略了检测器输入端的接收信号的内在记忆性。

10.4.3 部分响应信号的最大似然序列检测

当接收信号序列不存在记忆性时，8.3.3 节与 8.4.1 节介绍的逐符号检测器在使符号差错概率最小化的意义上是最佳的。相反，当接收符号序列存在记忆性时，即连续的符号时间间隔中接收到的符号是统计相关的，最佳检测器就要根据在连续的符号时间间隔中观察到的接收符号做出判决。

发送部分响应信号波形所得到的接收符号序列，其连续符号之间具有记忆性。为了观察接收序列的记忆性，请看表 10-1 给出的二进制传输无噪声接收序列。序列 $\{b_m\}$ 为 0，0，0，2，0，−2，−2，0，2，2…。可以发现，在一个符号间隔内从−2 跳变到 2 或者从 2 跳变到−2 是不可能的。例如，如果检测器输入信号电平为−2，则下一个信号电平可以是−2 或 0。类似地，如果给定抽样时刻的信号电平为 2，则下一个时刻的信号电平可以是 2 或 0。换言之，在匹配滤波器两个连续的接收样本之间，不可能出现从−2 到 2 或者从 2 到−2 的跳变。然而，逐符号检测并没有利用这一约束条件，或者说没有利用接收序列的内在记忆性。

用栅格图可以很简单地表示发送部分响应信号波形所得到的接收序列 $\{y_m\}$ 中的内在记

忆性。例如，用于二进制数据传输的双二进制部分响应信号的栅格图如图10-17所示。对于二进制调制来说，栅格图包括两个状态，分别对应于a_m的两个可能输入值，即$a_m=\pm 1$。栅格图中的每条支路有两个数字标注，左边第一个数字为新的数据比特，即$a_{m+1}=\pm 1$，该数字决定到新状态的转换。右边的数字表示接收到的信号电平。

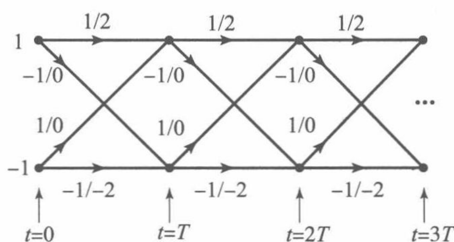


图10-17　双二进制部分响应信号的栅格图

573

双二进制信号的记忆长度为$L=1$，因此，对于二进制调制而言，栅格图有2个状态；对于M进制PAM调制来说，栅格图的状态数为M。

利用接收符号序列中内在记忆性的最佳序列检测器，可根据最大后验概率(MAP)准则(参见8.4.1节)进行判决。例如，考虑传输含有N个符号的序列$\{a_m, m=1, 2, \cdots, N\}$，若每个符号可以取$M$个可能值之一，则有$M^N$种可能的发送序列，表示为$\boldsymbol{a}_N^{(k)}$，$1\leqslant k\leqslant M^N$。接收序列$\{y_m, 1\leqslant m\leqslant N\}$可以表示为$\boldsymbol{y}_N$。基于MAP准则进行判决的检测器，计算如下后验概率

$$P(\text{发送 } \boldsymbol{a}_N^{(k)} \mid \boldsymbol{y}_N), \quad 1\leqslant k\leqslant M^N \tag{10.4.29}$$

并且选择具有最大概率的序列。但是式(10.4.29)的概率也可以表示为

$$P(\text{发送 } \boldsymbol{a}_N^{(k)} \mid \boldsymbol{y}_N) = \frac{f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N^{(k)})P(\boldsymbol{a}_N^{(k)})}{f(\boldsymbol{y}_N)} \tag{10.4.30}$$

当所有的符号序列$\boldsymbol{a}_N^{(k)}$等概发送时(实际情况通常如此)，选择使后验概率最大的序列，等价于在所有可能的M^N个序列中求出使条件概率密度函数$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N^{(k)})$最大的序列。因此最佳检测准则就是最大似然准则。

最佳ML序列检测器计算M^N个概率，即M^N个可能发送序列分别对应的概率。当M与N较大时，ML检测器因计算复杂难以实现。但是，20世纪60年代末期，安德鲁·维特比(Andrew Viterbi)提出了一种实现ML序列检测的高效算法，该算法在接收到新数据时进行序列删除，从而大大降低了计算复杂度。实际上，维特比算法(VA)是一个串行栅格搜索算法，在第13章(13.3.2节)将详细介绍这个算法作为卷积码解码算法的应用。

在图10-17所示双二进制部分响应信号的栅格图中，可以看到两种状态，分别标记为+1和−1，并且每个状态节点有两条输入路径和两条输出路径。在栅格图的每个节点上，VA计算分别对应每条输入路径的概率(测度)。选择两条路径中的一条作为更可能的路径(基于相应的概率值)保留下来，删除另一条路径。每个节点幸存下来的路径可以延伸出两条新路径，分别对应两个可能输入符号中的各一条路径，继续搜索过程。这样，VA即可降低ML检测器的计算复杂度。

574

对于这类部分响应信号，在统计意义上，接收序列$\{y_m, 1\leqslant m\leqslant N\}$通常由概率密度函数$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N)$描述，其中$\boldsymbol{y}_N=(y_1, y_2, \cdots, y_N)^t$，$\boldsymbol{a}_N=(a_1, a_2, \cdots, a_N)^t$并且$N>L$。当加性噪声为零均值高斯噪声[⊖]时，$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N)$为多维高斯概率密度函数，即

$$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\,|\det(\boldsymbol{C})|^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)^t\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)} \tag{10.4.31}$$

其中$\boldsymbol{b}_N=(b_1, b_2, \cdots, b_N)^t$是矢量$\boldsymbol{y}_N$的均值，$\boldsymbol{C}$是$\boldsymbol{y}_N$的$N\times N$协方差矩阵。ML序列检测器就可以通过栅格图选择使概率密度函数$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N)$最大化的序列。

通过栅格图选择最可能序列的计算可以简化为对$f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N)$取自然对数，得到

$$\ln f(\boldsymbol{y}_N \mid \boldsymbol{a}_N) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\det(\boldsymbol{C})| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)^t\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N) \tag{10.4.32}$$

⊖ 为了简化标记，以下推导中忽略上标k。

给定接收序列$\{y_m\}$，使$\ln f(\boldsymbol{y}_N|\boldsymbol{a}_N)$最大化的数据序列$\{a_m\}$与使$(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)^t\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)$最小化的数据序列$\{a_m\}$一致，即

$$\hat{\boldsymbol{a}}_N=\arg\max_{\boldsymbol{a}_N}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N)^t\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{b}_N) \tag{10.4.33}$$

可以利用维特比算法串行实现栅格图搜索最小距离路径。考虑二进制调制的双二进制信号波形，假设初始状态为$a_0=1$。若$t=T$时刻收到$y_1=a_1+a_0+w_1$，且$t=2T$时刻收到$y_2=a_2+a_1+w_2$，则有4条候选路径，分别对应$(a_1, a_2)=(1, 1)$，$(-1, 1)$，$(1, -1)$和$(-1, -1)$。前两条路径在$t=2T$的状态1汇聚。对于这两条路径，通过计算测度$\mu_2(1, 1)$和$\mu_2(-1, 1)$，选择概率大的路径。同理，在状态-1，对两个序列$(1, -1)$和$(-1,-1)$进行类似计算。这样，每个节点选择两个序列之一存储并丢弃另一个。当$t=3T$时刻收到样值y_3时，继续栅格图搜索，将$t=2T$时的两条幸存路径进一步扩展。

部分响应信号的匹配滤波器输出与噪声样值的相关性使得测度计算更复杂。例如，对双二进制信号，噪声序列$\{w_m\}$在两个连续样值上相关。这就是说，w_m与w_{m+1}对于$k=1$相关，对于$k>1$不相关。一般而言，记忆为L的部分响应信号导致匹配滤波器的输出存在相关噪声序列，该序列对于$k>L$不相关，即$E(w_m w_{m+k})=0$。

575

ML序列检测器在检测每个发送信息符号时会引入可变时延。实际上，通过将幸存路径截短至N_t最近的符号($N_t\geqslant 5L$)，可以避免可变时延，获得固定时延。如果在$t=mT$时M^L个幸存序列在符号a_{m-N_t}上不一致，选择最大可能的幸存路径。$N_t>5L$的条件下，这种截短方法的性能损失可以忽略。

10.4.4 最大似然序列检测器的差错概率

一般而言，差错概率的精确计算是困难的。本节仅通过比较在一个节点汇聚的两条与所有其他路径欧氏距离最小的路径的测度，分析差错概率的近似值。下面就双二进制部分响应信号进行推导。

考虑图10-17所示双二进制部分响应信号的栅格图。假设$t=0$时，初始状态为1，最前面的两个发送符号为$a_1=1$和$a_2=1$。那么，在$t=T$时刻收到$y_1=2d+w_1$，在$t=2T$时刻收到$y_2=2d+w_2$。给定接收信号为y_1和y_2，如果路径$(a_1, a_2)=(-1, 1)$比路径$(a_1, a_2)=(1, 1)$可能性大，那么在状态1就出现差错。这个路径差错事件就是占优路径错误事件，能够很好地近似表示ML序列检测器差错概率。

根据式(10.4.32)，路径$(a_1, a_2)=(1, 1)$的测度为

$$\mu_2(1,1)=[y_1-2d \quad y_2-2d]\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}y_1-2d\\ y_2-2d\end{bmatrix} \tag{10.4.34}$$

其中协方差矩阵为(参见习题10.35)

$$\boldsymbol{C}=\frac{2N_0}{\pi}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3} & 1\end{bmatrix} \tag{10.4.35}$$

对于路径$(a_1, a_2)=(-1, 1)$，相应的测度为

$$\mu_2(-1,1)=[y_1 \quad y_2]\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \tag{10.4.36}$$

路径差错事件的概率就是测度$\mu_2(-1, 1)$小于测度$\mu_2(1, 1)$的概率，即

$$P_2=P[\mu_2(-1,1)<\mu_2(1,1)] \tag{10.4.37}$$

将$y_1=2d+w_1$和$y_2=2d+w_2$代入式(10.4.34)和(10.4.36)，可以得到

576

$$P_2=P[w_1+w_2<-2d] \tag{10.4.38}$$

由于w_1和w_2都是零均值(相关)高斯变量，二者之和仍为零均值高斯变量，且其和变量

$z=w_1+w_2$ 的方差为 $\sigma_z^2=16N_0/3\pi$。这样可得

$$P_2 = P[z < -2d] = Q\left(\frac{2d}{\sigma_z}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4d^2}{\sigma_z^2}}\right) \tag{10.4.39}$$

根据式(10.4.27)，可以得到 $d^2(M=2)$ 的表达式为

$$d^2 = \frac{\pi P_{av} T}{4} = \frac{\pi \mathscr{E}_b}{4} \tag{10.4.40}$$

因此，路径差错事件的概率为

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{1.5\pi^2}{16}\left(\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}\right)}\right) \tag{10.4.41}$$

首先，可以发现路径差错事件导致两比特序列中的单个比特差错。因此比特差错概率为$P_2/2$。其次，相对于零 ISI 的情况，SNR 性能下降 $10\log(1.5\pi^2/16)=-0.34$dB。SNR 的这个小损失显然是部分响应信号换取带宽效率的代价。可以发现，ML 序列检测器可以将逐符号检测器固有的 2.1dB 降质挽回了 1.76dB。

10.5　存在信道失真的系统设计

10.3.1 节中介绍了一种使接收滤波器输出零 ISI 的信号设计准则。如果信号脉冲 $x(t)$ 的频谱满足式(10.3.7)条件，则 $x(t)$在抽样时刻 $t=nT(n=\pm1,\pm2,\dots)$时满足零 ISI 的条件。根据这个条件，可以得到要保证信道零 ISI 传输，发送滤波器、接收滤波器以及信道的传输特性必须满足

$$G_T(f)C(f)G_R(f) = X_{rc}(f) \tag{10.5.1}$$

其中，$X_{rc}(f)$表示一种升余弦脉冲的傅里叶变换，其参数依赖于信道带宽 W 和发送间隔 T。在这一节中，我们将讨论在有失真的信道中抑制 ISI 的数字通信系统设计。首先简要描述不同类型的信道失真，然后讨论发送滤波器和接收滤波器的设计。

考虑两种类型的失真。当$|f|\leqslant W$ 时，幅频特性$|C(f)|$不是常数时的失真，称为幅度失真，如图 10-18a 所示。另一类失真称为相位失真，这种失真是由相频特性 $\theta_C(f)$的非线性造成的，如图 10-18b 所示。

577

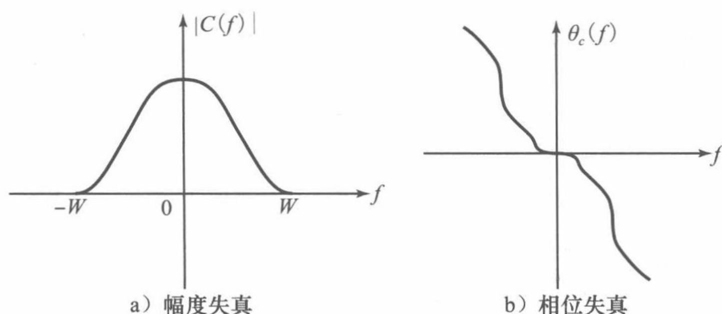


图 10-18　信道特性

考虑 $\theta_C(f)$的导数，可以得到相位失真的另一种表现。定义包络时延特性为(参见习题 2.66)

$$\tau(f) = \frac{-1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta_C(f)}{\mathrm{d}f} \tag{10.5.2}$$

当 $\theta_C(f)$为 f 的线性函数时，包络时延对所有频率均为常数。这种情况下，发送信号中的所有频率分量都以相同的固定时间延迟通过信道，不存在相位失真。但是，当 $\theta_C(f)$为非线性时，包络时延$\tau(f)$随频率而变化，输入信号中的不同频率分量通过信道时会经历不同的延迟。这种情况下，称发送信号经历了时延失真。

无论是幅度失真还是时延失真，都会导致接收信号出现符号间干扰。假设设计了一种具有升余弦谱的脉冲，如图 10-19a 所示，保证在抽样时刻具有零 ISI。此脉冲通过一个在 $|f|<W$ 时有常数幅度谱 $|C(f)|=1$ 且具有二次相位特性（线性包络时延）的信道滤波器。信道输出端的接收脉冲如图 10-19b 所示。可以发现，由于存在时延失真，接收信号的周期过零点发生平移，导致输出脉冲产生符号间干扰。因此，连续脉冲序列会出现相互混叠，并且由于 ISI 的影响也无法区分脉冲峰值。

下一节将考虑两个设计问题。一个是在信道特性已知的条件下，有信道失真时的发送滤波器和接收滤波器的设计；另一个是如何设计一类特定滤波器——信道均衡器，能够在信道特性 $|C(f)|$ 和 $\theta_C(f)$ 都未知的条件下，自适应地纠正信道失真。

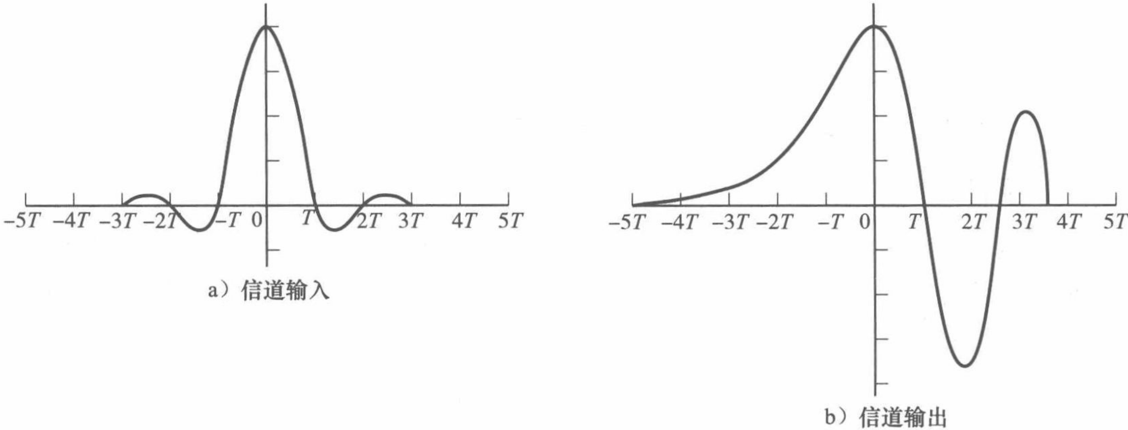


图 10-19　信道失真的影响

10.5.1　确知信道的发送滤波器和接收滤波器设计

这一节，假设信道频率响应特性 $C(f)$ 是已知的，下面就将考虑如何设计发送滤波器和接收滤波器，以使接收滤波器的输出 SNR 达到最大并且保证零 ISI。图 10-20 给出了要研究的系统。

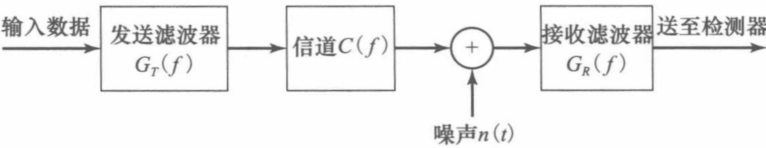


图 10-20　$G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 的系统设计

对于信号分量，必须满足以下条件

$$G_T(f)C(f)G_R(f) = X_{\mathrm{rc}}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}, \quad |f| \leqslant W \tag{10.5.3}$$

578 ~ 579

其中 $X_{\mathrm{rc}}(f)$ 是保证抽样时刻零 ISI 的理想升余弦谱，t_0 是保证发送滤波器和接收滤波器物理可实现所需的时延。

接收滤波器输出端的噪声可以表示为

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\tau) g_R(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{10.5.4}$$

其中 $n(t)$ 为滤波器的输入。假设噪声 $n(t)$ 为零均值高斯噪声，因此，$w(t)$ 也是零均值高斯噪声，其功率谱密度为

$$S_w(f) = S_n(f)|G_R(f)|^2 \tag{10.5.5}$$

$S_n(f)$ 是噪声过程 $n(t)$ 的功率谱密度。

为了简单起见，我们考虑二进制 PAM 传输。匹配滤波器的抽样输出为

$$y_m = x_0 a_m + w_m = a_m + w_m \tag{10.5.6}$$

其中 x_0 归一化为单位 1，$a_m = \pm d$，w_m 表示零均值噪声项，其方差为

$$\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |G_R(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{10.5.7}$$

因此，差错概率为

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d/\sigma_w}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma_w^2}}\right) \tag{10.5.8}$$

假设所选择的发送滤波器具有如下频率响应

$$G_T(f) = \frac{\sqrt{X_{\mathrm{rc}}(f)}}{C(f)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \tag{10.5.9}$$

其中 t_0 是确保因果性所需要的适当时延。那么发送滤波器与信道级联的频率响应为

$$G_T(f)C(f) = \sqrt{X_{\mathrm{rc}}(f)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0} \tag{10.5.10}$$

存在加性高斯白噪声时，所设计的接收滤波器应该与已接收信号脉冲相匹配。因此，其频率响应为

$$G_R(f) = \sqrt{X_{\mathrm{rc}}(f)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_r} \tag{10.5.11}$$

其中 t_r 为适当的时延。

下面计算满足这些滤波器特性的 SNR d^2/σ_w^2。其中噪声方差为

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{rc}}(f) \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} \tag{10.5.12}$$

平均发送功率为

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) \mathrm{d}f = \frac{d^2}{T} \int_{-W}^{W} \frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2} \mathrm{d}f \tag{10.5.13}$$

580

则

$$d^2 = P_{\mathrm{av}} T \left[\int_{-W}^{W} \frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2} \mathrm{d}f \right]^{-1} \tag{10.5.14}$$

因此可得 SNR d^2/σ_w^2 为

$$\frac{d^2}{\sigma_w^2} = \frac{2P_{\mathrm{av}} T}{N_0} \left[\int_{-W}^{W} \frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2} \mathrm{d}f \right]^{-1} \tag{10.5.15}$$

可以发现 $|f| \leqslant W$ 时，$|C(f)| \leqslant 1$，其中

$$10\log_{10} \int_{-W}^{W} \frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2} \mathrm{d}f \tag{10.5.16}$$

这一项表示信道失真造成的通信系统性能损失 dB 值。如果信道为理想信道，则当 $|f| \leqslant W$ 时 $|C(f)| = 1$ 时没有性能损失。而且，由于相位失真已经由发送滤波器补偿，因此信道的这种损失完全是由幅度失真引起的。

例 10.5.1 已知二进制通信系统以 4800bps 的速率在信道上传输数据，频率响应为

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{W}\right)^2}}, \quad |f| \leqslant W$$

其中 $W = 4800\mathrm{Hz}$。加性噪声是均值为零、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。试求发送滤波器与接收滤波器的幅频特性。

解：由于 $W = 1/T = 4800$，采用具有升余弦谱且 $\alpha = 1$ 的信号脉冲，有

$$X_{\mathrm{rc}}(f) = \frac{T}{2}[1 + \cos\pi T|f|] = T\cos^2 \frac{\pi|f|}{9600}$$

那么

$$|G_T(f)| = \sqrt{T\left[1+\left(\frac{f}{W}\right)^2\right]}\cos\frac{\pi|f|}{9600}, \quad |f| \leqslant 4800\text{Hz}$$

$$|G_R(f)| = \sqrt{T}\cos\frac{\pi|f|}{9600}, \quad |f| \leqslant 4800\text{Hz}$$

而且

581

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = 0, \quad |f| > 4800\text{Hz}$$

◀

10.5.2 信道均衡

上一节介绍了在信道频率响应特性已知的情况下，传送数字 PAM 信号的发送滤波器和接收滤波器的设计。这些滤波器的设计目标是在抽样时刻消除 ISI。当信道特性完全确知并且不随时间变化时，这种设计方法是适当的。

而实际应用中，经常出现信道频率响应特性未知或者随时间变化的情况。例如，在拨号电话网络的数字传输中，由于每次拨号时的通信路由不同，通信信道也是不同的。但是一旦建立连接，信道在相当长的时间内不随时间变化。这是一个信道特性非先验的例子。电离层传播信道等无线信道则是时变信道的例子，这种信道可以用时变频率响应特性表征。对于未知或时变信道，10.5.1 节所介绍的发送滤波器和接收滤波器的最佳设计方法是不适用的。

这种情况下，可以将发送滤波器设计为平方根升余弦频率响应特性，即

$$G_T(f) = \begin{cases} \sqrt{X_{\text{rc}}(f)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}, & |f| \leqslant W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$

且令接收滤波器频率响应 $G_R(f)$ 与发送滤波器频率特性 $G_T(f)$ 相匹配，即

$$|G_T(f)|\,|G_R(f)| = X_{\text{rc}}(f) \tag{10.5.17}$$

那么，由于存在信道失真，接收滤波器的输出为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t-nT) + w(t) \tag{10.5.18}$$

其中 $x(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$。对滤波器输出进行周期性抽样得到序列

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_{m-n} + w_m = x_0 a_m + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq m}}^{\infty} a_n x_{m-n} + w_m \tag{10.5.19}$$

582

其中 $x_n=x(nT)$，$n=0$，±1，±2，…。式(10.5.19)等号右边的中间一项表示 ISI。

在任何实际系统中，假设 ISI 只影响有限数量的符号是合理的。因此，假设当 $n<-L_1$ 且 $n>L_2$ 时，$x_n=0$，其中 L_1 和 L_2 为有限正整数。则接收滤波器输出端的 ISI 可以视为数据序列$\{a_m\}$通过一个系数为$\{x_n,\ -L_1\leqslant n\leqslant L_2\}$的 FIR 滤波器所得到的结果，如图 10-21 所示。该滤波器称为等效离散时间信道滤波器。由于其输入为离散信息序列(二进制或 M 进制)，因此离散时间信道滤波器的输出可以表征为被加性噪声干扰的具有 $L=L_1+L_2$ 个状态的有限状态机的输出。因此，滤波器在无噪声时的输出可以用 M^L 个状态的栅格图描述。

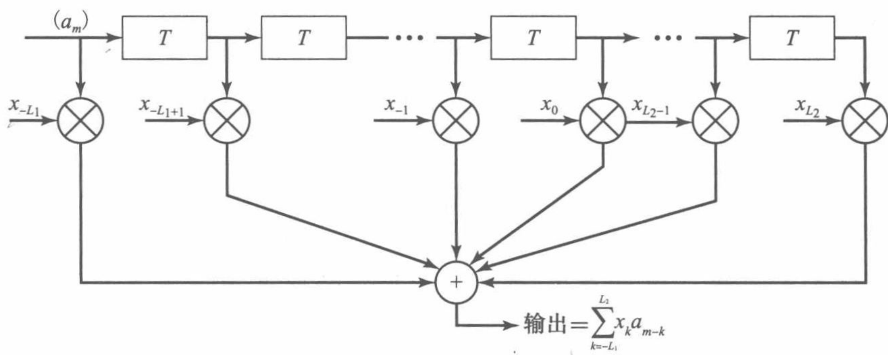


图 10-21 等效离散时间信道滤波器

最大似然序列检测。基于对接收序列的观察，式(10.5.19)给出的信息序列$\{a_m\}$的最佳检测器为 ML 序列检测器，该检测器类似于检测带有可控 ISI 的部分响应信号的 ML 序列检测器。13.3.2 节介绍的维特比算法将提供一种 ML 信号路径栅格图搜索方法。为了完成搜索，等效信道均衡滤波器系数$\{x_n\}$必须是已知的，或者是可以通过某种方法测得的。在栅格图搜索的每一级，共有 M^L 个幸存路径，相应地就有 M^L 个欧氏距离路径测度。

由于维特比算法的计算复杂度随 ISI 的范围(长度 L)呈指数增长，因此只有当 M 和 L 很小时，这种类型的检测才是切实可行的。例如，在采用语音信号数字传输的移动蜂窝电话系统中，通常选择很小的 M，即 2 或 4，且 $2\leqslant L\leqslant 5$，此时 ML 序列检测器可以在合理的复杂性范围内实现。但是当 M 和 L 很大时，ML 序列检测器就变得不太实际。这种情况下，采用其他更实用但是次优的方法在有 ISI 的情况下检测信息序列$\{a_m\}$。尽管如此，在有 ISI 的信道中，ML 序列检测器的性能仍然作为一个基准来衡量其他次优方法的性能。下面介绍两种次优方法。

583

线性均衡器。对于频率响应特性未知且时变的信道而言，可以采用参数可调的线性滤波器，通过周期性地调节其参数来补偿信道失真。这种滤波器称为均衡器。

首先从频域的观点考虑线性均衡器的设计特性，图 10-22 给出了采用线性滤波器作为信道均衡器的系统框图。

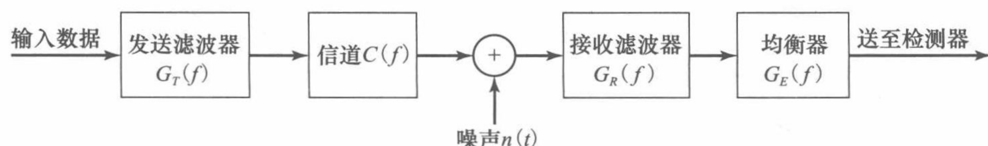


图 10-22　有均衡器的系统框图

解调器由频率响应为 $G_R(f)$的接收滤波器与频率响应为 $G_E(f)$的信道均衡滤波器级联而成。由于 $G_R(f)$被设计为与 $G_T(f)$匹配，且二者乘积满足(10.5.17)式，则$|G_E(f)|$必须补偿信道失真。因此，均衡器频率响应必须等于信道响应的倒数，即

$$G_E(f)=\frac{1}{C(f)}=\frac{1}{|C(f)|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_C(f)},\quad |f|\leqslant W \tag{10.5.20}$$

其中$|G_E(f)|=1/|C(f)|$并且均衡器相位特性 $\theta_E(f)=-\theta_C(f)$。这种情况下，均衡器也称为信道响应的逆信道滤波器。

可以看到，逆信道滤波器完全消除了由信道引起的 ISI，在抽样时刻 $t=nT$，使 ISI 强制为零，因此这种均衡器称为迫零均衡器。那么，该检测器的输入信号为

$$y_m=a_m+w_m$$

其中 w_m 是均值为零的高斯噪声分量，其方差为

$$\sigma_w^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f)|G_R(f)|^2G_E(f)\mathrm{d}f=\int_{-W}^{W}\frac{S_n(f)X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2}\mathrm{d}f \tag{10.5.21}$$

584

其中 $S_n(f)$是噪声的功率谱密度。当噪声为白噪声时，$S_n(f)=N_0/2$且方差变为

$$\sigma_w^2=\frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W}\frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2}\mathrm{d}f \tag{10.5.22}$$

例 10.5.2　采用迫零均衡器对例 10.5.1 给出的信道进行均衡。假设发送滤波器和接收滤波器都满足式(10.5.17)，试求抽样时刻的噪声方差与差错概率。

解：当噪声为白噪声时，迫零均衡器输出端(即检测器输入端)的噪声方差由式(10.5.22)给出，则有

$$\sigma_w^2=\frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W}\frac{X_{\mathrm{rc}}(f)}{|C(f)|^2}\mathrm{d}f=\frac{TN_0}{2}\int_{-W}^{W}[1+(fW)^2]\cos^2\frac{\pi|f|}{2W}\mathrm{d}f=N_0\int_0^1(1+x^2)\cos^2\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\pi^2}\right)N_0$$

平均发送功率为

$$P_{\mathrm{av}}=\frac{(M^2-1)d^2}{3T}\int_{-W}^{W}|G_T(f)|^2\mathrm{d}f=\frac{(M^2-1)d^2}{3T}\int_{-W}^{W}X_{\mathrm{rc}}(f)\mathrm{d}f=\frac{(M^2-1)d^2}{3T}$$

差错概率的一般表达式为

$$P_M=\frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{3P_{\mathrm{av}}T}{(M^2-1)(2/3-1/\pi^2)N_0}}\right)$$

如果信道是理想的，则 Q 函数的自变量为$\frac{6P_{\mathrm{av}}T}{(M^2-1)N_0}$。因此，由信道非理想性引起的性能损耗为 $2(2/3-1/\pi^2)=1.133$ 或者 0.54dB。 ◀

下面从时域的观点来考虑线性均衡器的设计。在前面的分析中已经注意到，在实际信道中，ISI 限制在有限的 L 个样本点上。因此，实际的信道均衡器可以近似为抽头系数 585 $\{c_n\}$可调的有限冲激响应滤波器(FIR)或者称为横向滤波器，如图 10-23 所示。可以选择相邻抽头之间的时延 τ 与符号间隔 T 相等，这样的 FIR 均衡器称为符号间隔均衡器。这时均衡器输入信号为式(10.5.19)给出的抽样序列。但是，可以发现当 $1/T<2W$ 时，接收信号中折叠频率 $1/T$ 以上的频率分量与 $1/T$ 以下的频率分量相互混叠。这时，均衡器就要补偿相互混叠的信道失真信号。

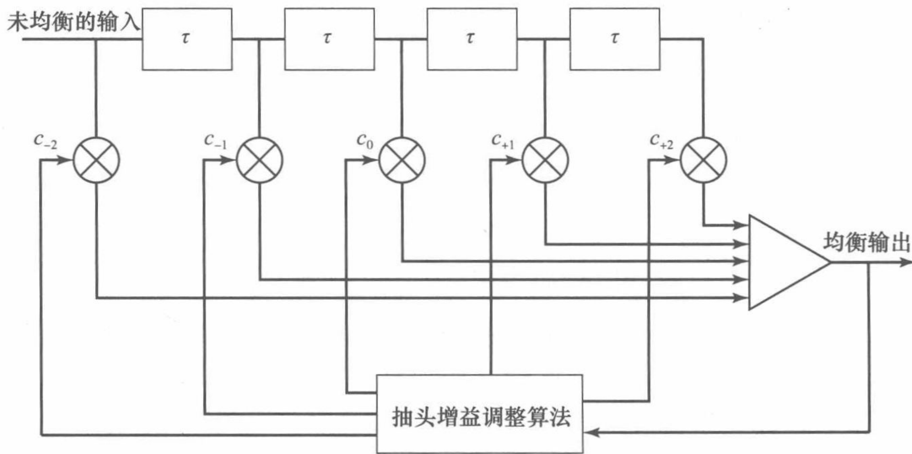


图 10-23 线性横向滤波器

另一方面，当两个相邻抽头之间的时延 τ 选择为$1/\tau\geqslant 2W>1/T$时，不会发生混叠，逆信道均衡器只需补偿真正的信道失真。由于 $\tau<T$，称信道均衡器具有分数间隔抽头，并称其为分数间隔均衡器。实际中通常选择 $\tau=T/2$。这种情况下，滤波器 $G_R(f)$输出端的抽样速率为$T/2$。

FIR 均衡器的冲激响应为

$$g_E(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_n\delta(t-n\tau) \tag{10.5.23}$$

并且相应的频率响应为

$$G_E(f)=\sum_{n=-N}^{N}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fn\tau} \tag{10.5.24}$$

其中$\{c_n\}$为$(2N+1)$个均衡器系数，通常选足够大的 N，以使均衡器长度大于 ISI 长度，即 $2N+1\geqslant L$。由于 $X(f)=G_T(f)C(f)G_R(f)$，且 $x(t)$是对应 $X(f)$的信号脉冲，因此均 586 衡后的输出信号脉冲为

$$q(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_nx(t-n\tau) \tag{10.5.25}$$

将迫零条件应用到 $q(t)$在 $t=mT$ 时刻的抽样值上，有

$$q(mT)=\sum_{n=-N}^{N}c_n x(mT-n\tau),\quad m=0,\pm 1,\cdots \pm N \tag{10.5.26}$$

因为均衡器有 $2N+1$ 个系数，所以只能控制 $2N+1$ 个 $q(t)$ 的样值。迫零条件可具体表示为

$$q(mT)=\sum_{n=-N}^{N}c_n x(mT-n\tau)=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m=\pm 1,\cdots \pm N\end{cases} \tag{10.5.27}$$

上式可以表示为矩阵形式 $\boldsymbol{Xc}=\boldsymbol{q}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是元素为 $\{x(mT-nt)\}$ 的 $(2N+1)\times(2N+1)$ 维矩阵，$\boldsymbol{c}$ 为 $(2N+1)$ 维系数矢量，$\boldsymbol{q}$ 为只有一个非零元素的 $(2N+1)$ 维列矢量。这样，可以得到关于迫零均衡器系数的一组 $2N+1$ 个线性方程。

应该指出，由于长度有限，FIR 迫零均衡器并不能完全消除 ISI。但是残留 ISI 会随着 N 的增大而减小，当 $N\to\infty$ 时，ISI 可以被完全消除。

例 10.5.3 均衡器输入端的信道失真脉冲 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{2t}{T}\right)^2}$$

其中 $1/T$ 为符号速率。以速率 $2/T$ 对该脉冲进行抽样，并采用迫零均衡器进行均衡。试求 5 抽头迫零均衡器的系数。

解： 由式(10.5.27)可知，迫零均衡器必须满足下列方程

$$q(mT)=\sum_{n=-2}^{2}c_n x(mT-nT/2)=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m=\pm 1,\pm 2\end{cases}$$

元素为 $x(mT-nT/2)$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 表示如下

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{17} & \frac{1}{26} & \frac{1}{37}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{17}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{17} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{37} & \frac{1}{26} & \frac{1}{17} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

587

系数矢量 $\boldsymbol{c}$ 和矢量 $\boldsymbol{q}$ 分别为

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_{-2}\\ c_{-1}\\ c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

通过 $\boldsymbol{X}$ 的逆矩阵求解线性方程组 $\boldsymbol{Xc}=\boldsymbol{q}$，可以得到

$$\boldsymbol{c}_{\text{opt}}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}-2.2\\ 4.9\\ -3\\ 4.9\\ -2.2\end{bmatrix}$$

◀

迫零均衡器的一个缺点是忽略了加性噪声的影响。因此采用迫零均衡器可能会导致噪声显著增强。容易发现在 $C(f)$ 比较小的频率范围内，信道均衡器 $G_E(f)=1/C(f)$ 会设置较大的增益进行补偿，导致在此频率范围的噪声明显增强。另一种办法是放宽零 ISI 的条件，选择信道均衡器特性，使均衡器输出端的残留 ISI 和加性噪声的联合功率达到最小。基于最小均方误差(MMSE)准则的最佳信道均衡器可以达到这个目标。

为了进行详细阐述，考虑受到噪声损伤的 FIR 均衡器的输出

$$z(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n y(t-n\tau) \tag{10.5.28}$$

其中 $y(t)$为均衡器的输入，如式(10.5.18)所示。在 $t=mT$ 时刻对该输出进行抽样可得

$$z(mT)=\sum_{n=-N}^{N} c_n y(mT-n\tau) \tag{10.5.29}$$

在 $t=mT$ 时刻，期望的均衡器输出端响应抽样值为发送符号 a_m。误差定义为 a_m 与 $z(mT)$的差值。那么实际输出样值 $z(mT)$与期望值 a_m 之间的均方误差为

$$\begin{aligned}\text{MSE}= E(z(mT)-a_m)^2 &= E\Big(\sum_{n=-N}^{N} c_n y(mT-n\tau)-a_m\Big)^2\\ &=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} c_n c_k R_Y[n-k]-2\sum_{k=-N}^{N} c_k R_{AY}[k]+E(a_m^2)\end{aligned} \tag{10.5.30}$$

588

其中的相关函数定义为

$$R_Y(n-k)=E(y(mT-n\tau)y(mT-k\tau))$$

及

$$R_{AY}(k)=E(y(mT-k\tau)a_m) \tag{10.5.31}$$

并且期望值是关于随机信息序列$\{a_m\}$和加性噪声的。

通过式(10.5.30)对均衡器抽头系数$\{c_n\}$取差分可以得到最小均方误差 MMSE 的解，则可得 MMSE 的必要条件为

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n R_Y(n-k)=R_{AY}(k),\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm N \tag{10.5.32}$$

总共有$(2N+1)$个关于抽头系数的线性方程。与前面介绍的迫零法相比，这些方程都依赖于噪声和 ISI 的统计特性(自相关)，即自相关序列 $R_Y(n)$。

实际上，自相关序列 $R_Y(n)$和互相关序列 $R_{AY}(n)$通常都是未知的，但是都可以通过在信道上发送测试信号，并利用以下的时间平均估计值

$$\hat{R}_Y[n]=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y(kT-n\tau)y(kT)$$

及

$$\hat{R}_{AY}[n]=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y(kT-n\tau)a_k \tag{10.5.33}$$

替代式(10.5.32)中的集平均，得出均衡器抽头系数。

自适应均衡器。前面已经说明，通过求解一组线性方程可以确定线性均衡器的抽头系数。在迫零优化准则中，线性方程组由式(10.5.27)给出。另一方面，如果基于最小化 MSE 优化准则，最佳均衡器的系数则由式(10.5.32)的线性方程组确定。

在这两种情况下，都可以将线性方程组表示为一般的矩阵形式

$$\boldsymbol{Bc}=\boldsymbol{d} \tag{10.5.34}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为$(2N+1)\times(2N+1)$维矩阵，$\boldsymbol{c}$ 表示$(2N+1)$维均衡器系数的列矢量，$\boldsymbol{d}$ 为$(2N+1)$维列矢量。式(10.5.34)的解为

589

$$\boldsymbol{c}_{\text{opt}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d} \tag{10.5.35}$$

在均衡器的实际实现中，式(10.5.34)中最佳系数矢量的解通常可通过迭代过程获得，从而避免计算矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。最简单的迭代过程是最速下降法，其迭代可以从任意选取的系数矢量 $\boldsymbol{c}$(例如 $\boldsymbol{c}_0$)开始，该系数的初始选择对应于待优化的准则函数上的一个点。例如，在采用 MSE 准则时，初始猜测值 $\boldsymbol{c}_0$ 对应于$(2N+1)$维系数空间中 MSE 二次曲面上

的某个点。梯度矢量定义为 $\boldsymbol{g}_0$，即 MSE 关于 $2N+1$ 个滤波器系数的导数，在 MSE 曲面上计算该点的值，并且各抽头系数朝着与其相应梯度分量相反的方向变化，第 j 个抽头系数的变化与第 j 个梯度分量的大小成正比。

例如，MSE 准则的梯度矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 可以通过对 MSE 关于 $2N+1$ 个系数中的每一个系数求导得到，即

$$\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}_k - \boldsymbol{d}, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{10.5.36}$$

那么系数矢量 $\boldsymbol{c}_k$ 可按以下关系式更新

$$\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k - \Delta\boldsymbol{g}_k \tag{10.5.37}$$

其中 Δ 为迭代过程的步长参数。为了确保迭代过程的收敛性，Δ 应选择小正数。这种情况下，对于二维优化如图 10-24 所示，梯度矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 收敛到 0，即当 $k\to\infty$ 时，$\boldsymbol{g}_k\to 0$，且系数矢量 $\boldsymbol{c}_k\to\boldsymbol{c}_{\text{opt}}$。一般而言，采用最速下降法，经过有限次迭代并不一定保证均衡器抽头系数能够收敛到 $\boldsymbol{c}_{\text{opt}}$。但是经过几百次迭代后，能够尽可能地接近期望的最优解 $\boldsymbol{c}_{\text{opt}}$。在采用信道均衡器的数字通信系统中，每次迭代的时间相当于发送一个符号的时间间隔。因此，使抽头系数收敛于 $\boldsymbol{c}_{\text{opt}}$ 的几百次迭代的时间也就相当于几分之一秒。

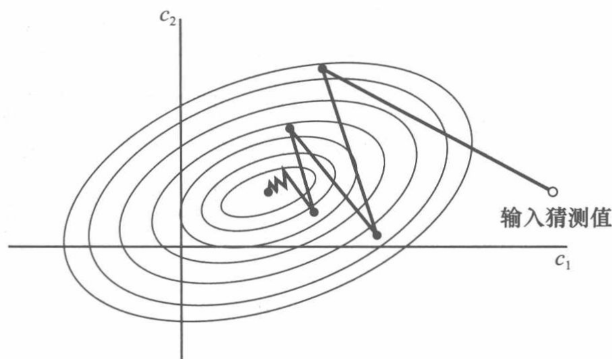


图 10-24　梯度算法收敛特性示例

当信道特性随时间变化时，需要采用自适应信道均衡技术。这种情况下，ISI 也随时间变化。信道均衡器必须跟踪信道响应随时间变化，并调整其系数以降低 ISI。在上述讨论的情境中，最佳系数矢量 $\boldsymbol{c}$ 是随时间变化的，以适应矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的时变特性和采用 MSE 准则时矢量 $\boldsymbol{d}$ 的时变特性。在这些条件下，可以修正前面介绍的迭代方法，以利用梯度矢量的估计值。因此，调整均衡器抽头系数的算法可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{c}}_k - \Delta\,\hat{\boldsymbol{g}}_k \tag{10.5.38}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{g}}_k$ 表示梯度矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的估计值，$\hat{\boldsymbol{c}}_k$ 表示抽头系数矢量的估计值。

590

在 MSE 准则中，由式(10.5.36)给出的梯度矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 也可以表示为(参见习题 10.30)

$$\boldsymbol{g}_k = -E(e_k\boldsymbol{y}_k)$$

在第 k 次迭代中，梯度矢量的估计值为

$$\hat{\boldsymbol{g}}_k = -e_k\boldsymbol{y}_k \tag{10.5.39}$$

其中 e_k 表示第 k 个时刻均衡器期望的输出与实际输出 $z(kT)$ 间的差值，$\boldsymbol{y}_k$ 表示在 k 时刻由均衡器的 $2N+1$ 个接收信号值构成的列矢量。误差信号可以表示为

$$e_k = a_k - z_k \tag{10.5.40}$$

其中 $z_k=z(kT)$ 为式(10.5.29)给出的均衡器输出，a_k 为期望的符号。那么将式(10.5.39)代入式(10.5.38)，得到最优化抽头系数(基于 MSE 准则)的自适应算法如下

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{c}}_k + \Delta e_k\boldsymbol{y}_k \tag{10.5.41}$$

由于式(10.5.41)采用了梯度矢量估计值，因此称其为随机梯度算法，也称为最小均方值(LMS)算法。

根据式(10.5.41)调整抽头系数的自适应均衡器的功能框图见图 10-25。可以看到均衡器的期望输出 a_k 与实际输出 z_k 的差值构成误差信号 e_k。e_k 乘以步长参数 Δ 进行尺度变换，并在 $(2N+1)$ 个抽头处将尺度变换后的误差信号乘以接收信号值 $\{y(kT-n\tau)\}$，然后根据式(10.5.41)，将 $(2N+1)$ 个抽头处的乘积 $\Delta e_k y(kT-n\tau)$ 加到原来的抽头系数值上，得到了抽头系数的更新值。每接收到一个符号，重复一次上述计算。因此，均衡器系数的

591 更新速率等于符号速率。

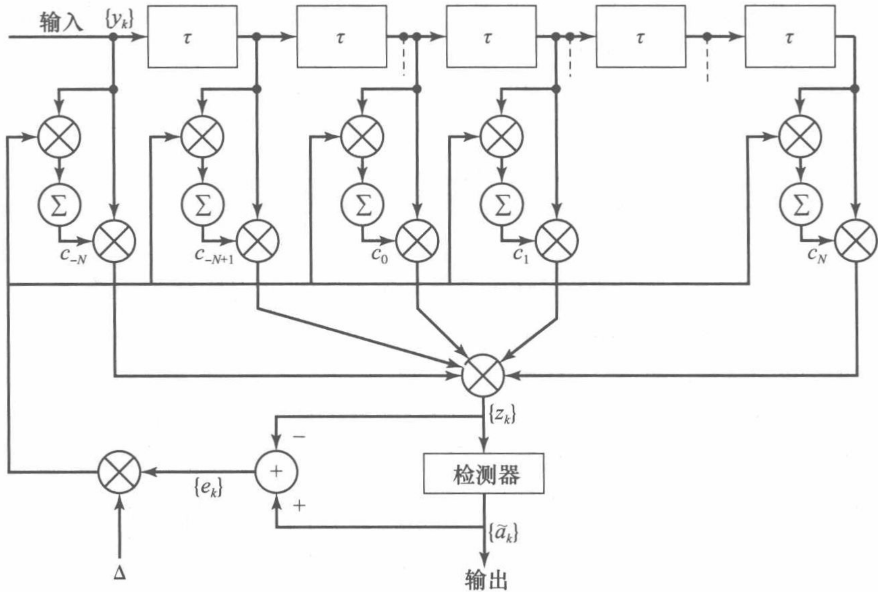


图 10-25 基于 MSE 准则的线性自适应均衡器

开始时，在信道上发送一个已知的伪随机序列$\{a_m\}$训练自适应均衡器。在解调端，均衡器采用该已知序列调整其系数。初始调整之后，自适应均衡器从训练模式切换到判决模式。在判决模式中，检测器的输出判决是足够可靠的，则可以计算检测器输出与均衡器输出的差值来确定误差信号，即

$$e_k = \tilde{a}_k - z_k \tag{10.5.42}$$

其中$\tilde{a}_k$为检测器的输出。一般来说，很少会发生检测器输出的判决错误，因此，这类错误对式(10.5.41)给出的跟踪算法性能几乎没有影响。

在慢变信道中要保证收敛性与良好的跟踪性，步长参数的首选法则是

$$\Delta = \frac{1}{5(2N+1)P_R} \tag{10.5.43}$$

其中P_R表示接收的信号加噪声的功率，可由接收信号进行估计。

式(10.5.41)中随机梯度算法的收敛特性如图 10-26 所示，图中曲线是采用计算机模拟 11 抽头自适应均衡器在具有一定 ISI 信道上得到的，输入的信号加噪声功率P_R归一化为单位 1。根据式(10.5.43)中的步长选择首要原则，取$\Delta=0.018$。如果Δ选择得过大，如$\Delta=0.115$时，则出现 MSE 的较大跳变。当Δ减小时，收敛速度随之减慢，但是 MSE 也变得较低，表明此时的估计系数趋近$\boldsymbol{c}_{\text{opt}}$。

592

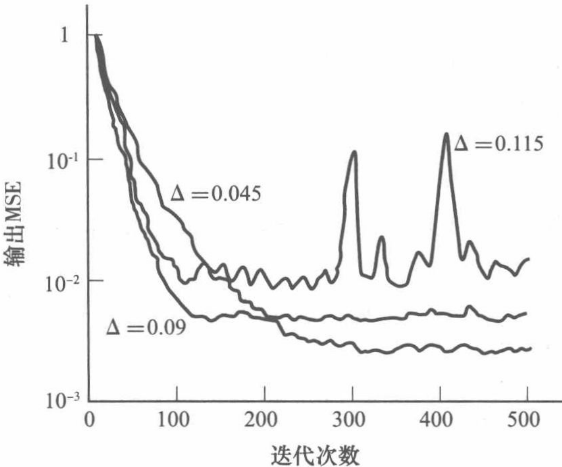


图 10-26 采用不同步长的 LMS 算法的初始收敛特性

虽然本节只介绍了基于 MSE 准则的自适应均衡器的工作原理，但基于迫零方法的自适应均衡器工作原理与此类似。二者主要的差别在于每次迭代时估计梯度矢量的方法不同。图 10-27 给出了自适应迫零均衡器的功能方框图。

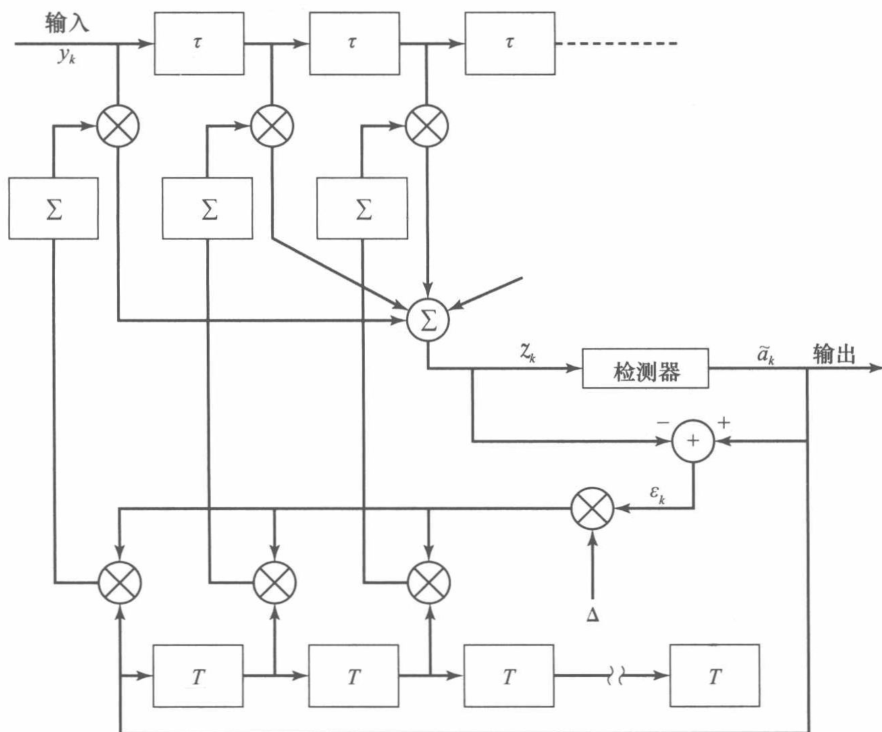


图 10-27　自适应迫零均衡器

判决反馈均衡器。前面介绍的线性滤波器均衡器对诸如有线电话信道等 ISI 不是很严重的信道是非常有效的。ISI 的严重程度与谱特性直接相关，与 ISI 的时间范围不一定相关。如图 10-28 所示的两个信道所引起的 ISI，在信道 A 中，ISI 存在于理想信号分量每侧各 5 个符号间隔内，理想信号分量幅值为 0.72。在信道 B 中，ISI 存在于理想信号分量每侧各 1 个符号间隔，理想信号分量幅值为 0.815。两个信道的总响应能量都被归一化为单位 1。

信道 B 的 ISI 时间跨度短，但它所导致的 ISI 却更为严重。图 10-29 中两个信道的频率响应特性可以明显地说明这一点。可以看到，信道 B 在 $f=1/2T$ 处具有一个谱零点(在频带 $|f|\leqslant W$ 内的某些频率处 $C(f)=0$ 的点)，而信道 A 则没有这种情况出现。相应地，线性均衡器在频率响应中会引入很大的增益以补偿信道零点，从而导致信道 B 中的噪声比信道 A 的噪声得到更大的增强。这就意味着信道 B 的线性均衡器性能明显差于信道 A。图 10-30 给出的这两个信道上线性均衡器性能的计算机仿真结果，也验证了这一点。因此，线性均衡器一个很大的缺点是，在有零谱线的信道上性能明显恶化。常见的这类信道有频率低于 30MHz 的电离层传输无线通信，以及用于蜂窝无线通信的移动无线信道等。

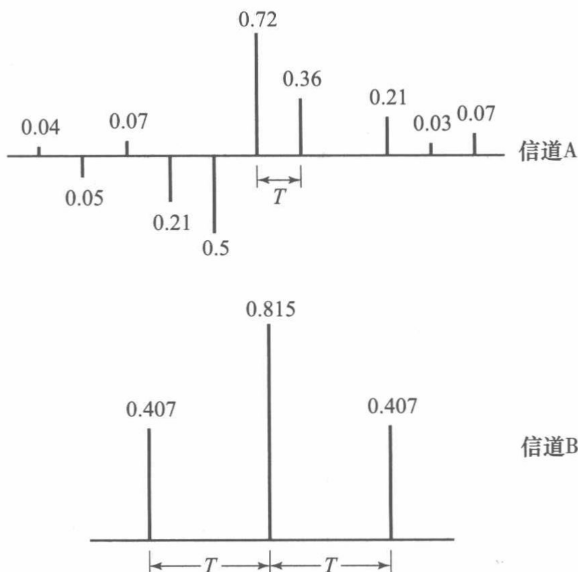


图 10-28　存在符号间干扰的两个信道

593

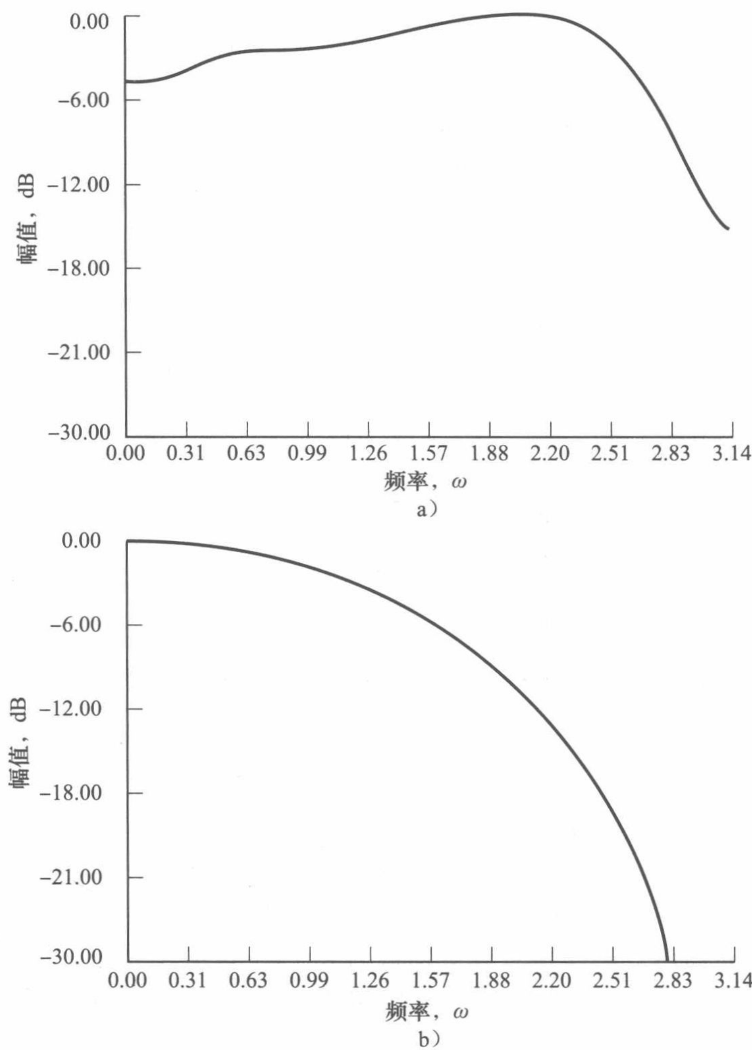


图 10-29 幅频特性：a)图 10-28a 中 A 信道和 b)图 10-28b 中的 B 信道

594
~
595

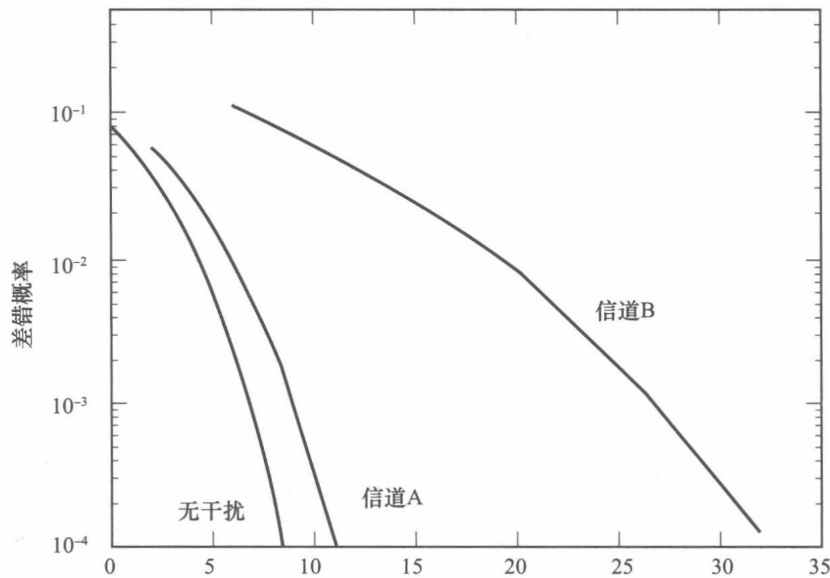


图 10-30 线性 MSE 均衡器的差错率性能

判决反馈均衡器(DFE)是一种非线性均衡器，它利用前面的判决结果来消除前面的符号对当前待检测符号造成的 ISI。图 10-31给出了 DFE 的一个简单的功能方框图。DFE 由两个滤波器组成。第一个滤波器称为前馈滤波器，一般是抽头系数可调的分数间隔 FIR 滤波器。这个滤波器和前面介绍的线性均衡器具有相同的形式，

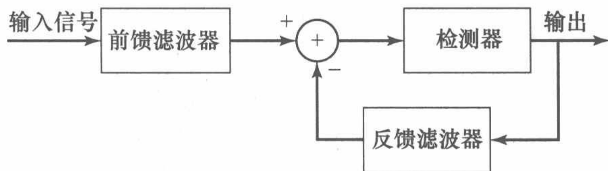


图 10-31　判决反馈均衡器的方框图

其输入为接收到的滤波后的信号 $y(t)$。另外一个滤波器是反馈滤波器，可以用抽头系数可调且抽头之间为符号间隔的 FIR 滤波器实现。反馈滤波器的输入为前面检测过的一组符号，从前馈滤波器的输出中减去反馈滤波器的输出可以得到检测器的输入。于是有

$$z_m = \sum_{n=0}^{N_1} c_n y(mT - n\tau) - \sum_{n=1}^{N_2} b_n \tilde{a}_{m-n} \tag{10.5.44}$$

596

其中$\{c_n\}$与$\{b_n\}$为前馈滤波器和反馈滤波器的可调系数，$\tilde{a}_{m-n}$，$n=1, 2, \dots, N_2$ 为前面已经检测的符号，N_1+1 为前馈滤波器的长度，N_2 为反馈滤波器的长度。检测器根据输入 z_m 判定哪个可能的发送符号在距离上与输入信号 z_m 最接近，做出判决并输出$\tilde{a}_m$。DFE 的非线性主要来自于检测器的非线性特性，后者为反馈滤波器提供输入。

选择前馈滤波器和反馈滤波器的抽头系数可以优化某些期望的性能度量。为了简化数学表示，通常采用 MSE 准则，并用随机梯度算法实现自适应 DFE。图 10-32 给出了一个自适应 DFE 的方框图，其抽头系数通过 LMS 随机梯度算法进行调整。图 10-33 通过计算机仿真给出了在 B 信道中二进制 PAM 传输的 DFE 差错概率性能。相比线性均衡器，这种均衡器的性能增益显著得多。

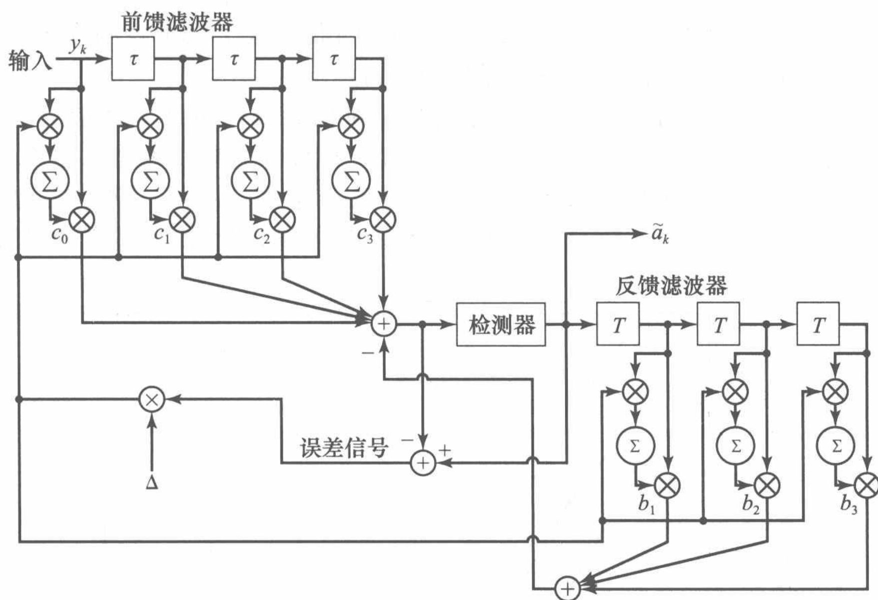


图 10-32　自适应判决反馈均衡器

597

需要指出的是，检测器送入反馈滤波器的判决误差对 DFE 性能的影响非常小。一般来说，差错率低于 10^{-2}时的性能损失为 1dB 到 2dB，这是由于判决差错造成的，但是这个判决差错并不是灾难性的。在信道 B 中反馈滤波器的判决差错的影响如图 10-33所示。

DFE 在性能上优于线性均衡器，但是在差错概率最小化的意义上并非最佳。如前所述，存在 ISI 的情况下，数字通信系统的最佳检测器是 ML 序列检测器。当 ISI 仅涉及几

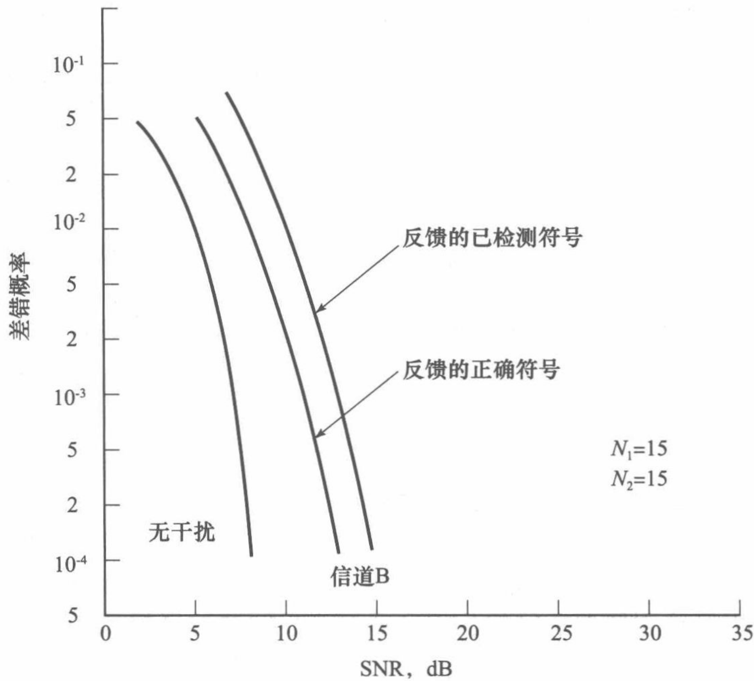


图 10-33　DFE 有/无误差传播时的差错性能

个符号时，这种检测器特别适用于 ISI 严重的信道。例如，图 10-34 给出了二进制 PAM 信号在信道 B 上传输时维特比算法的差错概率性能。为了便于比较，图中同时给出了判决反馈均衡器的差错概率。两种结果都是通过计算机仿真得到的。可以看出，当差错概率为 10^{-4}时，ML 序列检测器性能优于 DFE 约 4.5dB。因此，这个例子表明在 ISI 影响相对较短的信道中，ML 序列检测器提供了较高的性能增益。

总之，自适应均衡器广泛用于高速数字通信系统的无线信道和电话信道中。例如，高速电话线路调制解调器(比特速率在 2400bps 以上)中的自适应均衡器，通常用一个基于 MMSE 准则的可调系数的 FIR 滤波器实现。根据数据速率的不同，典型的均衡器跨度在 20 到 70 个符号之间。式(10.5.41)给出的 LMS 算法通常用来自适应地调整均衡器的系数。

598

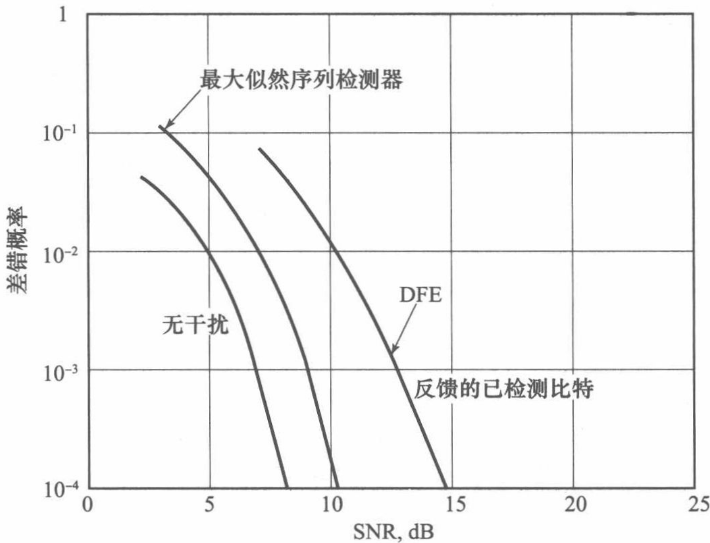


图 10-34　信道 B 中维特比算法与 DFE 的差错性能

10.6　小结及深入阅读

本章主要讨论了限带AWGN信道上的数字信号传输。将限带信道特性描述为线性滤波器，并说明这种信道特性会引起信号失真。在数字传输中，信道失真会导致符号间干扰。

为了抑制信道失真对传输信号的影响，本章讨论了如何对限带信道中传输的限带信号进行设计。首先说明了数字调制信号，如PAM，PSK和QAM的功率谱，是基本信号脉冲$g_T(t)$的频谱函数$G_T(f)$的函数，被发送器用来限制发送信号的带宽。发送信号功率谱还是数据序列$\{a_n\}$谱特征的函数。分析发现当数据序列具有零均值时，即$E(a_n)=0$，可以完全避免发送信号功率谱中的冲激谱线(符号速率倍数频率处的离散频率分量)。对于第8章描述的PAM，PSK和QAM信号星座图的信号点，这一条件容易满足。

接着本章讨论了在限带信道中传输限带脉冲$g_T(t)$的设计，给出了两种不同的方法。第一种方法的约束条件是，在理想限带信道中，实现零ISI的信号传输。在零ISI的条件下，奈奎斯特(Nyquist，1928)证明了在带宽为W的理想信道中，可以每秒$2W$个符号的最大数据速率进行传输(即$1/T=2W$，其中T为信号间隔)。每秒$2W$个符号的数据速率称为奈奎斯特速率。在零ISI条件下，唯一能够达到奈奎斯特速率的一种脉冲是sinc脉冲，其频谱限于WHz之内，且为常数。分析表明只要符号速率满足$1/T<2W$的条件，就可以设计出物理可实现的脉冲信号，保证零ISI。具有升余弦频谱的脉冲信号就可以满足这个特性。

599

分析表明，放松抽样时刻零ISI的条件，可以设计多种带宽不超过WHz限带信号脉冲，并且可以达到每秒$2W$个符号的奈奎斯特速率。本章详细分析了两个例子，即双二进制信号和修正双二进制信号，其ISI仅存在于两个符号上。这两种信号同属于一类特定信号，即部分响应信号。分析表明，在限带信道上利用部分响应信号进行传输的主要缺点是，最佳的最大似然(ML)检测器实现复杂度过高。因为ML检测器是序列检测，这与简单的逐符号检测不同。ML检测器通常采用第13章中将要介绍的维特比算法实现。不过，通过分析也可以发现，如果接受一定的性能降质，对于双二进制信号和修正双二进制信号，逐符号检测方法可以很容易地实现。

对于理想限带信道，设计了限带信号脉冲后，实际中还会遇到非理性传输信道的信道失真问题，以及信道失真引起的ISI问题。要补偿信道失真，通常在接收端或通信系统中引入一个额外的滤波器或计算器件，这个器件称为均衡器。如果信道是时不变的，信道特性可以测得，那么均衡器可以设计为固定(时不变)的滤波器。如果信道的冲激响应是随时间缓慢变化的(相比符号速率)，均衡器的设计就要能够适应信道特性随时间的缓慢变化。线性横向(抽头延迟线)滤波器和判决反馈滤波器是两种常用的均衡器。后者由两个分立的抽头延迟线滤波器构成。最佳均衡器是基于ML准则的，可以采用维特比算法(VA)有效实现。

对限带信道信号设计的开拓性研究是由奈奎斯特(Nyquist，1928)开展的。二进制部分响应信号最初由林德(Lender，1963)提出，之后被克莱茨莫(Kretzmer，1966)推广到一般情况。发送滤波器和接收滤波器设计的最优化问题研究见格斯特与戴蒙德(Gerst，Diamond，1961)，塔夫特(Tufts，1965)，史密斯(Smith，1965)和博格与塔夫特(Berger，Tufts，1967)等人的论文。

数字通信的自适应均衡问题是由乐基(Lucky，1965，1966)提出的，威得罗(Widrow，1966)针对均衡器系数自适应调整提出了LMS算法。

维特比(Viterbi，1967)提出的维特比算法常用于卷积码的译码，该部分内容将在第13章中进行介绍。该算法在部分响应信号的最大似然序列检测器中的作用是消除符号间干扰。该作用是由福尼(Forney，1972)和大村(Omura，1971)提出并进行分析的。有关自适应均衡算法的综合处理见本书作者的著作(Proakis，Salehi，2008)。

600

附录 10A：调制信号的功率谱

本附录中，将推导线性调制后的数字信号功率谱。首先推导出等效基带信号的功率谱，然后再求带通信号的功率谱。

10A.1 基带信号的功率谱

如 10.1.2 节所示，数字 PAM、PSK 或 QAM 信号的等效基带信号一般形式可以表示为

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g_T(t-nT) \tag{10A.1}$$

其中$\{a_n\}$为对应信源信息符号的 PAM、PSK 或 QAM 信号星座图中取值的序列，$g_T(t)$为发送滤波器的冲激响应。由于信息序列$\{a_n\}$是随机的，$v(t)$是随机过程$V(t)$的样本函数。这一节将估计$V(t)$的功率谱。采用方法是，推导出$V(t)$的自相关函数，然后再对其求傅里叶变换。

首先，求出$V(t)$的均值为

$$E(V(t))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(a_n)g_T(t-nT)=m_a\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_T(t-nT) \tag{10A.2}$$

其中m_a为随机序列$\{a_n\}$的均值。注意，虽然m_a为常数，但是$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_T(t-nT)$是以$T$为周期的函数。因此，$V(t)$的均值以$T$为周期。

$V(t)$的自相关函数为

$$R_V(t+\tau,t)=E(V^*(t)V(t+\tau))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E(a_n^*a_m)g_T(t-nT)g_T(t+\tau-mT) \tag{10A.3}$$

一般来说，假设信息序列$\{a_n\}$为宽平稳的，且自相关序列为

601

$$R_a[n]=E(a_n^*a_{n+m}) \tag{10A.4}$$

那么，式(10A-3)可以表示为

$$\begin{aligned}R_V(t+\tau,t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m-n]g_T(t-nT)g_T(t+\tau-mT)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_T(t-nT)g_T(t+\tau-nT-mT)\end{aligned} \tag{10A.5}$$

可以发现，式(10A-5)中的第二个求和运算，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_T(t-nT)g_T(t+\tau-nT-mT) \tag{10A.6}$$

是以T为周期的。相应的，自相关函数$R_V(t+\tau,\ t)$也是以T为周期的，即

$$R_V(t+T+\tau,t+T)=R_V(t+\tau,t) \tag{10A.7}$$

因此，随机过程$V(t)$具有周期性的均值和周期性的自相关函数。称这样的随机过程是周期平稳的(见定义式(5.2.4))。

周期平稳过程的功率谱密度可以由自相关函数$R_V(t+\tau,\ t)$在时间周期T上求平均得到，然后计算平均自相关函数的傅里叶变换(见 5.2.5 节的维纳-辛钦定理)，可以得到

$$\begin{aligned}\overline{R}_V(\tau)&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}R_V(t+\tau,t)\mathrm{d}t=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-nT-T/2}^{-nT+T/2}g_T(t)g_T(t+\tau-mT)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]\int_{-\infty}^{\infty}g_T(t)g_T(t+\tau-mT)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{10A.8}$$

将式(10A-8)中的积分理解为$g_T(t)$的自相关函数，并定义为[参见式(2.5.1)]

$$R_g(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}g_T(t)g_T(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{10A.9}$$

据此定义，$V(t)$的平均自相关函数可以写为

$$\overline{R}_V(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]R_g(\tau-mT) \tag{10A.10}$$

602

可以发现，式(10A-10)中的 $\overline{R}_V(\tau)$表达式具有卷积和的形式，因此，其傅里叶变换为

$$\mathcal{S}_V(f)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{R}_V(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]\int_{-\infty}^{\infty}R_g(\tau-mT)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{T}\mathcal{S}_a(f)|G_T(f)|^2 \tag{10A.11}$$

其中$\mathcal{S}_a(f)$是信息序列$\{a_n\}$的功率谱，定义为

$$\mathcal{S}_a(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a[m]\mathrm{e}^{-j2\pi fmT} \tag{10A.12}$$

并且，$G_T(f)$为发送滤波器的频谱特性，$|G_T(f)|^2$ 是 $R_g(\tau)$的傅里叶变换。

式(10A.11)给出的结果说明，发送信号的功率谱密度$\mathcal{S}_V(f)$是与发送滤波器的频谱特性 $G_T(f)$和信息序列$\{a_n\}$的谱特征$\mathcal{S}_a(f)$相关。因此可以设计 $G_T(f)$和$\mathcal{S}_a(f)$来控制发送信号的功率谱。

10A.2　载波调制信号的功率谱

基带信号的功率谱与带通信号的功率谱关系相对简单。以基带 PAM 信号为例进行分析。带通信号

$$u(t)=v(t)\cos 2\pi f_c t$$

的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_U(t+\tau,t)&=E(U(t)U(t+\tau))\\&=E[V(t)V(t+\tau)]\cos 2\pi f_c t\cos 2\pi f_c(t+\tau)\\&=R_V(t+\tau,t)\cos 2\pi f_c t\cos 2\pi f_c(t+\tau)\end{aligned}$$

将两个余弦信号之积表示为两个角度和的余弦信号加上角度差的余弦信号，可以得到

$$R_U(t+\tau,t)=\frac{1}{2}R_V(t+\tau,t)[\cos 2\pi f_c\tau+\cos 2\pi f_c(2t+\tau)]$$

那么，在周期 T 中对 $R_U(t+\tau,\ t)$求平均，上式第二项倍频分量在 $\cos 4\pi f_c\tau$ 每个周期中平均为零，则可以得到

$$\overline{R}_U(\tau)=\frac{1}{2}\overline{R}_V(\tau)\cos 2\pi f_c\tau \tag{10A.13}$$

603

求 $\overline{R}_U(\tau)$的傅里叶变换可以得到带通信号的功率谱为

$$\mathcal{S}_U(f)=\frac{1}{4}[\mathcal{S}_V(f-f_c)+\mathcal{S}_V(f+f_c)] \tag{10A.14}$$

虽然式(10A.14)是针对 PAM 信号推导的，但是对 QAM 和 PSK 信号也可以求出同样的表达式。这三种带通信号不同的只是序列$\{a_n\}$的自相关函数 $R_a[m]$及其功率谱$\mathcal{S}_a(f)$。

习题

10.1　例 10.1.1 中，带宽为 W 的理想信道限制了通过该信道的发送信号能量。接收信号能量为信道带宽的函数，即

$$\mathscr{E}_h=\frac{T}{(2\pi)^2}\int_{-WT}^{WT}\frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}\mathrm{d}\alpha$$

其中 $\alpha=fT$。

1. 对于 $W=\frac{1}{2T}$，$\frac{1}{T}$，$\frac{1.5}{T}$，$\frac{2}{T}$，$\frac{2.5}{T}$，$\frac{3}{T}$，求出$\mathscr{E}_h(W)$的估计值，并画出$\frac{\mathscr{E}_h(W)}{T}$与 W 的

函数关系曲线。

2. 确定 $W\to\infty$ 时，$\mathscr{E}_h(W)$ 的极限值，计算中可以利用以下时域关系

$$\lim_{W\to\infty}\mathscr{E}_h(W)=\int_{-\infty}^{\infty}g_T^2(t)\mathrm{d}t。$$

10.2 在二进制 PAM 系统中，检测器的输入为

$$y_m=a_m+n_m+i_m$$

其中 a_m 为期望信号，n_m 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯随机变量，i_m 表示由于信道失真引起的符号间干扰。符号间干扰项是一个随机变量，分别以概率 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ 取值 $-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$。试求作为 σ_n^2 函数的平均差错概率。

10.3 二进制 PAM 系统中，对相关器输出抽样的时钟与最佳抽样时刻之间有 10%的偏差。

1. 如果所用的信号脉冲为矩形的，试求由于同步不准而产生的 SNR。
2. 确定由于同步不准引起的符号间干扰的大小，并确定其对性能的影响。

10.4 一个低通信道的频率响应特性可以近似表示为

$$C(f)=\begin{cases}1+\alpha\cos2\pi ft_0, & |\alpha|<1,|f|\leqslant W\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 W 是信道带宽。输入信号 $s(t)$ 通过该信道传输，$s(t)$ 的频谱限于 W/Hz。

1. 试证明信道输出为

$$y(t)=s(t)+\frac{\alpha}{2}[s(t-t_0)+s(t+t_0)]$$

即信道产生一对回波。

2. 假设接收信号 $y(t)$ 通过一个与 $s(t)$ 相匹配的滤波器，试求匹配滤波器在 $t=kT$，$k=0$，±1，±2，…时的输出，其中 T 为符号持续的时间。
3. 如果 $t_0=T$，试问信道产生什么样的 ISI 样式。

10.5 试证明对于滚降因子 α 的任何取值，具有式(10.3.20)的升余弦频谱的脉冲都满足式(10.3.7)确定的奈奎斯特准则。

10.6 试证明对于滚降因子 α 的任何取值，具有式(10.3.20)的升余弦频谱的脉冲都满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}X_{\mathrm{rc}}(f)\mathrm{d}f=1$$

[提示：利用 $X_{\mathrm{rc}}(f)$ 满足式(10.3.7)确定的奈奎斯特准则。]

10.7 式(10.3.7)给出了脉冲 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 保证零 ISI 充分必要条件。试证明：对于频带受限于 $|f|<1/T$ 的任何脉冲而言，如果 $f>0$ 时的 $\mathrm{Re}[X(f)]$ 由一个矩形函数加上一个关于 $f=1/2T$ 的任意奇函数组成，并且 $\mathrm{Im}[X(f)]$ 是一个关于 $f=1/2T$ 的任意偶函数，则可以满足零 ISI 的条件。

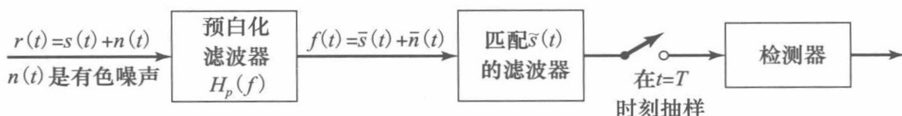
10.8 信道在 $|f|\leqslant1400$Hz 的频率范围内具有带通特性。

1. 为了达到 9600bps 的信号传输速率，试选择符号速率和 PAM 信号星座图。
2. 如果发送脉冲 $g_T(t)$ 为平方根升余弦脉冲，试求滚降因子。假设信道具有理想的频率响应特性。

10.9 设计一个在带宽 $W=2400$Hz 的理想信道上传输数字信息的 M 进制 PAM 系统，比特速率为 14 400bps。求采用双二进制信号脉冲时，发送信号的点数与接收信号的点数，以及差错概率达到 10^{-6} 所需的 $\mathscr{E}_b$。已知加性噪声是均值为零，功率谱密度为 10^{-4} W/Hz 的高斯噪声。

10.10 当解调器输入端的加性噪声为有色噪声时，与信号相匹配的滤波器不再具有最大输出 SNR。在这种情况下，考虑使用一个预滤波器来“白化”有色噪声。将预滤波器输出的信号送入一个与预滤波信号相匹配的滤波器。习题 10.10图给出了该过程的结构框图。

1. 试求使噪声白化的预滤波器的频率响应特性。
2. 试求与 $\tilde{s}(t)$ 相匹配的滤波器的频率响应特性。
3. 将预滤波器与匹配滤波器看成一个“广义匹配滤波器”，该滤波器的频率响应特性如何？
4. 试求检测器输入端的 SNR。



习题 10.10 图

10.11 在带宽为 1500Hz 的信道上采用 PAM 进行数据传输。说明符号速率随额外带宽而变化的函数关系。求额外带宽为 25%，33%，50%，67%，75%和 100%时分别对应的符号速率。

10.12 预编码器的输入二进制序列为 10010110010，采用其输出信号调制一个双二进制发送滤波器。试建立一个类似表 10-2 的表，给出预编码序列、发送幅度电平、接收信号电平和译码序列。

10.13 对于修正双二进制信号脉冲，重做习题 10.12。

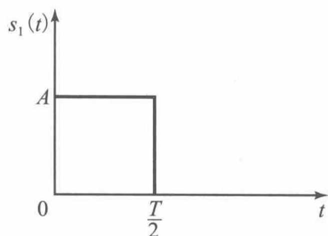
10.14 如果当 $n=0$ 时，期望的部分响应信号模 M 为零，那么该部分响应信号的预编码器将不能工作。例如，考虑 $M=2$ 时的理想响应

$$x(nT)=\begin{cases}2, & n=0\\ 1, & n=1\\ -1, & n=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

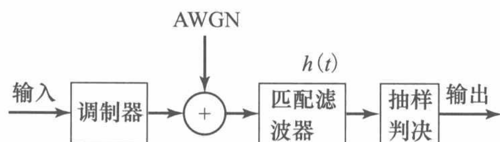
说明为什么这个响应不能预编码。

10.15 在基带数字通信系统中采用如习题10.15a图所示的两个信号，传输两个等概消息。假设这里研究的通信问题为“一次性”通信问题，即消息仅被发送一次，其后无任何消息被发送。设信道无衰减，噪声为功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$的AWG。

1. 试求适合表示该信号的正交基。
2. 在方框图中给出采用匹配滤波器的最佳接收机精确指标，并在方框中仔细标明。
3. 试求最佳接收机的差错概率。
4. 证明仅利用一个滤波器就可以实现最佳接收机[参见习题10.15b图所示的方框图]。匹配滤波器、取样判决器和判决器分别具有什么样的特性?
5. 假设信道不是理想信道，其冲激响应为$c(t)=\delta(t)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$，利用与前面相同的匹配滤波器设计一个最佳接收机。
6. 假设信道冲激响应为$c(t)=\delta(t)+a\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$，其中$a$为区间[0, 1]上均匀分布的随机变量。利用相同的匹配滤波器设计一个最佳接收机。



a)



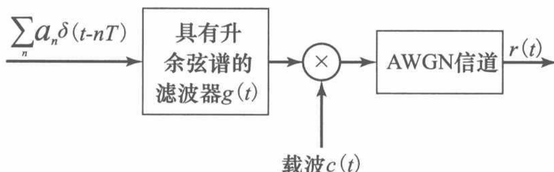
b)

习题10.15图

10.16 画出双二进制信号波形与式(10.4.2)给出的预编码器相结合的栅格图，并标出状态。然后再画出修正二进制信号波形与式(10.4.14)给出的预编码器相结合的栅格图，并标出状态。比较二者的相同和不同之处。

10.17 激励滚降因子为50%的升余弦滚降滤波器，再通过DSB-SC幅度调制到正弦载波上，形成二进制PAM信号，如习题10.17图所示。设比特率为2400bps。

1. 确定二进制已调PAM信号的谱特征，并画出示意图。
2. 画出接收信号的最佳解调器/检测器的框图，该接收信号为发送信号与加性高斯白噪声之和。



习题10.17图

10.18 理想话音频段电话线信道具有带通频响特性，频率范围600～3000Hz。

1. 设计一个$M=4$的PSK(即正交PSK或QPSK)系统，以速率2400比特/秒，载频$f_c=1800\text{Hz}$传输数据。采用升余弦频响特性进行频谱形成。画出系统框图，并描述其功能。
2. 改变比特率为$R=4800$比特/秒，重复第1问。

10.19 话音频段电话线信道的通频带为300～3300Hz。希望设计一个调制解调器，符号速率为2400符号/秒，目标比特速率为9600比特/秒。选择适当的QAM信号星座图、载频、以及升余弦频谱的滚降系数，达到对通频带的充分利用。画出发送信号脉冲的谱，并指出重要频率。

10.20 考虑数字通信系统，以每秒2400符号的速率在话音频段电话信道上用QAM信号传输信息。假设加性噪声为白色高斯型噪声。

1. 求在4800bps达到10^{-5}误码率所需的$\mathscr{E}_{bav}/N_0$。
2. 对于9600bps，重复第1问。
3. 对于19200bps，重复第1问。
4. 根据以上结果，可以得到什么结论?

10.21 考虑4kHz话音频段电话(带通)信道传输，求以下调制方法下的比特率：(a)二进制PSK；(b)4相PSK；(c)8点QAM；(d)非相干检测的二进制正交FSK；(e)非相干检测的正交

4FSK；(f)非相干检测的 8FSK。对于(a)至(c)，假设发送端脉冲波形有升余弦频谱，滚降系数为 50%。

10.22 考虑采用滚降系数为单位 1 的平方根升余弦信号脉冲，在理想无失真限带信道上实现二进制 PAM 传输。发送信号为

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_T(t - kT_b)$$

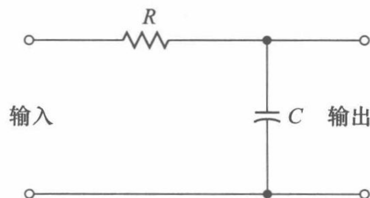
其中信号间隔为 $T_b = T/2$，符号速率是零 ISI 情况的两倍。

1. 确定匹配滤波器解调器的输出端 ISI 值。
2. 画出最大似然序列检测器的栅格图，标出状态。

10.23 在非理想限带信道上传输二进制对极信号，该信道在两个相邻符号上引入 ISI。如果单独传输信号脉冲 $s(t)$，则解调器的(无噪声)输出在 $t=T$ 时为$\sqrt{\mathscr{E}_b}$，在 $t=2T$ 时为$\sqrt{\mathscr{E}_b}/4$，而在 $t=kT$，$k>2$ 时为零。其中$\mathscr{E}_b$ 为信号能量，T 为信号间隔。

1. 假设两个信号等概率发生，且加性噪声为高斯白噪声，求平均差错概率。
2. 画出第 1 问中的差错概率及零 ISI 情况下的差错概率。求差错概率为 10^{-6}时，两种情况下 SNR 的相对差值。

10.24 求习题 10.24 图所示的 RC 电路的频率响应特性，写出包络时延的表达式。



习题 10.24 图

10.25 在习题 10.24 图所示 RC 低通滤波器中，$\tau=RC=10^{-6}$。

1. 求该滤波器的包络(群)时延与频率的函数关系，并画出其图形。
2. 假设该滤波器的输入是一个带宽为 $\Delta f=$ 1kHz 的低通信号，求 RC 滤波器对该信号的影响。

10.26 微波无线电信道的频率响应为

$$C(f) = 1 + 0.3\cos 2\pi fT$$

求速率为$1/T$符号/秒，额外带宽为 50%的条件下，实现零 ISI 传输所需的最佳发送滤波器和接收滤波器的频率响应特性，设加性噪声谱是平坦的。

10.27 采用$M=4$ 的 PAM 调制，以 9600bps 比特率传输信号，信道的频率响应为

$$C(f) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{2400}}$$

其中$|f|\leqslant 2400$。且当 f 取其他值时，$C(f)=0$。加性噪声是均值为零、功率谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$ W/Hz 的高斯白噪声。求最佳发送滤波器和接收滤波器的(幅度)频率响应特性。

10.28 采用二进制 PAM 在一个未均衡的线性滤波器信道上传输信息。当发送 $a=1$ 时，解调器无噪声输出为

$$x_m = \begin{cases} 0.3, & m=1 \\ 0.9, & m=0 \\ 0.3, & m=-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1. 设计一个三抽头迫零线性均衡器，使其输出为

$$q_m = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m=\pm 1 \end{cases}$$

2. 通过均衡器的冲激响应与信道响应的卷积运算，求 $m=\pm 2$，± 3 时的 q_m。

10.29 在信道中传输一个具有升余弦谱的信号脉冲，解调器的输出端得到如下(无噪声)抽样输出

$$x_k = \begin{cases} -0.5, & k=-2 \\ 0.1, & k=-1 \\ 1, & k=0 \\ -0.2, & k=1 \\ 0.05, & k=2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1. 根据迫零准则求三抽头线性均衡器的抽头系数。
2. 针对第 1 问中得到的系数，求单个信号脉冲的均衡器输出，并求残留 ISI 值及其符号时间跨度。

10.30 证明最小化 MSE 的梯度矢量可以表示为

$$\boldsymbol{g}_k = -E(e_k \boldsymbol{y}_k)$$

其中误差 $e_k = a_k - z_k$，并且 $\boldsymbol{g}_k$ 的估计值

$$\hat{\boldsymbol{g}}_k = -e_k \boldsymbol{y}_k$$

满足条件 $E(\hat{\boldsymbol{g}}_k) = \boldsymbol{g}_k$。

10.31 非理想限带信道在 3 个连续符号中引入 ISI，在抽样时刻 $t=kT$ 得到的匹配滤波器型解调器的(无噪声)响应为

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-kT)\mathrm{d}t = \begin{cases} \mathscr{E}_b, & k=0 \\ 0.9\,\mathscr{E}_b, & k=\pm 1 \\ 0.1\,\mathscr{E}_b, & k=\pm 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求三抽头线性均衡器的抽头系数。该均衡器将信道(接收信号)响应均衡为等效的部分响应

(双二进制)信号

$$y_k = \begin{cases} \mathscr{E}_b, & k = 0,1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

10.32 如果 ISI 涉及 3 个符号，且可以表示为 $x(0)=1$，$x(-1)=0.3$ 和 $x(1)=0.2$。求三抽头迫零均衡器的抽头系数，并求最佳抽头系数均衡器的输出端残留 ISI。

10.33 在视距微波无线传输中，信号通过两条传播路径到达接收机，即直接路径和延迟路径。后者是由周围地形对信号反射形成的。假设接收信号表示如下

$$r(t) = s(t) + \alpha s(t-T) + n(t)$$

其中 $s(t)$ 为发送信号，α 为第二条路径的衰减 ($\alpha<1$)，$n(t)$ 为加性高斯白噪声。

1. 求 $t=T$ 和 $t=2T$ 时解调器的输出，设解调器使用了与 $s(t)$ 相匹配的滤波器。
2. 如果发送信号为二进制对极信号，且检测器可以忽略 ISI，求逐符号检测器的差错概率。
3. 对于估计 α 并消除 ISI 的简单(单抽头)DFE，计算其差错率，并画出采用 DFE 的检测器结构。

10.34 重复习题 10.32 并利用 MMSE 准则对抽头系数进行最佳化。设噪声功率谱密度为 0.1W/Hz。

10.35 证明双二进制信号脉冲的匹配滤波器其输出端的噪声协方差矩阵如式(10.4.35)所示。

10.36 在长度为 1000km 的有线信道上采用二进制 PAM 传输数据。系统中每隔 50km 设置一个再生中继器。每段信道在 $0\leqslant f\leqslant 1200$ 范围上具有理想频率响应特性，信道衰减为 1dB/km。信道噪声为 AWGN。

1. 零 ISI 传输的最高比特速率是多少?
2. 要达到比特差错率 $P_2=10^{-7}$，求每个中继器需要的 $\mathscr{E}_b/N_0$。
3. 要达到理想的 $\mathscr{E}_b/N_0$，求每个中继器需要的发送功率，设 $N_0=4.1\times10^{-21}$ W/Hz。

10.37 (无载波 QAM 或 PSK 调制解调器)考虑一个 QAM 或 M 进制 PSK($M\geqslant4$)信号的传输，载频为 f_c，且载波与基带信号带宽相当。带通信号可以表示为

$$s(t) = \mathrm{Re}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\Big]$$

1. 证明 $s(t)$ 可以表示为

$$s(t) = \mathrm{Re}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n Q(t-nT)\Big]$$

其中 $Q(t)$ 可以定义为

$$Q(t) = q(t) + \mathrm{j}\,\hat{q}(t)$$
$$q(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$$
$$\hat{q}(t) = g(t)\sin 2\pi f_c t$$

并且 a'_n 是相位旋转符号，即 $a'_n = a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c nT}$。

2. 采用响应为 $q(t)$ 和 $\hat{q}(t)$ 的滤波器，画出调制器与解调器的实现框图。其中，不需要用混频器在调制端将信号转换成带通信号，也不需要在解调端将信号转换成基带信号。

10.38 [无载波幅度或相位(CAP)调制]在一些有线数据传输的实际应用中，发送信号带宽与载频相当。在这类系统中，可以省去基带信号与载频分量进行的混频处理，而直接在波形形成滤波器中嵌入载频分量得到带通信号。这样，如习题 10.38 图给出的调制解调器功能框图所示，波形形成滤波器的冲激响应为

$$q(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$$
$$\hat{q}(t) = g(t)\sin 2\pi f_c t$$

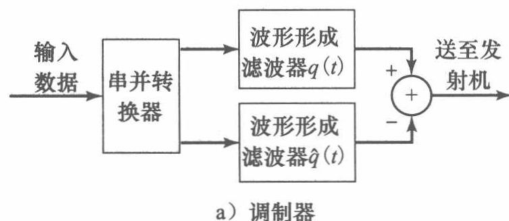
并且 $g(t)$ 为具有平方根升余弦谱特征的脉冲。

1. 证明

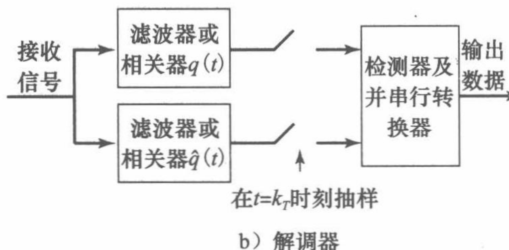
$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)\,\hat{q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

且系统可以用于传输 2 维信号，如 PSK 和 QAM。

2. 在什么条件下，这个 CAP 调制解调器与习题 10.37 中的无载波 QAM/PSK 调制解调器等价?



a）调制器



b）解调器

习题 10.38 图

604
~
613

上机习题

10.1 通信信道的线性滤波器模型

如本章前文所述，限带通信信道可以建模为频率响应特性与信道频率响应特性相匹配的线性滤波器。因此可以设计有限冲激响应(FIR)或无限冲激响应(IIR)数字滤波器近似表示通信信道的频率响应特性。

假设需要建立一个理想信道模型，当 $|f| \leqslant 2000\text{Hz}$ 时其幅度响应 $A(f)=1$，否则 $A(f)=0$，并且 $|f| \leqslant 2000\text{Hz}$ 时具有恒定时延迟(线性相位)。数字滤波器的抽样速率为 $F_s = 10\,000\text{Hz}$。由于理想相位响应是线性的，只有 FIR 滤波器满足该条件。但是在阻带不可能获得零响应，因而选择阻带响应为 -40dB，阻带边界频率为 2500Hz。另外，通带允许少量的，比如 0.5dB 的纹波。

设计一个具有上述特性的 FIR 滤波器，绘制出该滤波器在频带 $0 \leqslant f \leqslant 5000\text{Hz}$ 内的频率响应和相位响应。注意，5000Hz 为折叠频率。

10.2 符号间干扰的影响

本题目的是观察符号间干扰(ISI)对下列两个信道中接收信号序列 $\{y_n\}$ 的影响，两个信道的特性可以用离散时间响应 $\{x_n\}$ 分别表示如下：

信道 1

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -0.25, & n = \pm 1 \\ 0.1, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

信道 2

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0.5, & n = \pm 1 \\ -0.2, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

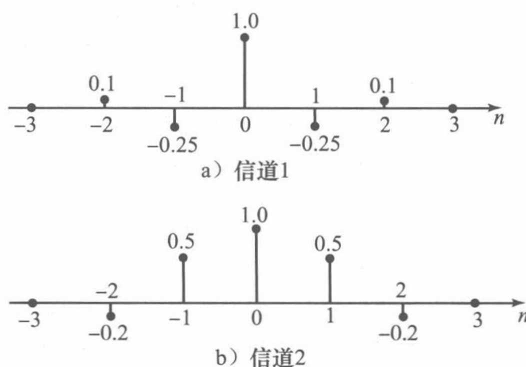
注意，在这些信道中，ISI 被限制在需要发送信号两侧的两个符号上。因此，在抽样时刻，发送滤波器、接收滤波器和信道的级联可以用上机习题 10.3 图所示的等效离散时间 FIR 滤波器表示。

假设发送信号序列为二进制(± 1)序列，等效离散时间 FIR 信道滤波器输出端的接收序列表示为 $\{y_k\}$。则输出序列 $\{y_k\}$ 可以表示为

$y_k = a_k + x_1 a_{k-1} + x_{-1} a_{k+1} + x_2 a_{k-2} + x_{-2} a_{k+2}$，$k=1, 2, \dots$

其中 $\{a_k = \pm 1\}$ 为输入数据序列。假设 $a_k = 1$，分别计算并画图表示 16 个可能的数据序列 $[a_{k-1}, a_{k+1}, a_{k-2}, a_{k+2}]$ 通过信道 1 与信道 2 的输出结果 $\{y_k\}$。当 $a_k = -1$ 时重做上述问题。上述哪种信道特性即使在没有噪声的情况下也会出现 ISI 引起的判决错误？

当信道输出序列受到均值为零、方差为 $\sigma^2 = 0.1$ 的加性高斯白噪声干扰时，重做上述问题，并将结果与无噪声结果进行比较，说明加性噪声对两个信道输出序列的影响。



机习题 10.3 图　存在符号间干扰的 FIR 信道模型

10.3 最佳接收滤波器与发送滤波器的设计

本题目的是设计发送滤波器 $G_T(f)$ 与接收滤波器 $G_R(f)$ 的数字实现，以使

$$|G_T(f)|\,|G_R(f)| = X_{rc}(f)$$

并且 $G_R(f)$ 是 $G_T(f)$ 的匹配滤波器。

设计并实现数字发送滤波器和接收滤波器，最简单的方法是采用具有线性相位特性(即对称的冲激响应)的 FIR 滤波器。如果 $X_{rc}(f)$ 为具有给定滚降因子的理想的升余弦频率响应，则发送滤波器与接收滤波器的幅度响应为

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = \sqrt{X_{rc}(f)}$$

滤波器的频率响应与其冲激响应之间存在傅里叶变换关系

$$G_T(f) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} g_T(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f n T_s} \qquad \text{(A)}$$

其中 T_s 为抽样间隔，N 为滤波器的长度。注意 N 为奇数。由于 $G_T(f)$ 是限带的，所以抽样频率 F_s 至少应选为 $2/T$。比如令

$$F_s = \frac{1}{T_s} = \frac{4}{T}$$

或者等效为 $T_s = T/4$。因此，折叠频率为 $F_s/2 = 2/T$。由于 $|G_T(f)| = \sqrt{X_{rc}(f)}$，可以在频率间隔为 $\Delta f = F_s/N$ 的等间隔频率点对 $X_{rc}(f)$ 进行抽样，得到

$$\sqrt{X_{rc}(m\Delta f)} = \sqrt{X_{rc}\left(m\frac{F_s}{N}\right)} = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} g_T(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/N} \qquad \text{(B)}$$

再进行逆变换可以得到冲激响应为

$$g_T(n)=\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sqrt{X_{rc}\left(\frac{4m}{NT}\right)}e^{j2\pi mn/N},$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{(N-1)}{2} \quad (C)$$

因为 $g_T(n)$是对称的，所以需要将 $g_T(n)$延时$(N-1)/2$个样本，才能够得到所需的线性相位发送滤波器的响应，即 $g_T\left(n-\frac{N-1}{2}\right)$，$n=0$，1，2，…，$N-1$。

1. 求长度 $N=31$ 的发送滤波器冲激响应 $g_T(n)$，并画出示意图。设 $X_{rc}(f)$的滚降因子 $\alpha=1/4$且$1/T=1800$Hz。
2. 利用(A)式计算并画图表示 $0\leqslant f\leqslant 0.5$ 时的频率响应$|G_T(f)|$；当$|f|\geqslant(1+\alpha)/T$时，$G_T(f)=0$ 吗？解释原因。
3. 在同一幅图中画出$|G_T(f)|^2$ 和 $X_{rc}(f)$曲线并进行比较，解释二者的不同。
4. 当 $\alpha=1/4$，$1/T=1800$Hz 且 $N=41$ 时，重复1、2、3问，比较分析所得的结果。

10.4 双二进制信号滤波器的设计

本题目的是设计发送滤波器 $G_T(f)$与接收滤波器 $G_R(f)$的数字实现，使其乘积等于双二进制脉冲的频谱，并且 $G_R(f)$是 $G_T(f)$的匹配滤波器。

为了满足频域的指标，有

$$|G_T(f)|\,|G_R(f)|=\begin{cases}\frac{1}{W}\cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right), & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases}$$

因此

$$|G_T(f)|=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{W}\cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right)}, & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases}$$

采用与上机习题10.3相同的方法，可以得到发送滤波器与接收滤波器的线性相位FIR实现的冲激响应。所以，由$W=1/2T$及$F_s=4/T$可得

$$g_T(n)=\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\left|G_T\left(\frac{4m}{NT}\right)\right|e^{j2\pi mn/N},$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{(N-1)}{2}$$

且 $g_R(n)=g_T(n)$

1. 求 $W=1800$ 且 $N=31$ 时的$g_T\left(n-\frac{N-1}{2}\right)$，并画出示意图。
2. 利用上机习题10.3中的(A)式求出 $G_T(f)$，并画出示意图。
3. 在同一幅图中画出$|G_T(f)|^2$ 与理想的双二进制(余弦)谱，对二者进行比较并解释其差别。

10.5 双二进制信号的预编码

编写MATLAB程序，要求实现如下功能：读取二进制数据序列$\{d_k\}$，针对双二进制脉冲传输系统生成预编码序列$\{p_k\}$，再将该序列映射为发送电平$\{a_k\}$。然后，从发送系列$\{a_k\}$和接收到的无噪声序列$\{b_k\}$中恢复出原始数据序列$\{d_k\}$。利用数据序列{100101110110}验证所编写程序。

10.6 双二进制信号检测器性能仿真

本题的目的是对采用双二进制信号脉冲的二进制PAM通信系统进行仿真，其中产生序列$\{a_n\}$的预编码和幅度转换均采用本章所述方法。则检测器的输入序列为

$$y_k=b_k+n_k=a_k+a_{k-1}+n_k,k=1,2$$

其中序列$\{n_k\}$为零均值高斯不相关序列，其方差为σ^2。

对10000个比特进行仿真，并测量$\sigma^2=0.1$，$\sigma^2=0.5$以及$\sigma^2=1$时的比特差错概率。画出零ISI的二进制PAM的理论差错概率，比较仿真结果与理想性能。应该可以发现双二进制系统性能的某种降质。当$\sigma^2=0.1$，$\sigma^2=0.5$以及$\sigma^2=1$时性能下降近似值为多少？

10.7 迫零均衡器

本题目的是为信道失真脉冲$x(t)$设计一个迫零均衡器，该均衡器输入端的脉冲$x(t)$可以表示为

$$x(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{2t}{T}\right)^2}$$

其中$1/T$为符号速率。脉冲抽样速率为$2/T$，即均衡器的输入速率。

如本章所述，迫零均衡器必须满足

$$q(mT)=\sum_{n=-K}^{K}c_n x\left(mT-\frac{nT}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm K\end{cases}$$

其中$2K+1$为均衡器的抽头数量，$\{c_n\}$为均衡器系数。

编写程序，计算任意K值的均衡器系数。计算$K=2$，4，6时的均衡器系数。对于脉冲$x(t)$，画出均衡器的输入序列及$K=2$，4，6时均衡器的输出样本。比较均衡器输出端的残留ISI，说明K的不同取值下均衡器的性能。

10.8 MSE均衡器

本题目的是设计一个基于均方误差准则的均衡器。设信道失真脉冲为

$$x(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{2t}{T}\right)^2}$$

其中$1/T$为符号速率。脉冲抽样速率为$2/T$，即均衡器的输入速率。信息符号是均值为零、方差为单位 1 的非相关序列，即

$$E(a_n)=0;$$
$$E(|a_n|^2)=1;$$
$$E(a_n a_m)=0,\quad n\neq m$$

均衡器输入端的加性噪声样本为零均值非相关高斯序列，方差为$\sigma^2=0.01$和$\sigma^2=0.1$。

编写程序计算$2K+1$个抽头的均衡器系数。计算$K=2$，4，6 时的均衡器系数。对于脉冲$x(t)$，画出均衡器的输入序列及$K=2$，4，6 时均衡器的输出样本。比较均衡器输出端的残留 ISI，说明K的不同取值下均衡器的性能。

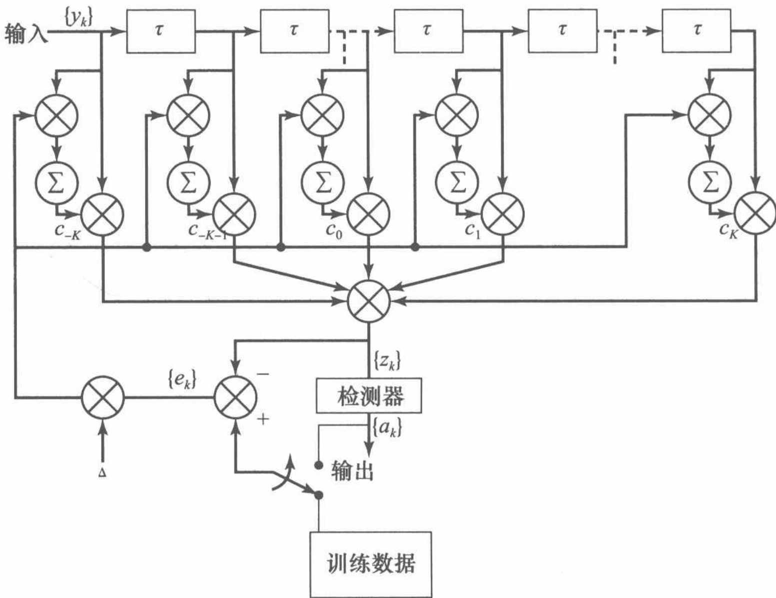
10.9 自适应均衡器

本题目的是实现一个基于 LMS 算法的自适应均衡器。信道建模为一个 FIR 滤波器，其符号间隔的系数值为

$$x=[0.05,-0.063,0.088,-0.126,-0.25,0.9047,0.25,0.126,0.038,0.088]$$

MSE 均衡器也是一个符号间隔抽头系数的 FIR 滤波器。首先发送训练符号对均衡器进行训练。在数据传输方式下，均衡器采用检测器的输出产生 LMS 算法所需的误差信号，该系统的方框图如上机习题 10.9 图所示。

编写程序，实现上机习题 10.9 图所示系统的仿真。将 1000 个(二进制)训练符号和 10000 个二进制数据符号作用于前面给出的 FIR 信道模型，设零均值加性高斯噪声序列的方差为$\sigma^2=0.01$、$\sigma^2=0.1$和$\sigma^2=1$。将测得的差错率与零 ISI 的理想信道差错率进行比较。



上机习题 10.9 图 基于 MSE 准则的线性自适应均衡器

614 ~ 620

第11章 多载波调制与 OFDM

10.5 节主要讨论了非理想信道中的数字传输，当符号速率的倒数明显小于非理想信道的时间弥散(即脉冲响应的持续时间)时，这类信道会导致符号间干扰。这种情况下，接收端使用信道均衡器补偿信道失真。若信道是具有特定带宽的带通信道，则可以在基带部分产生信息信号，然后将频率变换到信道的通带。这样，携带信息的信号就加载到单载波上传输。并且发现，即使在接收端使用了最佳检测器来恢复信息码元，符号间干扰通常仍会导致一定的性能恶化。

11.1 正交频分复用

在有信道失真的情况下可以采用另一种方法设计有效利用带宽的通信系统。将可用带宽进一步细分为带宽相等的子信道，每个子信道的带宽都足够窄以使其频率响应特性接近理想特性。带宽划分如图 11-1 所示。这样可以产生 $K=W/\Delta f$ 个子信道。不同的信息符号可以同时在 K 个子信道上传输。这样，可以采用频分复用(FDM)实现数据传输。

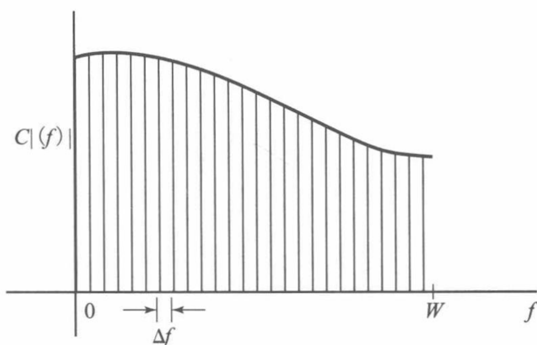


图 11-1 信道带宽 W 划分为多个带宽均等于 Δf 的窄带子信道

将每个子信道对应一个载波

$$x_k(t) = \cos 2\pi f_k t, k = 0,1,\cdots,K-1 \tag{11.1.1}$$

其中 f_k 是第 k 个子信道的中间频率。选择各子信道的符号速率1/T，使其等于相邻载波频率间隔 Δf，这样，在整个符号间隔 T 内，子载波相互正交，且与子载波之间的相对相位无关。

$$\int_0^T \cos(2\pi f_k t + \phi_k)\cos(2\pi f_j t + \phi_j)\mathrm{d}t = 0 \tag{11.1.2}$$

其中 $f_k - f_j = n/T$，$n=1, 2, \cdots$，与相位值 ϕ_k 和 ϕ_j 无关。这样，就形成了正交频分复用(OFDM)。

多载波调制 OFDM 已用于有线和无线信道中。比如，OFDM 用于数字用户环路(DSL)调制解调器中，这种调制解调器为家庭和商用用户提供高速互联网接入。OFDM 也用在无线局域网中，为家庭和商业用户提供互联网无线接入。

11.2 OFDM 系统中的调制与解调

在有 K 个子信道的 OFDM 系统中，子载波频率为 $\cos 2\pi f_k t$，$0\leqslant k\leqslant K-1$，其中相邻子载波频率间隔为 $\Delta f=1/T$，即 $f_{k+1}-f_k=\Delta f=1/T$，T 为符号间隔。与使用了全部带宽 W 且传输速率相同的单载波系统相比，OFDM 系统的符号速率1/T降低了 K 倍。因此，OFDM 系统的符号间隔为 $T=KT_s$，其中 T_s 是单载波系统的符号间隔。只要选择足够大的 K 值，符号间隔 T 就会显著大于信道时间弥散。这样，选择适当的 K 值，就可以使符号间的干扰达到任意小值。换言之，每个信道就表现出固定的频率响应 $C(f_k)$，其

中$k=0, 1, \cdots, K-1$。

622　假设每个子载波采用M进制 QAM 调制。第k条子载波上的信号可以表示为

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}A_{kc}\cos 2\pi f_k t - \sqrt{\frac{2}{T}}A_{ks}\sin 2\pi f_k t \\ &= \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{T}}A_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{T}}X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k t}\right] \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

其中$g_T(t)=\sqrt{2/T}$，$0\leqslant t\leqslant T$，$X_k=A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k}$是 QAM 信号星座图中第$k$个子载波上传输的信号点，且$A_k=\sqrt{A_{kc}^2+A_{ks}^2}$，$\theta_k=\tan^{-1}(A_{ks}/A_{kc})$。每个符号的能量$\mathscr{E}_s$已经包含在$\{X_k\}$中。

例 11.2.1 在$M=8$的 QAM 信号星座图中选择信号点$X_k=3+j1$，采用频率$f_6=6/T$传输，其中$T=50$秒为符号间隔。采用式(11.2.1)，计算并画出波形$u_6(t)$。

解： 图 11-2 给出了$u_6(t)$的波形。◀

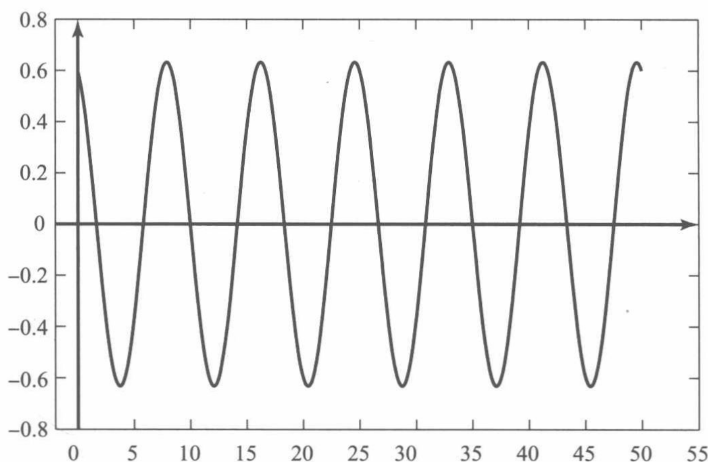


图 11-2　例 11.2.1 中$u_6(t)$的波形图

如果子信道数很大，那么子信道就足够窄，每个子信道可以描述为固定的频率响应$C(f_k)$，$k=0, 1, \cdots, K-1$。一般来说，$C(f_k)$是复数值，可以表示为

623

$$C(f_k) = C_k = |C_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_k} \tag{11.2.2}$$

因此，第k个子信道中的接收信号为

$$\begin{aligned} r_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}|C_k|A_{kc}\cos(2\pi f_k t+\phi_k) - \sqrt{\frac{2}{T}}|C_k|A_{ks}\sin(2\pi f_k t+\phi_k) + n_k(t) \\ &= \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{T}}C_k X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k t}\right] + n_k(t) \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

其中$n_k(t)$表示第k个子信道的加性噪声。假设$n_k(t)$是零均值高斯噪声，在第k个子信道频带内频谱是平坦的。并且假设在接收端信道参数$|C_k|$和ϕ_k是已知的。(通常通过在初始时刻传输未经调制的载波$\cos 2\pi f_k t$及观测接收信号$|C_k|\cos(2\pi f_k t+\phi_k)$来估计这些参数。)

例 11.2.2 考虑例 11.2.1 中产生的信号，假设频率在f_6时的信道增益和相移为

$$C(f_6) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$$

或者$|C(f_6)|=1/2$且$\phi_6=\pi/2$。计算并画出无噪声的情况下接收信号$r_6(t)$。

解： $r_6(t)$的波形图如图 11-3 所示。◀

根据接收端的载波相位$\{\phi_k\}$，求出接收信号$r_k(t)$和两个基函数的互相关，就可以解调第k个子信道中的接收信号

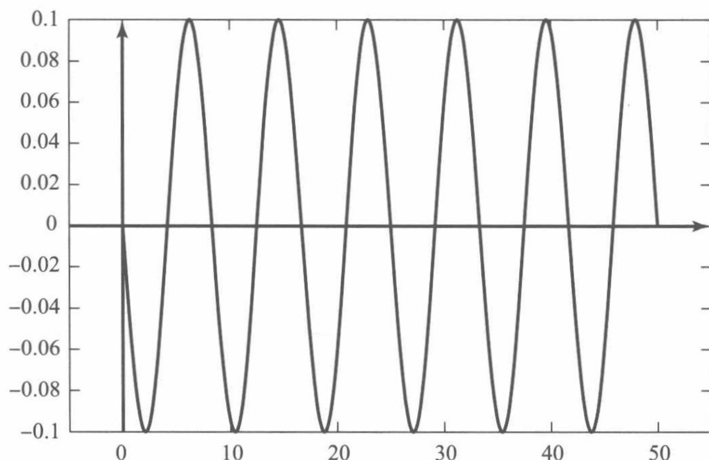


图 11-3　例 11.2.2 中 $r_6(t)$ 的波形图

624

$$\Psi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_k t+\phi_k),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$
$$\Psi_2(t)=-\sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_k t+\phi_k),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{11.2.4}$$

并在 $t=T$ 时，对互相关器的输出进行采样。这样可以得到接收信号矢量

$$y_k=(|C_k|A_{kc}+\eta_{kr},|C_k|A_{ks}+\eta_{ki}) \tag{11.2.5}$$

上式可以用复数表示为

$$Y_k=|C_k|X_k+\eta_k \tag{11.2.6}$$

其中 $\eta_k=\eta_{kr}+\mathrm{j}\eta_{ki}$ 表示加性噪声。

信道增益 $|C_k|$ 对传输符号的尺度变换作用可以通过将接收信号矢量除以信道增益 $|C_k|$ 予以消除，那么则有

$$Y'_k=Y_k/|C_k|=X_k+\eta'_k \tag{11.2.7}$$

其中 $\eta'_k=\eta_k/|C_k|$。归一化变量 Y'_k 送至检测器，在此计算 Y'_k 与 QAM 信号星座图中每个信号点的距离，并选择具有最小距离的信号点。

由上文可知，显然需要两个互相关器或两个匹配滤波器来解调每个子信道的接收信号。因此，如果 OFDM 信号包含了 K 个子信道，实现 OFDM 的解调器就需要一组并行的 $2K$ 个互相关器或 $2K$ 个匹配滤波器。而且产生 OFDM 信号的调制过程也可以看成以 M 进制 QAM 信号星座图的符号，激励一组 $2K$ 个并行滤波器而得。

发射端的这组 $2K$ 个并行滤波器，能够产生已调信号并解调接收信号，其作用等效于计算离散傅里叶变换(DFT)和逆变换。由于 DFT 的高效算法是快速傅里叶变换(FFT)，当 K 较大时，如 $K>20$，采用 FFT 算法实现调制和解调过程效率更高。下一节将介绍 OFDM 系统中调制器和解调器的实现，其中 DFT 计算采用 FFT 算法实现。

由于 OFDM 系统 K 个子信道中的信号传输是同步的，因此在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 内，任何一对子信道接收到的信号相互正交。如果子信道增益 $|C_k|$，$0\leqslant k\leqslant K-1$，在信道带宽内明显不同，那么由于衰减低而获得较高 SNR 的子信道比 SNR 低(衰减高)的子载波，其每个符号可以被调制携带更多的比特。因此，具有不同大小星座图的 QAM 可以用于 OFDM 系统不同的子信道中。实际应用中，例如 DSL 调制解调器，通常就将不同大小的星座图分配给不同的子信道。

625

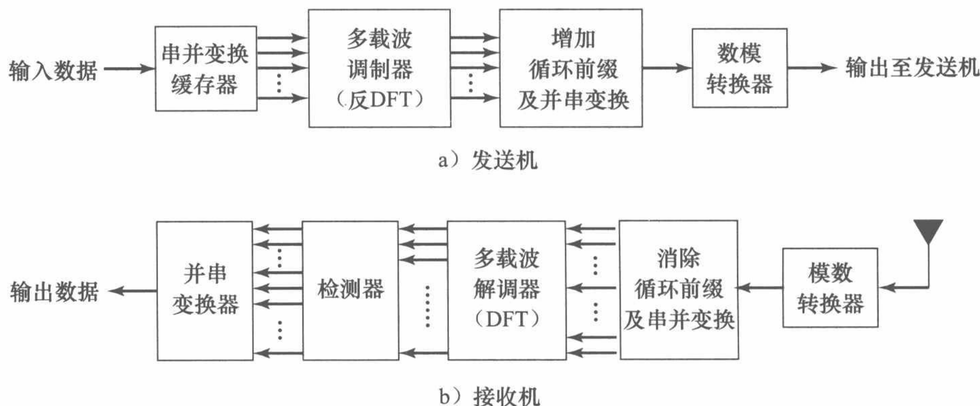
11.3　采用 FFT 算法实现 OFDM 系统

本节将讨论在每个子载波上采用 QAM 进行数据传输的 OFDM 系统，其中调制器和

解调器部分采用 FFT 算法实现。

图 11-4 为 OFDM 系统的基本框图。串/并转换缓存器将信息序列分解成长度为 B_f 比特的帧。每一帧中的 B_f 比特被分成 K 个分组，其中第 i 个分组分配了 b_i 个比特，因此有

$$\sum_{t=0}^{K-1} b_i = B_f \tag{11.3.1}$$



a）发送机

b）接收机

图 11-4　多载波 OFDM 数字通信系统的框图

将多载波调制器看成由 K 个独立的 QAM 子信道组成，每一个子信道的码元速率为 $1/T$，并且每一个子信道中的信号具有各自不同的 QAM 星座图。因此第 i 个子信道的信号点数是 $M_i=2^{b_i}$。将 K 个子信道上对应的信息信号的复值信号点表示为 X_k，$k=0,1,\cdots,K-1$。这些信息符号$\{X_k\}$表示多载波 OFDM 信号 $x(t)$的离散傅里叶变换(DFT)值，其中每个子载波均采用 QAM 调制方式。由于 $x(t)$是实值信号，其 N 点 DFT$\{X_k\}$一定满足对称性 $X_{N-k}=X_k^*$。因此，根据如下定义可从 K 个信息码元中生成 $N=2K$ 个码元

$$X_{N-k} = X_k^*,\quad k=0,1,\cdots,K-1 \tag{11.3.2}$$

$$X'_0 = \mathrm{Re}[X_0] \tag{11.3.3}$$

$$X_K = \mathrm{Im}[X_0] \tag{11.3.4}$$

注意信息符号 X_0 分解成两部分，两者均为实数。如果用$[X'_0,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1]$表示新的码元序列，则 N 点的逆 DFT(IDFT)产生以下实值序列

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} X'_k e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{\sqrt{N}}\{\mathrm{Re}[X_0]+(-1)^n\mathrm{Im}[X_0] + 2\sum_{k=1}^{K-1}|X_k|\cos(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k)\},n=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.3.5}$$

其中信息符号 $X_k=|X_k|e^{j\theta_k}$。

序列$\{x_n,\ 0\leqslant n\leqslant N-1\}$对应由 K 个子载波构成的多载波 OFDM 信号 $x(t)$的样值，子载波频率 $f_k=k/T$，　$k=0,1,\cdots,K-1$，T 为信号持续时间。可以看到，信息符号 X_0 对应直流分量($f_0=0$)。为了方便起见，设 $X_0=0$，则 OFDM 信号无直流分量。将信号样值$\{x_n\}$通过数模转换器，得到待发送的 OFDM 信号，可以表示为

$$x(t)=\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{K-1}|X_k|\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}+\theta_k\right),\quad 0\leqslant t<T \tag{11.3.6}$$

例 11.3.1 利用如图 8.54 所示的 $M=16$QAM 矩形信号星座图，从符号 X_1，X_2，X_3，X_4 中伪随机地选择每个信息符号。设 $T=100$ 秒，根据式(11.3.6)生成信号波形 $x(t)$。并且，根据式(11.3.5)，对 $0\leqslant n\leqslant 9$ 计算$\{x_n\}$的反傅里叶变换(IDFT)值，证明 $x_n=x(nT/N)=x(10n)$，$0\leqslant n\leqslant 9$。

解： 此例中，$K=5$ 且 $N=2K=10$。$x(t)$的波形图见图 11-5。IDFT 值为 $x_0=0$，$x_1=-2.1151$，$x_2=$

-0.7265，$x_3=-8.0403$，$x_4=-3.0777$，$x_5=8$，$x_6=3.0777$，$x_7=-0.4318$，$x_8=0.7265$ 和 $x_9=2.5872$。容易验证 $x(nT/N)=x_n$。◀

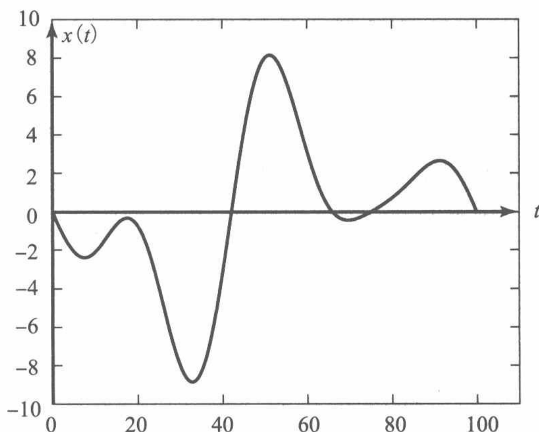


图 11-5　例 11.3.1 中的 $x(t)$ 波形图

将 $x(t)$ 作为信道的输入，接收端的信道输出波形为

$$r(t)=x(t)*c(t)+n(t) \quad (11.3.7)$$

其中 $c(t)$ 为信道冲激响应，$*$ 表示卷积。每个子信道带宽 Δf 相对于总带宽 $W=K\Delta f$ 通常很小，则符号持续时间 $T=1/\Delta f$ 相比信道冲激响应持续时间很大。具体地讲，假设信道的冲激响应覆盖了 $m+1$ 个信号样值，其中 $m\ll N$。一种可以完全避免符号间干扰(ISI)影响的简单方法是，在连续传输的数据块之间插入保护时间 mT/N，以保证在下一个含有 K 个符号的数据块发送之前，信道响应已经消失。

避免 ISI 的另一种方法是，对每个含有 N 个信号样值 $\{x_n,\ 0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 的数据块添加一个循环前缀，该循环前缀由样值 x_{N-m}，x_{N-m+1}，…，x_{N-1} 组成。这些样值添加到每一个数据块的起始位置，使数据块长度增加到 $N+m$ 个样值，其编号可以是 $n=-m$ 到 $n=N-1$，其中，前 m 个样值构成循环前缀。如果信道冲激响应样值为 $\{c_n,\ 0\leqslant n\leqslant m\}$，则 $\{c_n\}$ 与 $\{x_n,\ -m\leqslant n\leqslant N-1\}$ 的卷积产生接收信号 $\{r_n\}$。由于任何一对连续传输的数据块之间的 ISI 会影响前 m 个样值，那么舍弃 $\{r_n\}$ 的前 m 个样值，就可以根据接收信号样值 $\{r_n,\ 0\leqslant n\leqslant N-1\}$ 解调信号。　627

例 11.3.2　考虑例 11.3.1 中产生的信号，假设信道冲激响应 $c(t)$ 作用的时间范围是 $0\leqslant t\leqslant 15$ 秒。求可以添加到 IDFT 序列 $\{x_n\}$ 的循环前缀。

解：对于 $T=100$ 秒，信道作用时间范围小于两个 IDFT 样值的持续时间，因此选择 $m=2$，循环前缀由样值 $\{x_{N-2},\ x_{N-1}\}=\{x_8,\ x_9\}$ 构成。◀

如果分析信道的频域特性，则在子载波频率 $f_k=k/T$ 处信道频率响应是

$$C_k=C\left(\frac{2\pi k}{N}\right)=\sum_{n=0}^{m}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/N},\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.3.8}$$

由于使用了循环前缀或时间保护带消除了 ISI，因此解调码元序列可以表示为

$$\hat{X}_k=C_kX'_k+\eta_k,\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11.3.9}$$

其中 $\{\hat{X}_k\}$ 是由解调器计算的 N 点 DFT 的输出，η_k 是干扰信号的加性噪声。　628

如图 11-4 所示，接收信号通过 A/D 转换器之后，再经过 DFT 计算，实现接收信号解调。与 OFDM 调制器中的情况一样，解调端 DFT 的计算可以采用效率更高的 FFT 算法实现。

为了从 DFT 值中恢复信息符号，需要估计和补偿信道因子 $\{C_k\}$。初始时刻在每个子载波上发送一个已知的调制序列，或者直接发送未调制的子载波，可以完成信道估计。如果信道参数随时间缓慢变化，则通过采用定向判决方式的检测器的输出判决，来跟踪该时间的变化。因此多载波 OFDM 系统可以设计成自适应的。通过合理分配平均发送功率和每个子载波传送的比特数，可以使每个子载波的传输速率达到最优。每个子信道的 SNR 定义为

$$\mathrm{SNR}_k=\frac{TP_k|C_k|^2}{\sigma_{nk}^2} \tag{11.3.10}$$

其中 T 是符号持续时间，P_k 是分配给第 k 个子信道的平均发送功率，$|C_k|^2$ 是第 k 个子信道频响的平方值，σ_{nk}^2 是对应的噪声方差。与 SNR 低的子信道相比，在 SNR 高的子信道

中，可采用更大的QAM星座图以达到更高的比特/符号发送效率。这样可以优化每个子信道上的比特速率，使子信道中的误码率性能达到均衡，从而满足理想的性能指标。

每个子载波采用QAM调制的多载波OFDM已经在多种场合得到应用，包括电话线路上的高速传输，如数字用户线路(DSL)。这类多载波OFDM调制也称为离散多音(DMT)调制。在欧洲以及其他地区，多载波OFDM也用于数字音频广播和无线LAN中。

11.4 OFDM信号的频谱特性

OFDM系统子载波上传送的信号在时域是相互正交的，即

$$\int_0^T u_k(t)u_j(t)\mathrm{d}t = 0 \quad k \neq j \tag{11.4.1}$$

其中 $u_k(t)$ 如式(11.2.1)定义，这些信号在频域具有明显的交叠。对于 k 的若干取值计算信号的傅里叶变换

629

$$u_k(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{T}}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_k t}\right] = \sqrt{\frac{2}{T}}A_k\cos(2\pi f_k t + \theta_k), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{11.4.2}$$

就可以观察到这一点。图11-6中给出了三个相邻子载波的幅度谱 $|U_k(f)|$。可以看到主瓣内频谱交叠明显，而且第一个旁瓣只比主瓣低13dB。因此，不同子载波上传输的信号存在大量频谱交叠。但是这些信号在时间上同步而且相互正交。

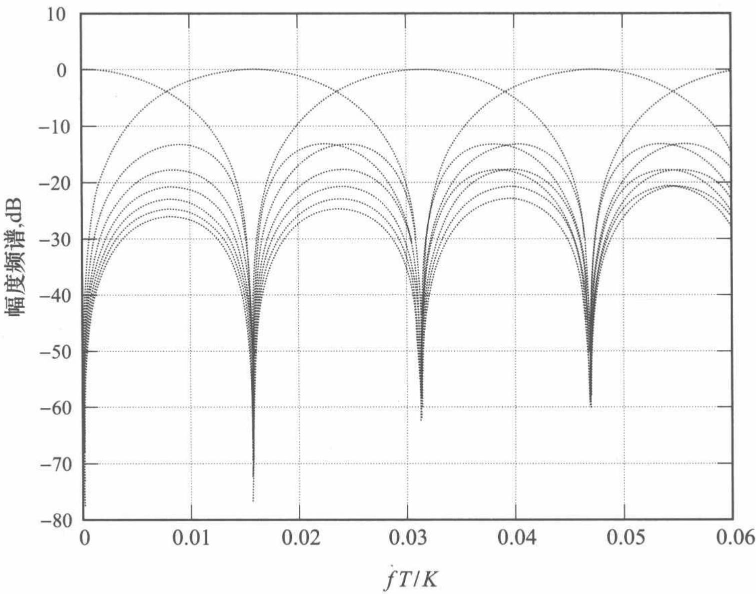


图11-6 OFDM系统相邻子信道滤波器的幅度频率响应特性示例，其 $f\in\left(0,\ 0.06\dfrac{K}{T}\right)$ 且 $K=64$

(引自Cherubini等人(2002)IEEE的论文)

当通信信道是衰落信道时，OFDM信号明显的频谱交叠具有各种不同的影响。在第14章中将看到时变多径传播引起的信号衰落将导致传输信号的多普勒扩展。OFDM信号中，信号分量的多径传播会破坏子载波的正交性，再加上多普勒扩展，将形成子信道间干扰(ICI)。这种ICI会导致OFDM系统性能的显著恶化(错误概率增大)。因此无线通信中接收端高速移动时，OFDM还不如单载波系统健壮。相反，当接收端移动速度很低时，例如步行速度，OFDM系统中的ICI就不是严重问题。例如，采用较大QAM星座图($M=64$)的OFDM信号的无线局域网中，就是这样的情况。

当终端高速移动引起的多普勒扩展现象存在时，可以采用另一种比OFDM健壮性高

的多载波调制方法，该方法被称为滤波多音调制(FMT)。FMT 信号也是通过一组并行的滤波器产生并调制的。不过，FMT 中的滤波器频谱交叠很小，可以忽略不计，并且频谱衰减特性极其陡峭。图 11-7 给出了 FMT 系统的频率响应特性。可以看到，滤波器的旁瓣比主瓣至少低 70dB，并且相邻滤波器间的频谱交叠是可以忽略的。这样的滤波器特性可以很好地抵抗高速移动无线通信环境下可能出现的 ICI。FMT 的另一个优点是，在不同子载波上传送的信号不必同步。 630

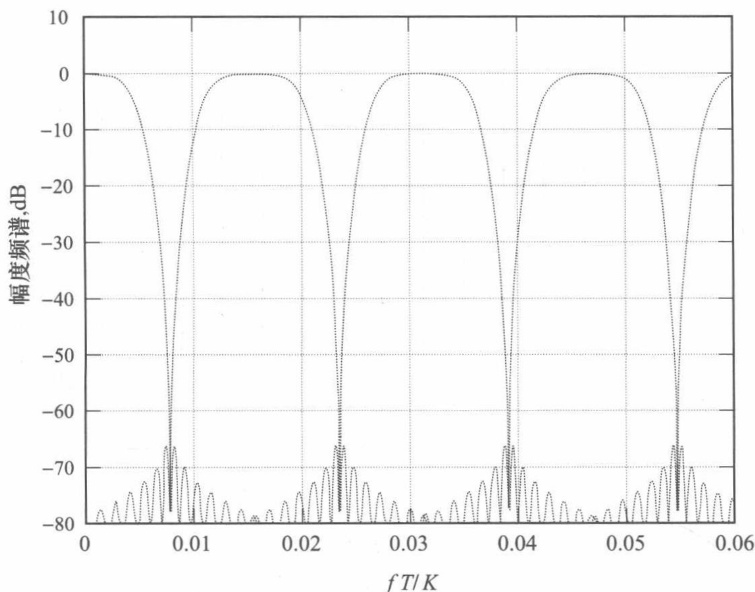


图 11-7　FMT 系统相邻子信道滤波器的幅度频率响应特性示例，其 $f\in\left(0,\ 0.06\,\dfrac{K}{T}\right)$ 且 $K=64$

(引自 Cherubini 等人(2002)IEEE 的论文)

FMT 系统对 ICI 的抵抗能力是以带宽效率为代价换取的。在介绍 FMT 系统设计的论文中，凯鲁比尼等人(Cherubiniet al. 2000, 2002)指出，与常规 OFDM 系统相比，FMT 系统的带宽增幅为 10%至 20%。因此，在高速移动应用中，FMT 可以替代常规 OFDM。

11.5　OFDM 系统的峰均功率比

多载波调制，例如 OFDM 系统，通常存在的一个主要问题是，传输信号固有的高峰均功率比(PAR)。当 K 个子信道中待传信号同相相加时会出现很大的信号峰值。大信号峰值可能导致发射机的功率放大器饱和，并引起发射信号中的互调失真。减小发射信号的功率可以降低甚至避免互调失真，并且使发射机的功率放大器工作在线性范围。但是，这种减小功率或“功率回退”的做法降低了 OFDM 系统的工作效率。例如，如果 PAR 是 10dB，要避免互调失真，需要 10dB 的功率回退。 631

例 11.5.1 考虑 OFDM 信号样值

$$x(t)=\sum_{k=1}^{K-1}\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}+\theta_k\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

其中 $K=32$，$T=1$ 秒，且抽样频率 $F_s=200$ 个符号每秒，且每个子载波都采用四相 PSK 调制，即 θ_k 从可能取值 0，$\pi/2$，π，$3\pi/2$中伪随机地选择一个。对于 $x(t)$的每个实现，求 PAR。对 $x(t)$的 20 个不同实现，重复计算 PAR，并画图表示这些实现的 PAR 值。

解：OFDM 信号的平均功率

$$P_{\text{av}}=\frac{1}{200}\sum_{n=0}^{199}x_n^2$$

及峰值功率

$$P_{\text{peak}} = \max_n \{x_n^2\}$$

则峰均功率比 PAR=$P_{\text{peak}}/P_{\text{av}}$。PAR 如图 11-8 所示。 ◀

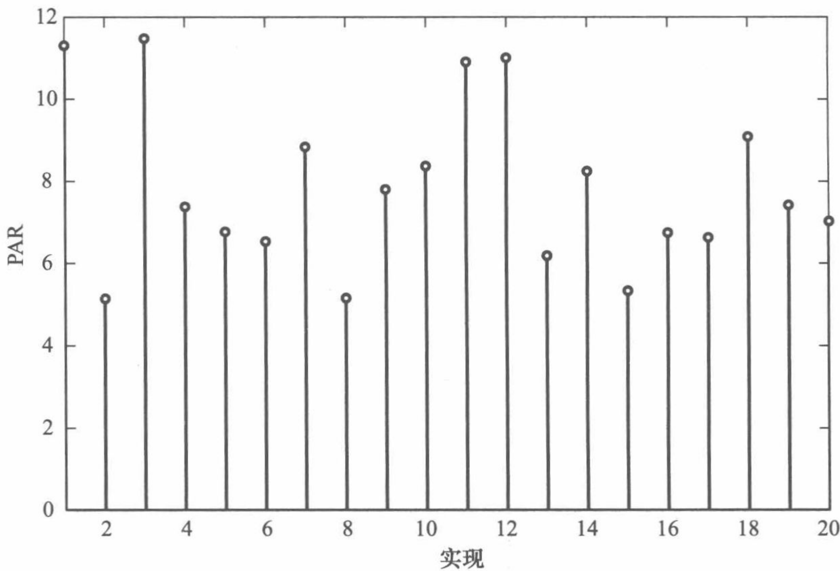


图 11-8 例 11.5.1 中的 PAR 值

632

减小多载波系统中的 PAR 的方法很多。其中最简单的方法是在不同的子载波中插入不同的相移。为了减小 PAR，相移量可以伪随机地选取，或按某种算法产生。例如，当已调子载波的 PAR 很大时，可以使用已经存储好的一小组伪随机相移值。关于在信号间隔中使用哪组伪随机相移值的信息，可以通过 K 个子载波中的一个传送给接收机。另外，也可以采用一组单一的伪随机相移值(这组相移是经计算机仿真找到的)，在 K 个子载波待传输的数据码元集合中，可将 PAR 减小到可接受的水平。

减小 PAR 的另一种方法是，调制具有空符号的子载波的小集合用于降低 PAR。空符号不必按照特定的信号星座图选择幅度和相位值，因此这种设计非常灵活。承载空符号的子载波可以分布在频带内。由于这种方法会降低数据的信息吞吐量，因此只能采用所有子载波中很少的一部分进行空符号调制。

此外，通过在 D/A 转化器进行信号削波，可将 PAR 保持在一定的限度下。在发射机进行信号削波一般会引起信号失真，因此，也会导致接收机的性能降质。

由于 PAR 问题在实际应用中很重要，因此减小多载波通信系统中 PAR 的问题得到了广泛研究，还有一些其他的方法。有兴趣的读者可以参见 11.7 节中的参考文献。

11.6 OFDM 系统的应用

OFDM 广泛用于多种数字通信系统，包括数字音频广播(DAB)、数字视频广播(DVB)、数字用户线(DSL)等电话线上的高速传输和无线局域网(WLAN)。本节简要介绍其中三种应用。

11.6.1 数字用户线

作为 OFDM 的第一种应用，数字用户线技术在电话用户住地与电话中心局之间的电话线上提供高速数字传输。这些有线信道通常由非屏蔽双绞线构成，称为**用户本地环路**。在电话用户环路上提供家用或商用的高速互联网接入服务的想法，促进了以 QAM 作为子载波基本调制方法的 OFDM 数字传输标准的发展。

双绞线用户环路的可用带宽受到用户与中心电话局间距离即线缆长度的限制，也受到同一线缆内其他线对的串话干扰。例如，一条 3km 长的双绞线可用带宽约为 1.2MHz。由于通常从中心局到用户(下行链路)的方向需要高速数字传输，而总带宽相对较小，因此将大部分带宽分配给下行链路。这样，用户环路上的数字传输就是非对称的，这种传输模式被称为非对称数字用户环路(ADSL)。

633

在 ADSL 标准中，对于长度约为 12，000 英尺的用户线，下行链路和上行链路的最大数据速率分别定为 6.8Mbps 和 640kbps，对于长度约为 18，000 英尺的用户线，两个速率分别为 1.544Mbps 和 176kbps。其中需要保留低频部分(0～25kHz)进行标称带宽 4kHz 的电话语音传输。利用截止频率为 25kHz 两个滤波器(低通和高通)，可将用户线的频段分为两部分，因此数字传输的低端频率为 25kHz。ADSL 标准规定 25kHz 到 1.1MHz 须分为 256 个并行的 OFDM 子信道。因此，如图 11-4 所示的 OFDM 系统实现中，DFT 和 IDFT 均取 $N=512$。给定抽样频率 $F_s=2.208\text{MHz}$，信号频谱上限为 $F_s/2=1.104\text{MHz}$。相邻子载波之间的频率间隔为 $\Delta f=1.104\times10^6/256=4.3125\text{kHz}$。信道的时间偏移受到 $N/16=32$ 个样本的循环前缀的抑制。

通过在接收端测量每个子信道的信噪比(SNR)，并经上行链路将该信息传送给发射机，发射机就可以选定以比特/信元为单位的 QAM 星座图的大小，使每个子信道获得期望的错误概率。对应于 QPSK 调制，ADSL 标准规定了最小比特负载为每个子信道 2 比特。如果子信道不能支持 QPSK 的期望错误概率，就不在该子信道中传输信息。图 11-9 给出了接收机为每个子信道测量的接收 SNR 及从 QAM 信号星座图中选出的比特/信元的数量。注意在子信道 220～256 中 SNR 过低不支持 QPSK 调制，则这些子信道中无数据传输。基于 ADSL 标准的 ADSL 信道特性和 OFDM 调制解调器的设计，详见 Bingham (2000)和 Star 等人(1999)的著作。对每个子载波采用可变大小 QAM 信号星座图的 OFDM 通常称为离散多音(DMT)调制。

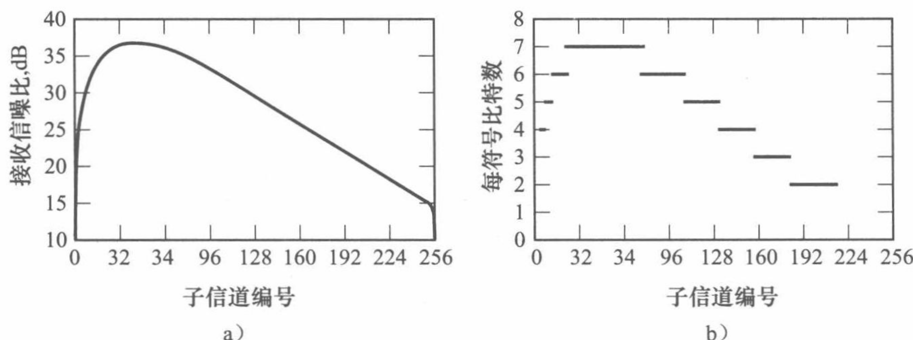


图 11-9　OFDM 子信道中 DSL 频率响应与比特分配示例

634

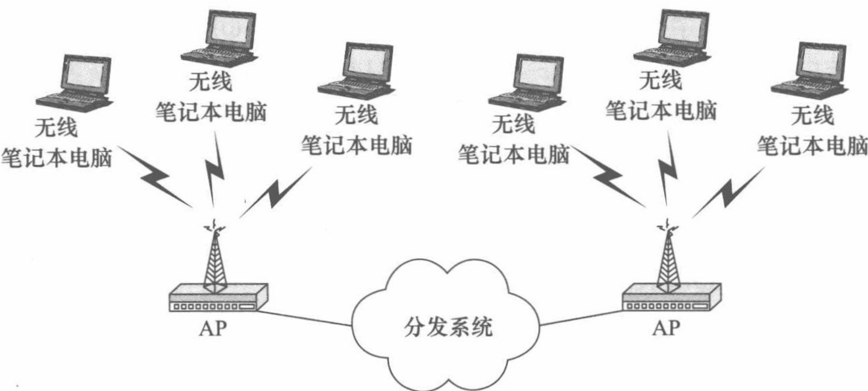
11.6.2　无线局域网

在过去的几年中，IEEE(电气电子工程师协会)的一些工作组和其他一些国际标准化组织开发了无线局域网(WLAN)标准。这些标准使得无线接入互联网成为可能。本节主要介绍基于 OFDM 的 IEEE802.11a 标准。图 11-10 中给出了其典型配置，其中接入点(AP)终端与几个用户(笔记本电脑)通信。

美国联邦通信委员会(FCC)将 5.2GHz 频段的 300MHz 分配给基于 802.11a 标准的 WLAN 服务。20MHz 的标称带宽被分成 52 个子信道，子载波频率间隔为 312.5kHz。OFDM 符号持续时间为 48 秒，循环前缀(保护间隔)长度为 0.8 微秒。采用 48 个子信道，经 BPSK、QPSK、16-QAM 或 64-QAM 承载数据，可以得到 12～72Mbps 的(非编码)数

据速率。信道编码通常用来纠正传输错误，详见第13章，802.11a可以获得的数据速率分别为6Mbps、9Mbps、12Mbps、18Mbps、24Mbps、36Mbps、48Mbps和54Mbps。在余下的4个子信道中传送导频，以测量并纠正由于终端移动导致的接收信号中出现的频率偏移。

采用802.11a的多接入方案称为冲突预防载波侦听多接入方式(CSMA/CA)。简言之，在开始传送之前，终端先侦听信道是否可用于信号传输。如果没有信号高于设定的门限值，终端就发送信号数据分组。接收方成功接收后，返回应答信息。在收到返回的应答后，用户要等待一定的随机选定的时间间隔，再发送另一个数据分组。此标准工作在5.2GHz频段上。相关的IEEE802.11g标准工作在2.4GHz频段上，该标准采用QAM调制的OFDM。



635

图 11-10 无线局域网配置

11.6.3 数字音频广播

数字音频广播(DAB)系统可以是基于地面、卫星或二者结合的系统。这些系统最终将取代当前正在使用的模拟AM和FM广播系统。许多国家的标准化组织已经为DAB建立了标准。本书主要讨论由ITU(国际电信联盟)和ETSI(欧洲电信标准学会)建立的欧洲Eureka-147标准。

Eureka-147DAB标准采用在4种不同的工作模式，每种模式适应特定的频带和相应的应用领域。所有模式都采用OFDM。每个子信道中采用的调制方式都是差分QPSK。例如，模式1用于VHF频段地面广播。此模式有1536个子载波，子信道间隔1kHz，每个子载波上的码元持续时间为1ms，帧持续时间为96ms。循环前缀的持续时间为246μs。另一种模式是为卫星传输设计的，频带最高达到3GHz。这种模式有192个子信道，相邻子信道间隔8kHz。码元持续时间为125μs，帧持续时间是24ms，循环前缀的持续时间为31μs。

为了节约带宽，Eureka-147DAB中采用了MPEG音频压缩，可以获得与CD音质相媲美的音频质量。

有关数字音频广播的更多信息，参见Hoeg与Lauterback(2001)及Layer (2001)的相关文章。

11.7 小结及深入阅读

本章主要讨论了利用多载波调制和正交频分复用(OFDM)进行数字信号传输的问题。在多载波调制中，将带宽W分为多个带宽相等的子信道，并确保每个子信道的带宽足够窄，以使子信道频带中的频率响应具有恒定的幅度和相位。因此可以建立K个子信道，

将 K 个信息符号分别调制到对应 K 个子信道频率的载波上同时传输。选择每个子信道的符号速率$1/T$，使其等于相邻子载波的频率间隔，则 K 个子信道上传输的信号在符号间隔 T 中相互正交。这样即可形成 OFDM 信号。

由于 K 个子信道上的信号具有正交性，发送端形成的离散时间信号就是 K 个已调载波的反离散傅里叶变换(IDFT)。因此，发送端计算 IDFT 可以用(反)快速傅里叶变换(FFT)算法有效实现。(反)FFT 后的离散时间已调信号样值送入 D/A 转换器，产生连续时间信号，在信道上传输。接收端接收到的信号送入 A/D 转换器，A/D 转换器输出的信号样值送入解调器。由于信号样值是已调载波的 IDFT，解调器计算样值的 DFT 就可以恢复出 K 个子载波上携带的信号。而且，DFT 可以利用 FFT 算法有效计算。若要补偿每个子信道对信息符号的影响，就要测量每个子载波的信道幅度和相位偏移。可以通过在 OFDM 信号中嵌入导频来实现这种测量。例如，将少量的 OFDM 子信道分配为导频子载波。

636

本章还介绍了调制器和解调器进行 FFT 实现时，插入循环前缀的用法。循环前缀能够在连续的 OFDM 数据块之间避免 ISI。发送端插入的循环前缀样值，在送入 FFT 解调器之前被丢弃。这样就可以消除信道所导致的信号时间扩散。

从 OFDM 信号的频谱特征来看，子载波之间有较显著的频谱交叠。不过，在时间间隔 T 中，子载波信号是相互正交的。

本章特别指出 OFDM 信号传输的一个缺点是峰均功率比(PAR)比较高，会引起发送功率放大器饱和并且导致失真，这种情况通常称为互调失真。接着讨论了几种限制 OFDM 信号中 PAR 值的方法。

最后一节描述了三种利用 OFDM 进行信号传输的应用，包括(a)数字用户线，用于为电话网络用户提供互联网服务；(b)无线局域网，为移动用户提供互联网接入的 WiFi 技术；(c)数字音频广播系统，用于替代现有的模拟 AM 和 FM 广播系统。

关于多载波数字通信系统的文献很多。Doeltz 等人(1957)描述了一种称为 Kineplex 的最早的系统，用于在高频无线频段上实现数字传输。其他早期的多载波系统设计工作参见 Chang(1966)和 Saltzberg(1967)的论文。在多载波 OFDM 系统的调制器和解调器中运用 DFT 的思想是由韦恩斯坦和艾伯特(Weinstein and Ebert 1971)提出的。近期关于 OFDM 在实际系统中应用的文献包括 Chow 等人(1995)及 Bingham(1990)的工作。Bahai 与 Saltzberg(1999)的著作也对 OFDM 进行了全面深入的阐述。

降低多载波系统中 PAR 的问题也得到很多研究者的关注。读者可以参考 Boyd (1986)、Popovic(1991)、Jones 等人(1994)、Wikinson 与 Jones(1995)、Tellado 与 Cioffi (1998)及 Tafokh 与 Jafakhani(2000)的论文。

637

习题

11.1　证明式(11.3.5)给出的序列$\{x_n，0\leqslant n\leqslant N-1\}$对应于式(11.3.6)定义的 $x(t)$的抽样值。并且证明式(11.3.6)定义的 $x(t)$是实值信号。

11.2　将序列$\{X_k，0\leqslant k\leqslant N-1\}$送入 N 个并行的线性离散时间滤波器，这些滤波器的系统函数为

$$H_n(z)=\frac{1}{1-e^{j2\pi n/N}z^{-1}},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

证明滤波器输出在 $n=N$ 时的抽样值即为序列$\{X_k\}$的 IDFT。

11.3　根据以下指标估计(为了避免 ISI 在多载波调制采用的)循环前缀的代价。

1. 额外的信道带宽。
2. 额外的信号能量。

11.4　设 $x[n]$为有限持续时间的信号，长度为 N，且 $X[k]$为其 N 点 DFT。假设对 $x[n]$追加 L 个零，再计算$(N+L)$点的 DFT 序列 $X'[k]$。试问 $X[0]$与 $X'[0]$有什么关系？如果在同一幅图中画出 $X[k]$与 $X'[k]$，解释说明二者的关系。

638

上机习题

11.1 子载波解调

考虑例 11.2.2 中的无噪声接收信号，执行式(11.2.4)至式(11.2.7)的解调步骤，证明解调后的符号样值为 $X_6=3+\mathrm{j}1$。

11.2 16 点 QAM 的 OFDM 信号的产生

采用图 8-54a 所示的 16 点 QAM 信号星座图，从 X_0，X_1，X_2，…，X_9 中伪随机选择各信息符号。设 $T=100$ 秒，根据式(11.3.6)求出 $t=0$，1，…，100 时的 $x(t)$的取值并画出示意图。再根据式(11.3.5)求出 $n=0$，1，…，$N-1$ 的 IDFT 值 x_n。说明在 Tn/N时刻的 $x(t)$的取值对应于 IDFT 值。最后，根据 IDFT 值$\{x_n, 0\leqslant n\leqslant N-1\}$，计算定义如下的 DFT

$$X_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

证明信息符号$\{X_k, 1\leqslant k\leqslant 9\}$可以从 $x(t)$在$\{t=Tn/N, 0\leqslant n\leqslant N-1\}$时刻的抽样值中恢复。

11.3 四相 PSK 的 OFDM 信号产生

将上机习题 11.2 中的信号星座图改为 $K=16$ 且从 4 相 PSK 星座图中伪随机选择信息符号(X_0，X_1，X_2，…，X_{15})，重新产生 OFDM 信号。采用 FFT 算法计算 DFT 和 IDFT。

11.4 OFDM 信号的 IDFT 计算

计算式(11.3.5)中的 OFDM 信号的 IDFT，其中 $K=16$ 且从 4 相 PSK 星座图中伪随机选择信息符号(X_0，X_1，X_2，…，X_{15})。画出 OFDM 信号的幅度谱$|X(f)|$。

11.5 循环前缀的使用

采用上机习题 11.2 中产生的 OFDM 信号，追加一个由 4 个样值构成的循环前缀，补偿信道扩散的影响。修改上机习题 11.2 的 MATLAB 脚本实现上述功能。

639~640

11.6 OFDM 信号的谱特征

计算式(11.4.2)给出信号的傅里叶变换的幅度谱$|U_k(f)|$，$f_k=k/T$，　$k=0$，1，2，3，4，5。为了简单起见，对于所有的 k 令 $A_k=1$，$\theta_k=0$。对于 $k=0$，1，2，3，4，5，$0\leqslant f\leqslant 4/T$，将$|U_k(f)|$画在同一图上比较。

11.7 QAM OFDM 信号的 PAR 计算

对于上机习题 11.2 中产生的 $M=16$QAM OFDM 信号，重复进行例 11.5.1 中的 PAR 计算。比较 QAM OFDM 信号与 PSK OFDM 信号的 PAR。

11.8 PSK OFDM 信号的 PAR 计算

对 $K=128$ 重复进行例 11.5.1 中的 PAR 计算。并且与 $K=32$ 的情况相比较。

11.9 利用削峰限制 PAR

重复例 11.5.1，并修改削减样值的峰值幅度达到 PAR$\leqslant$3dB 的目标。求出削峰后的信号$\{\hat{x}_n\}$，并计算定义如下的信号的失真

$$D=\frac{1}{200}\sum_{n=0}^{199}(x_n-\hat{x}_n)^2$$

画出 20 个信号实现的 D。

11.10 对于 PAR$\leqslant$4dB 和 PAR$\leqslant$6dB 分别重复上机习题 11.9。

11.11 利用随机相位偏移降低 PAR

生成以下 OFDM 信号的样值

$$x(t)=\sum_{k=1}^{K-1}\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}+\theta_k+\phi_k\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

其中 ϕ_k 为(0，2π)上均匀分布的随机选择的相位，其他信号参数与例 11.5.1 中的意义相同。产生 4 组均匀分布的相位样值集$\{\phi_k\}$，对于每个 $x(t)$的实现，选择能够得到最小 PAR 的相位样值集。对 $x(t)$的 20 个不同的实现，重复上述过程，画图表示 $x(t)$这 20 个实现的 PAR 结果。

11.12 对于 $K=8$ 的 4 相 PSK 传输符号，重复上机习题 11.11。

第12章 信息论概述

从第 1 章我们了解到信源、信道和信宿是组成通信系统的必要部分。同样了解到这三个组成部分还是通信系统中给定的部分，也就是说通信工程师一般不能对其进行太多的控制。发射机和接收机两个系统分别把信源和信宿连接到信道，工程师能够对这两个系统进行完全设计，因此它们在设计人员的完全控制之下。这些系统的任务是使前端系统的输出(发射机的前端是信源，而接收机的前端是信道)与后端系统(发射机的后端是信道，而接收机的前端是信道)相匹配。发射机和接收机的另外一个任务就是确保在传输过程中信号能有效对抗信道的损伤。因此根据信道不同的性质产生了不同的设计技术和设计方法。例如，在限带信道中设计传输信号时，必须考虑传输信号的失真和符号间干扰的问题。当多个发射机和接收机共享传输媒介的时候，如无线通信系统，在设计中还必须考虑不同用户间的干扰。

第 3、4、6、7、8、9、10 和 11 章研究了不同的通信情况和信号设计技术。第 3、4 和 6 章研究了模拟通信系统以及每个系统在输出端可以提供的信噪比。第 7、8、9 和 10 章介绍了模拟信号如何转化成数字信号以及数字信号如何进行传输的问题。这些章节都没有涉及通信的基本限问题。即使在第 8、9、10 和 11 章中，其主要内容是对给定的信号集设计最佳接收机，但是也没有涉及设计最佳信号集的问题。因此上述的章节都没有讨论到整个通信系统的优化问题。

本章从另一个角度研究通信系统。我们将研究信息在表示和传输方面的基本限，换言之，我们将试图确定通信的极限。我们将回答如下问题：在通信信道中，信息能够可靠传输的最高速率是多少？信息经过压缩仍能够无差错或者低差错恢复的最低速率是多少？这样的最优系统的复杂度又是多大？这些问题属于通信理论的一个分支，称作信息论。克劳德·香农在 1948 年的开创性研究奠定了该领域的基础。

香农的主要贡献可以划分成两个范畴。第一个范畴由信源的基本限组成。在该范畴中发展了信源的数学模型，同时介绍了衡量信源信息量的方法。然后提出并解决了信源编码的基本问题，也就是信息经过压缩并且能够无差错或者低差错恢复的最低速率是多少？这是香农信源编码理论的实质。

第二个范畴涉及信息在有噪声的信道中的基本限问题。基本问题是：在有噪信道中，信息能够可靠传输的最高速率是多少？著名的有噪信道编码定理阐述了这个问题。

12.1 信源的数学建模

通信系统设计的目的在于传输信息。在所有通信系统中信源都产生信息，通信系统的目的就是把信源的输出传送到信宿。例如，在无线广播系统中，其信源是语音信源或者音乐信源。在电视广播系统中，信源则是输出为动态图像的视频信源。在传真传输系统中，信源是静态图像。在计算机之间的通信中，传送的是二进制数据或者 ASCII 码(由一系列二进制码编码而成)，因此其信源可看做是二进制信源或者 ASCII 信源。在计算机硬盘里二进制数据的存储系统中，信源也是二进制信源。

为了研究不同类型的信源，我们需要建立数学模型来表示信源和衡量它们的信息

容量。哈特利、奈奎斯特和香农都是定义信息度量方法的先驱者。这一节将讨论信源的数学建模和定义信息的度量。在接下来的几个小节中，我们将了解如何通过压缩信源的输出，使其更容易传输和存储。以较少的比特数表示信源输出的过程称为*数据压缩*。

信息在直观和常规上的概念是指与某种事物相关的新知识。我们可以通过视听或者其他方式来获取信息。因此，信源即产生那些接收者感兴趣的信息作为输出(接收者预先并不知道这些输出的信息)。通信系统设计者的作用就是确保这些信息能够准确地传送到接收者。由于信源的输出是一个时变不可预测的函数(如果是可以预测的，就没有传送该信息的必要了)，因此可将其建成一个随机过程的模型。在前面的章节中，我们了解到通信信道中存在的噪声使得信道的输入与输出之间存在随机相依性。因此，通信系统的设计者需要建立这样一个系统，该系统能够把随机过程(信源)通过随机介质传输到信宿，并且保证较低的失真度。

642

信源能够建立成一个随机过程的模型，并且信源的性质决定了随机过程的性质。信源的一些基本特性包括带宽、幅度变化范围、功率以及一些统计特征(例如，幅度的概率分布函数、平稳性和功率谱密度)。例如，在对语音信息建立模型的时候，其随机过程的功率都集中在大约 300～3400Hz 的频段内，因此语音信号的功率谱密度也将占据这个频段。图 12-1 给出了语音信号典型的功率谱密度。视频信号可以从静止或者动态的图像中恢复，因此其带宽将取决于所需的分辨率。对于电视传输，其带宽取决于所采用的系统(NTS、PAL 或 SECAM)，通常在 0～4.5MHz 或 0～6.5MHz。

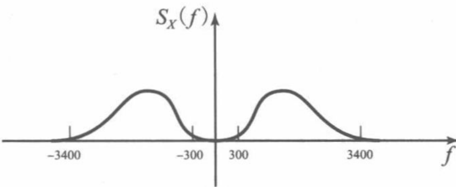


图 12-1　语音信号典型的功率谱密度

所有这些过程的共同点是：它们都是带宽受限的过程，可以通过奈奎斯特速率或者更高速率进行采样，并且可以通过采样值重构此过程。因此，本章的重点将放在离散时间随机过程上，因为我们感兴趣的所有信源都可以在采样后通过此过程进行建模。图 12-2 给出了信源的数学模型。这里信源可以建模为一个离散时间随机过程 $\{X_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$。随机变量可以定义为离散信号(例如二进制数据)或者连续信号(例如对于语音抽样)。离散时间随机过程的统计特性取决于信源的特性。

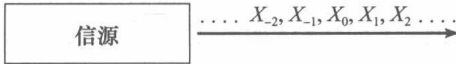


图 12-2　离散时间信源的数学模型

本章仅研究信源的简单模型。研究更复杂的模型需要更多的数学知识，超出了本书的范畴。但是即便是简单的模型，也能够使我们精确地定义出信息的度量以及信息传输和压缩的界限。

在各种模型中，最简单的信元模型是*离散无记忆信源*(DMS)。DMS 是一个时间离散、幅度离散的随机过程，其中所有 X_i 都相互独立且服从相同的分布。因此，DMS 生成一个取值为离散集的独立同分布(i. i. d.)的随机变量序列。

643

令随机变量 X 在集合 $\mathscr{A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ 中取值，设离散随机变量 X 的概率分布用 $p_i=P(X=a_i)$ 表示，其中 $i=1, 2, \cdots, N$。此时，由**字符集**集合 $\mathscr{A}$ 和概率集 $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ 就给出了 DMS 的完整描述。

例 12.1.1 用字符集 $\mathscr{A}=\{0, 1\}$ 和 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=p$ 描述一个信源。这是一个离散无记忆信源的例子，它产生 0 和 1 的序列，因此是一个二进制信源。当 $p=0.5$ 时，该信源称为二进制对称信源或简写为 BSS。 ◀

12.1.1 信息的度量

为了给出一种信息的定量度量方法，我们首先建立信息的基本模型，并定义其信息量以满足信息的直观属性。假设所考虑的信源是一个离散无记忆信源，它的输出传送给感兴趣的一方。设 a_1 为最大可能的输出，a_N 为最小可能的输出。例如，我们可以用信源表示某个城市(在北半球)7 月份的天气状况和空气污染程度。此时，$\mathscr{A}$表示不同天气状况和污染程度的各种组合(例如高温和污染，高温和轻度污染，寒冷和重度污染，寒冷和中度污染，严寒和轻度污染)。问题是，哪一个输出承载了更多的信息，a_1 还是 a_N(最大可能输出还是最小可能输出)？直观上，发送 a_N(前例中严寒和轻度污染的组合)传递了更多的信息。由此可以推断，一个信源的合理度量应该是信源输出概率的减函数。第二个信息度量的直观属性是，某一个输出概率的微小变化不会大幅度地改变其所传递的信息量。换而言之，信息的度量应该是信源输出概率的一个连续函数。

现在假设输出 a_j 的信息可以分成 a_{j1} 和 a_{j2} 两个独立的部分，即 $X_j=(X_{j1}, X_{j2})$、$a_j=\{a_{j1}, a_{j2}\}$和 $P(X=a_j)=P(X_{j1}=a_{j1})P(X_{j2}=a_{j2})$。如果温度与污染程度几乎相互独立，则这种情况能够发生。因此每个信源输出可以划分为两个独立的分量。由于每个分量相互独立，传递一个分量的信息(温度)并不能提供另一个分量的任何信息，因此，直观上，a_j 所能传递的信息数量是 a_{j1}和 a_{j2}这两个部分传递的信息之和。根据前面的讨论，对某个概率为 p_j 的输出 a_j 所传递的信息量必须满足以下 4 个条件：

1. 输出 a_j 的信息量取决于 a_j 的概率而不是 a_j 的值本身。我们用函数 $I(p_j)$表示，并称之为自信息。
2. 自信息是 p_j 的连续函数，即 $I(\cdot)$是一个连续函数。
3. 自信息是一个关于自变量的减函数。
4. 如果 $p_j=p_{j1}p_{j2}$，则有 $I(p_j)=I(p_{j1})+I(p_{j2})$。

644

可以发现只有对数函数能满足上述 4 条性质，即 $I(x)=-\log(x)$。对数的底并不重要，它仅仅决定了衡量信息量的单位。如果底为 2，则信息量可以用比特每信源符号或比特每抽样值表示。利用关系式 $\log_2 x=\frac{\log_{10}x}{\log_{10}2}$可以求出以 2 为底的对数[⊖]。

信源的输出 a_i 所传递的信息定义为该输出的自信息量，可由 $-\log(p_i)$给出。由此可将信源的信息量定义为信源所有输出的自信息量的加权平均值。这一点可以由不同的信源输出具有不同的概率得以证明。所以，不明信源输出所传递的信息量是信源输出的自信息量的加权平均值，即 $\sum_{i=1}^{N}p_iI(p_i)=\sum_{i=1}^{N}-p_i\log p_i$ 。信源的信息量称为信源的熵，用 $H(X)$表示。

定义 12.1.1 离散随机变量 X 的熵是其 PMF 的函数，定义如下

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log p_i=\sum_{i=1}^{N}p_i\log\frac{1}{p_i} \tag{12.1.1}$$

其中 $0\log 0=0$。■

值得注意的是，这里存在一些混淆。我们期望 $H(X)$表示随机变量 X 的一个函数，因此它本身也是一个随机变量。然后，$H(X)$又是随机变量 X 的概率质量函数(PMF)的函数，因此它又只是一个数字而已。

例 12.1.2 对于概率分布分别是 p 和 $1-p$ 的二进制无记忆信源，有

$$H(X)=-p\log p-(1-p)\log(1-p) \tag{12.1.2}$$

⊖ 本章采用 $\log x$ 表示 $\log_2 x$。

这个函数称为二进制熵函数，用 $H_b(p)$ 表示，它的曲线由图 12-3 给出。◀

从二进制熵函数图可知，当 $p=0$ 或 $p=1$ 时，二进制无记忆信源的熵为 0。这两种情况对应着信源是全 0 或全 1 的情况。这两种情况中，信源是确定的和可以完全预测的。另一方面，当两种信源的输出概率相等，即 1/2 时，熵达到最大，最大值为 1。这种情况对应输出可预测性最低，因此其熵最大。这是熵发展成为度量信源的信息量(或衡量不确定性)的一个依据。

645

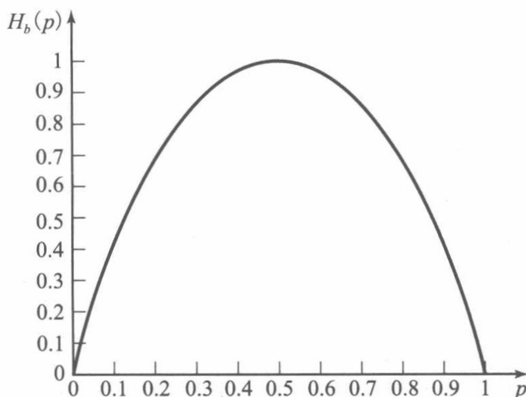


图 12-3 二进制熵函数

例 12.1.3 一个带宽为 4000Hz 的信源以奈奎斯特速率抽样，假设其抽样序列可以近似建模成字符集为 $\mathscr{A}=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 的 DMS，相应的概率为 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right\}$，求信源的速率(bps)。

解： 由题可知

$$H(X)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log 4+\frac{1}{8}\log 8+\frac{1}{16}\log 16+\frac{1}{16}\log 16=\frac{15}{8} \quad \text{比特 / 抽样}$$

由于每秒抽样 8000 次，因此信源产生信息的速率是 $8000\times\frac{15}{8}=15000\text{bps}$ ◀

例 12.1.4 一个离散无记忆信源具有一个大小为 N 的字符集，且信源输出等概率分布$\left(\text{每个的概率为}\frac{1}{N}\right)$。求信源的熵。

解： 由题可知

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\log\frac{1}{N}=\log N \tag{12.1.3}$$

◀

具有 N 个可能值的随机变量 X 的熵满足式(12.1.4)中的上下界

$$0\leqslant H(X)\leqslant\log N \tag{12.1.4}$$

由于 $0\leqslant p_i\leqslant 1$，这样有 $-\log p_i\geqslant 0$。因此，当随机变量 X 是给定的，即它取某个值的概率为 1，其他值的概率为 0 时，得到 $H(X)=0$ 的下界。当随机变量的具有相同的分布时，得到上界 $H(X)=\log N$(参考习题 12.7)。

646

12.1.2 联合熵和条件熵

处理两个或者多个随机变量时，如同前面引入联合概率以及条件概率一样，可以引入联合熵和条件熵的概念。处理有记忆信源时，这两个概念尤其重要。

定义 12.1.2 两个离散随机变量(X, Y)的联合熵定义为

$$H(X,Y)=-\sum_{x,y}p(x,y)\log p(x,y) \tag{12.1.5}$$

对 n 个随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，有

$$H(\boldsymbol{X})=-\sum_{x_1,x_2,\cdots,x_n}p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\log p(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{12.1.6}$$

■

可见，联合熵不过是一个随机变量矢量的熵。

在给定随机变量 Y 的条件下，随机变量 X 的条件熵定义如下：假如 $Y=y$，则随机变量 X 的 PMF 为 $p(x|y)$，对应的熵为 $H(X|Y=y)=-\sum_x p(x|y)\log p(x|y)$。可以直观地认为，条件熵是在已知 $Y=y$ 时，X 的不确定性。当 Y 已知时，X 的总不确定性就是对

应于所有y取值的条件熵的加权平均值。这个加权平均值也就是条件熵，定义如下。

定义 12.1.3　给定随机变量 Y，则随机变量 X 的条件熵定义为

$$H(X|Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x,y) \tag{12.1.7}$$

通常有

$$H(X_n|X_1,\cdots,X_{n-1}) = -\sum_{x_1,\cdots x_n} p(x_1,\cdots x_n)\log p(x_n|x_1,\cdots x_{n-1}) \tag{12.1.8}$$

■

例 12.1.5 第 5 章已经给出了应用 PMF 的链式法则，即 $p(x,\ y)=p(y)p(x|y)$，证明 $H(X,\ Y)=H(Y)+H(X|Y)$。

647

解：根据两个随机变量的联合熵定义，有

$$\begin{aligned}H(X,Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x,y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log[p(y)p(x|y)] \\ &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(y) - \sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y) \\ &= -\sum_{y} p(y)\log p(y) - \sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y) = H(Y) + H(X|Y)\end{aligned} \tag{12.1.9}$$

在最后一步中利用了关系式：

$$\sum_{x} p(x,y) = p(y) \tag{12.1.10}$$

◀

该关系式表明$(X,\ Y)$的信息量等于 Y 的信息量加上已知 Y 后 X 的信息量。同样地，该关系式也表明了传送$(X,\ Y)$的信息量等效于先传送 Y 的信息量然后再传送 X 的信息量。这个关系式扩展到 n 个随机变量的情况时，其熵有如下链式法则：

$$H(X) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \cdots + H(X_n|X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}) \tag{12.1.11}$$

当随机变量$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$相互独立时，关系式可以简化为

$$H(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i) \tag{12.1.12}$$

如果随机变量 X_n 表示一个离散(不必是无记忆的)信源在时刻 n 的输出，则 $H(X_2|X_1)$表示已知某个 X_1 的输出时，信源输出 X_2 所提供的新信息量。类似地，$H(X_n|X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-1})$表示观察者已知$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-1})$的信息时，$X_n$ 所提供给观察者的新信息。当 n 趋于无穷时，此条件熵的极限称为该随机过程的熵速率。

定义 12.1.4　一个平稳离散时间随机过程的熵速率定义为

$$H = \lim_{n\to\infty} H(X_n|X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}) \tag{12.1.13}$$

648

■

平稳性保证了极限的存在。可以证明，有记忆信源的熵速率的另一种定义表示

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{12.1.14}$$

对于有记忆信源的熵，熵速率非常重要。它是信源每个输出码元不确定性的基本量度。

例 12.1.6 二进制随机变量 X 和 Y 的联合 PMF 分布如下：

$$P(X=0,Y=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1,Y=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=0,Y=0) = \frac{1}{4}$$

求 $H(X,Y)$，$H(X)$，$H(Y)$，$H(X|Y)$和 $H(Y|X)$。

解：根据已知，有 $P(X=1, Y=0)=0$ 且

$$H(X,Y)=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

接下来有

$$P(X=1)=P(X=1, Y=0)+P(X=1, Y=1)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(X=0)=\frac{1}{2}$$

$$P(Y=1)=P(X=1, Y=1)+P(X=0, Y=1)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(Y=0)=\frac{1}{4}$$

因此，我们得到

$$H(X)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=1$$

$$H(Y)=-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}=0.8113$$

由于

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$$

可以得到

$$H(Y|X)=1.5-1=0.5$$

和

649

$$H(X|Y)=H(X,Y)-H(Y)=1.5-0.8113=0.6887$$ ◀

12.1.3 互信息

对于离散随机变量，$H(X|Y)$表示随机变量 Y 已知时，随机变量 X 的熵(或者不确定性)。因此，如果随机变量 X 的熵为 $H(X)$，则 $H(X)-H(X|Y)$表示通过传递随机变量 Y，X 已经减少的不确定性。换而言之，$H(X)-H(X|Y)$即随机变量 Y 所提供的关于随机变量 X 的信息量。这种信息量度在信源编码和信道编码中非常重要，称为两个随机变量之间的互信息。

定义 12.1.5 两个离散随机变量 X 和 Y 的互信息用 $I(X;Y)$表示

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y) \tag{12.1.15}$$

■

利用熵的表达式以及式(12.1.7)的条件熵表达式，可以确定两个随机变量 X 和 Y 的互信息的关系如下

$$I(X;Y)=\sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}}p(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p(x)}=\sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{Y}}p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \tag{12.1.16}$$

例 12.1.7 设 X 和 Y 为二进制随机变量，并且有 $P(X=0, Y=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1, Y=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=0, Y=1)=\frac{1}{3}$，求出此情况中的 $I(X;Y)$。

解：由题意可知，$P(X=0, Y=0)=\frac{2}{3}$，因此，$H(X)=H(Y)=H_b\left(\frac{2}{3}\right)=0.919$。另一方面，$(X, Y)$为 3 个值$(0, 0)$，$(1, 0)$和$(0, 1)$的均匀分布随机矢量。因此

$$H(X,Y)=\log 3=1.585$$

从而有

$$H(X|Y)=H(X,Y)-H(Y)=1.585-0.919=0.666$$

以及

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=0.919-0.666=0.253$$ ◀

上例表明了(可以参考习题 12.31)

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=I(Y;X)=H(X)-H(X|Y)\\&=H(Y)-H(Y|X)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)\end{aligned} \tag{12.1.17}$$

图 12-4 表示了熵、条件熵与互信息量三者之间的关系。

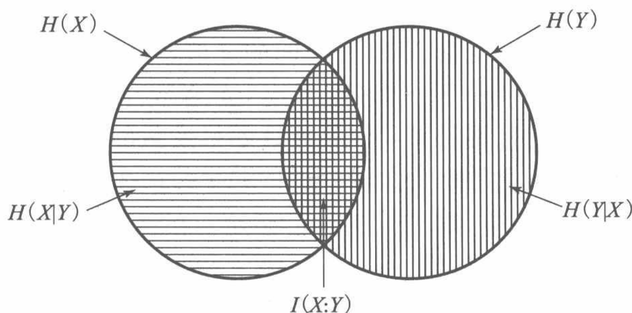


图 12-4　熵、条件熵与互信息量

12.1.4　微分熵

目前，我们定义了离散信源的熵和互信息。如果处理一个时间离散、幅度连续的信源，其输出是实数，这时不存在熵的直观意义。对于连续的情况，我们定义了另一个类似熵的量，称为微分熵。然而，它并不像熵能表示信源输出的不确定性一样具有直观上的解释。事实上，为了可靠地重建连续信源的输出，每个信源输出都需要无穷个比特单位来表示。因为该信源的任何输出都是实数，而实数表示为二进制形式需要无穷多个比特。

650

定义 12.1.6　概率密度函数为 $f_X(x)$ 的连续随机变量 X 的微分熵用 $h(X)$ 表示，定义为

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\log f_X(x)\mathrm{d}x \tag{12.1.18}$$

其中，$0\log0=0$。■

例 12.1.8 随机变量 X 在 $[0, a]$ 上均匀分布，求它的微分熵。

解：由微分熵的定义可知，

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a}\log\frac{1}{a}\mathrm{d}x = \log a$$

显然，对与 $a<1$ 有 $h(X)<0$，这与离散信源熵的非负性矛盾。同样，当 $a=1$ 时，有 $h(X)=0$，X 失去了确定性，这又与离散信源熵的性质矛盾。◀

例 12.1.9 求方差为 δ^2 的零均值高斯随机变量的微分熵。

解：由 PDF 为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\mathrm{e}^{-x^2/2\delta^2}$，因此，取自然对数，可以得到微分熵为

$$\begin{aligned} h(X) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\right)f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty}\ln(\mathrm{e}^{-x^2/2\delta^2})f(x)\mathrm{d}x = \ln(\sqrt{2\pi\delta^2}) + \frac{\delta^2}{2\delta^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(2\pi\mathrm{e}\delta^2) \end{aligned} \tag{12.1.19}$$

651

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \delta^2$。若取以 2 为底的对数，则有

$$h(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi\mathrm{e}\delta^2)\ \text{比特} \tag{12.1.20}$$

◀

很简单地，可以把微分熵的定义推广到联合随机变量微分熵和条件微分熵。对两个随机变量，有

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.1.21}$$

和

$$h(X|Y) = h(X,Y) - h(Y) \tag{12.1.22}$$

与离散情况相似，两个连续随机变量 X 和 Y 之间的互信息量可以定义为

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X) - h(X|Y) \tag{12.1.23}$$

尽管微分熵并不具有离散熵的直观意义，但是连续随机变量的互信息与离散随机变量的互信息有相同的释义，即表示一个随机变量所提供的关于另一个随机变量的信息。

12.2 信源编码定理

信源编码定理是由香农(1948a，1948b)提出的三个基本定理之一。信源编码定理确定了信源输出速率的基本限制，在该限制速率下，信源输出可以进行压缩而不会引起较大的错误概率。我们已经了解，信源的熵表示其不确定性的度量，或者说信源的信息量。因此，信源的熵在信源编码定理中起到了重要的作用。

信源的熵具有很直观的含义。假设我们观察一个长度为 n 的 DMS 的输出，这里 n 的值非常大。于是，根据大数定律(见第 5 章)，这个序列会以很高的概率(当 $n\to\infty$时，该值趋于 1)出现下列情况：符号 a_1 约出现 np_1 次，符号 a_2 约出现 np_2 次，…，符号 a_N 约出现 np_N 次。这意味着，当 n 足够大时，会以趋于 1 的概率出现下列情况：信源的每一个序列都具有相同的组成和相同的概率。具有这样结构的序列 $\boldsymbol{x}$ 称为典型序列。典型序列的概率分布为

652

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \approx \prod_{i=1}^{N} p_i^{np_i} = \prod_{i=1}^{N} 2^{np_i \log p_i} = 2^{n\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i = 2^{-nH(X)}}$$

这表示，当 n 很大，信源输出的所有长为 n 的典型序列具有相同的概率$\approx 2^{-nH(X)}$。另一方面，非典型序列集的概率则可以忽略不计。

由于典型序列的概率趋于 1，而每个典型序列的概率为 $2^{-nH(X)}$，于是典型序列的总数接近 $2^{nH(X)}$。因此，虽然大小为 N 的字符集能产生 N^n 个长度为 n 的序列，但是“有效的”输出数目是 $2^{nH(X)}$。这里，“有效的输出数目”指忽略其他的输出几乎没有损失任何信息，并且随着 n 趋于无穷，损失信息的概率趋于 0。图 12-5 给出了上述性质的示意图。典型序列的典型性及其性质都非常重要。它告诉我们对于所有的实际问题，考虑典型序列已经足够了，没必要考虑信源的所有输出序列。通过选择足够大的 n，由忽略非典型序列而引入的误差可以小于任何给定的 $\varepsilon(\varepsilon>0)$。这就是数据压缩的实质，即用一个比信源实际产生的输出序列数小的序列数来表示信源的输出。

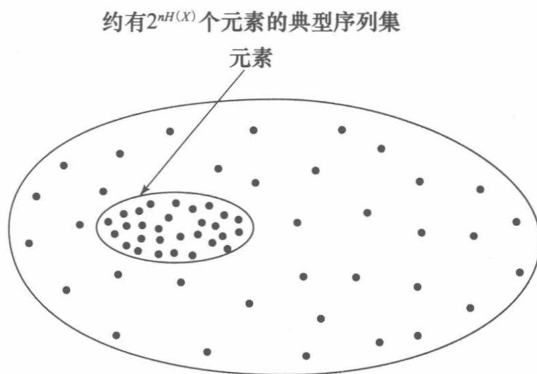


图 12-5 典型和非典型序列集

由以上结论以及 ε 是一个任意正数可知，仅仅考虑典型序列并不会引入较大的错误。由于典型序列的数目接近 $2^{nH(X)}$，因此需要 $nH(X)$个比特来描述它们。然而，这些比特还可以用来描述长度为 n 的信源输出。因此，一般来说，对任意的信源输出，需要 $H(X)$比特以保证基本无差错的描述。这再次证明了熵是信源输出信息量的表示。

653

目前，我们所假设的信源都是离散无记忆信源，因此可以用一个独立同分布的随机变量进行描述。对于这样的信源，当且仅当它的 PMF 不是均匀分布时，它才可以进行

压缩。如例 12.1.4 所示，X 均匀分布，有 $H(X)=\log N$，因此有 $2^{nH(X)}=2^{n\log N}=N^n$。这意味着，对于长为 n 的信源输出，其“有效”数目等于信源输出的总数目，因此不可能进行压缩。

我们尚未考虑信源为有记忆的情况。对于一个有记忆的信源，信源的输出并不是相互独立的。因此，前面的输出传递了有关未来输出的一部分信息。这意味着，随着信源输出越来越多，新的信息的速率就会有所降低。这种情况的典型例子就是打印英文文本，其中字母和单词之间存在很多联系(例如，字母“q”后面通常跟着“u”，两个空格之间的单个字母通常是“I”或“a”，等等)。当 n 很大的时候，一篇较长的英文文章中每个字母的熵(12.12 节中定义了熵速率)的极限为 $H(X_n|X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$。通常，对于稳态信源，熵速率和无记忆信源的熵一样具有相当的重要性，它定义为当 n 足够大时“有效”的信源输出数目，即 2^{nH}，其中 H 是熵速率。

对英文文本的统计模型的研究表明，熵速率收敛非常快，当 $n=10$ 时已经非常接近极限。该研究表明，当 $n=1$ 时，即表示无记忆信源，有 $H(X)=4.03$ 比特/字母。随着记忆性的增加，条件概率的计算空间也随之快速增加，并且很难求得计算熵速率所需要的条件概率。文献中提出了一些估算条件概率的方法，基于这些方法，英文文本的熵估算约为 1.3 比特/字母(在这些研究中仅仅考虑 26 个英文字母和空格字符)。

到目前为止，我们已经给出了信源编码定理的非正式描述，并且对其进行了验证。接下来会给出定理的正式描述，但没有具体证明。对证明感兴趣的读者可以查阅本章后所列的参考文献。

信源编码定理：一个熵(或熵速率)为 H 的信源，当信源速率为 R(比特/信源输出)时，只要 $R>H$，就能以任意小的错误概率进行编码。反之，如果 $R<H$，则无论采用多么复杂的编码器与译码器，错误概率都不可能达到任意小。

该定理由香农(1948a)首次提出，仅仅给出了信源编码存在的充要条件。它却并没有给出能达到预期性能的编码算法。下一节将介绍两种用于信源压缩的算法，一种由 Huffman(1952)提出，另一种由 Ziv 和 Lempel(1977，1978)提出。 654

12.3　信源编码算法

在前面各节中，我们已经考察了信源的熵 H，并给出极限速率。信源以该速率进行压缩后，可以可靠地进行重构。这意味着，当以高于熵速率进行编码，可以设计出错误概率任意小的码字；反之，当以低于熵速率进行编码，则不存在满足这样要求的码字。这是一个重要的结论，但是并没有给出具体的编码算法以及设计这样的一个接近极限的码字。本小节中，我们将介绍两种性能很接近熵速率极限的编码算法。它们分别是霍夫曼(Huffman)编码算法和 Lempel-Ziv 信源编码算法。

12.3.1　霍夫曼信源编码算法

在霍夫曼编码算法中，固定长度的信源输出分组被映射成可变长度的二进制分组。这种方式称为*定长到变长编码*。它的做法是，把那些出现频率更高的固定长度序列映射成较短的二进制序列，而那些出现频率较低的序列则映射成较长的二进制序列，从而获得较高的压缩比。在可变长度编码过程中，同步是一个值得关注的问题。这意味着，这里只能有唯一方式把接收到的二进制序列解析转换成原来的码字。下面的例子说明了这点。

例 12.3.1 假设信源的可能输出为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，对应的概率分别为 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16},\right.$

$\frac{1}{16}\}$。分别考虑以下四种信源编码：

字符	概率	码字			
		码 1	码 2	码 3	码 4
a_1	$p_1=\frac{1}{2}$	1	1	0	00
a_2	$p_2=\frac{1}{4}$	01	10	10	01
a_3	$p_3=\frac{1}{8}$	001	100	110	10
a_4	$p_4=\frac{1}{16}$	0001	1000	1110	11
a_5	$p_5=\frac{1}{16}$	00001	10000	1111	110

在第一种编码方式中，每个码字以 1 结尾。因此，只要译码器接收到 1，它就知道这个码字已经结束并且一个新的码字将要开始。这说明该码字是一种*自同步码*。在第二种编码方式中，每个码字以 1 开始，因此，当译码器接收到 1，它就知道一个新的码字已经开始，前面的接收比特就是上一个码字的最后一个比特。这样的码字也是自同步的，但是不如第一种码字。因为对第二种码字，接收方必须等到下一个码字的第一个比特才能判断新的码字已经开始。而第一种码字，只需要识别最后一比特不需要接收到下一码字的第一比特。这两种编码方式都是*唯一可译码*。然而只有第一种码字具有即时性。第一种和第三种码有一个很好的优点，即满足前缀条件，没有一个码字是另一个码字的前缀。可以证明，一种可唯一译码并且具有即时性的编码方法必定满足前缀条件。这表明第一种、第三种码都是唯一可译码且满足即时性条件。然后，第三种码具有更小的平均码长。事实上，对于第一种码，它的平均码长是

[655]

$$E[L]=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{16}=31/16$$

第三种码的平均码长为

$$E[L]=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{16}+4\times\frac{1}{16}=30/16$$

第四种码一个主要的缺点是该码不是唯一可译码。例如，序列 110110 可以有两种译码方式，即 a_5a_5 和 $a_4a_2a_3$。非唯一可译码的编码方式是不可取的，实际应用中应该避免。从上面的讨论中可知，上面四种码中最可取的码是第三种，它不仅是唯一可译码，具有即时性，而且还有最短的平均码长。这种码就是接下来要简要讨论的*霍夫曼编码*的一个例子。◀

正如已经提及的，霍夫曼编码的思想就是选择那些大概率序列具有更短码字的码长。如果能够把每个概率为 p_i 的信源输出映射为长度约为 $\log(1/p_i)$的码字，同时保证译码的唯一性，则可以得到约为$\sum_i p_i\log(1/p_i)$，即等于 $H(X)$的平均码长。霍夫曼编码是具有最小平均码长和唯一可译码性的一种即时性编码方式。从这个意义上说，霍夫曼编码是最佳的。这里的最佳，指得是在所有满足前缀条件(因而具有唯一可译码性和即时性)的码字中，霍夫曼编码具有最小的平均码长。接下来，我们介绍设计霍夫曼编码的算法。从算法中可以明显看出编码的结果满足前缀条件。这里省略了霍夫曼编码的最佳性证明，有兴趣的读者可以参阅本章后面的“深入阅读”。

霍夫曼编码算法

1. 以概率降序方式排列出各个信源的输出。
2. 合并两个概率最小的输出为一个输出，其概率是对应的两个概率之和。
3. 如果剩下的输出数目为 2，则继续第 4 步，否则返回第 2 步。
4. 为剩下的两个输出任意安排 0 和 1。

[656]

5. 如果一个输出是前面一步的两个输出的合并结果，用 0 和 1 添加当前的码字以得到上一个输出的码字，然后重复第 5 步。如果在前面步骤中没有输出先于另一个输出，则停止处理。

图 12-6 给出了算法的流程图。

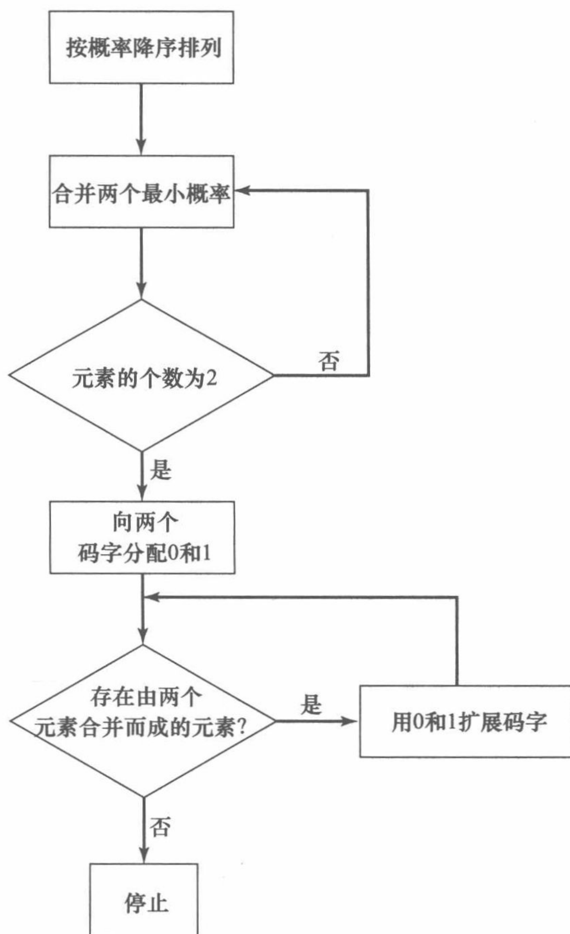
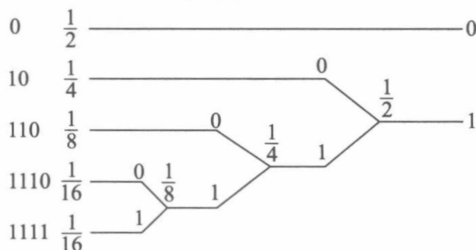


图 12-6　霍夫曼编码算法

例 12.3.2 为例 12.3.1 所给的信源设计霍夫曼编码。

657

解：下面的树形结构给出了编码步骤以及编码后得到的码字。



霍夫曼编码的平均码长定义为：

$$\overline{R} = E[L] = \sum_{x \in \mathscr{X}} p(x) l(x) \tag{12.3.1}$$

这里 $l(x)$是对应于信源输出 x 的码长。由此可以看出平均码长满足下列不等式：

$$H(X) \leqslant \overline{R} < H(X) + 1 \tag{12.3.2}$$

从该关系式中，显然可以定义霍夫曼编码的效率为

$$\eta = \frac{H(X)}{\overline{R}}$$

其值小于等于 1。

如果对长为 n 的信源字符序列(n 次扩展源)进行霍夫曼编码，则有

$$H(\boldsymbol{X}^n) \leqslant \overline{R}_n < H(\boldsymbol{X}^n) + 1$$

这里$\overline{R}_n$表示扩展源序列的平均码长，因此 $\overline{R}=\frac{1}{n}\overline{R}_n$。如果信源是无记忆的，则有$H(\boldsymbol{X}^n)=nH(X)$。将这些代入前面的不等式，再除以 n，则有

$$H(X) \leqslant \overline{R} < H(X) + \frac{1}{n} \tag{12.3.3}$$

因此，当 n 足够大，则有$\overline{R}$能够任意接近所需的 $H(X)$。显然，对于有记忆离散信源，$\overline{R}$能够接近式(12.1.14)定义的信源熵速率。

658

例 12.3.3 一个离散无记忆信源的输出为$\mathscr{A}=\{a_1, a_2, a_3\}$，且各输出等概，其霍夫曼编码如下：

0 $\frac{1}{3}$ —— 0

10 $\frac{1}{3}$ 0 $\frac{2}{3}$ 1

11 $\frac{1}{3}$ 1

信源的熵 $H(X)=\log 3=1.585$，且 $\overline{R}=5/3=1.667$。如果我们采用两个字符的序列，则有如下信源：

$$\mathscr{A}^2=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_3),\cdots(a_3,a_2),(a_3,a_3)\}$$

其概率矢量为 $\boldsymbol{p}^{(2)}=\{\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\}$。该信源的霍夫曼编码如下树图表示：

000 $\frac{1}{9}$

0010 $\frac{1}{9}$

0011 $\frac{1}{9}$

010 $\frac{1}{9}$

011 $\frac{1}{9}$

011 $\frac{1}{9}$

100 $\frac{1}{9}$

110 $\frac{1}{9}$

111 $\frac{1}{9}$

（树图中间节点：$\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$；分支标记 0, 1）

这里，平均码长为$\overline{R}_2=3.222$ 比特/每对信源输出，或 1.611 比特/信源输出。与前面的例子比较，可以发现这里的平均码长更接近信源的熵。换而言之，用二次扩展源(即每次两个字符)提高了编码效率。如果用三次扩展源，效率会进一步提高。显然，通过增大 n 可以提高霍夫曼编码的效率，但编码的设计以及编译码过程的复杂度也随之增加了。◀

12.3.2 Lempel-Ziv 信源编码算法

我们已经了解到对于一个给定的信源，霍夫曼编码能提供具有最小平均码长的前缀码。从这个意义上将讲，霍夫曼编码是最佳的。虽然如此，在霍夫曼编码过程中仍存在两个主要的问题。第一个问题是，霍夫曼编码很大程度上依赖于信源的概率(统计特性)，在设计霍夫曼编码之前必须知道信源的统计特性。如果只考察信源的输出，则编码过程分为两个阶段。第一阶段，估计信源的统计特性(对有记忆信源以及对扩展源设计霍夫曼编码时，这个阶段非常耗时)。第二个阶段，完成编码。霍夫曼编码的另一个问题是，如果对长度为 1 的信源分组进行霍夫曼编码，这个过程只涉及了信源输出的频率，与信源的记忆性无关。如果要考虑信源的记忆性，则只能对长度为 2 或者更长的信源分组进行霍夫曼编码，但是这样，算法的复杂度会随指数增加。例如，对分组长度为 1 的 ASCII 字符进行编码，需要一个有 256 个末端节点的树。但是如果分组长度为 2，则树的大小以及编码的复

659

杂度会更高。在特定的应用中，诸如需要传输速率很高的磁盘或者光盘媒介，霍夫曼编码的复杂度和编码速率成了一个瓶颈。

Lempel-Ziv 算法属于通用信源编码算法，即算法与信源统计特性无关。这种算法是一种变长到定长编码方案。这意味着信源输出的任何序列被唯一地解析成不同长度的码段，这些码段使用等长的码字进行编码，通过识别尚未出现的最短码段来判定解析过程结束。最后，解析器观察信源的输出。只要最后一个码段后面的新信源输出序列与某个已经存在的码段相同，则说明没有引入新的码段，可以认为是信源的另一个字符。一旦新的输出序列与前面的码段不同，则被认为是一个新的码段，并对其进行编码。这种编码方案非常简单，新的码段是前面码段与新的信源输出的拼接。为了实现编码，前面的码段按照字典顺序进行二进制扩展，并与新的比特进行拼接。例如，假设需要对下列序列进行解析和编码：

$$01000011000010100000101000001100000101000010$$

通过前面提过的方法对序列进行解析，得到如下码段：

$$0,1,00,001,10,000,101,0000,01,010,00001,100,0001,0100,0010$$

显然，所有的码段都不相同，并且每个码段都是通过前面码段与一个新的信源输出拼接得到的。码段的数目是 15，这说明，每个码段需要 4 个比特外加一个用于表示新信源输出的比特来表示。上述序列被编码为：

0000 0,0000 1,0001 0,00111,0010 0,0011 0,0101 1,0110 0,0001 1,1001 0,1000 1,0101 0,0110 1,1010 0,0100 0

表 12-1 给出了这个过程的总结

表 12-1 Lempel-Ziv 的举例总结

字典位置		字典内容	码字		字典位置		字典内容	码字	
1	0001	0	0000	0	9	1001	01	0001	1
2	0010	1	0000	1	10	1010	010	1001	0
3	0011	00	0001	0	11	1011	00001	1000	1
4	0100	001	0011	1	12	1100	100	0101	0
5	0101	10	0010	0	13	1101	0001	0110	1
6	0110	000	0011	0	14	1110	0100	1010	0
7	0111	101	0101	1	15	1111	0010	0100	0
8	1000	0000	0110	0					

这种描述很难被称为数据压缩方案，因为该方案将一个长为 44 的序列映射成一个长为 75 的序列。然而，随着原始序列长度的增加，该算法的压缩性能就会变得明显。可以证明，对于具有平稳态和遍历性的信源，随着序列长度增加，其压缩序列中的比特趋于 $nH(X)$，这里 $H(X)$表示信源熵速率。对编码序列再进行解压缩，这个过程是非常直观和简单的。

660

Lempel-Ziv 算法存在一个问题，即选择多大的码段数目。这里选择的码段数目为 15，每个码段需要 4 比特来表示。通常，任意固定数目的码段最终会因为变得太小而发生溢出。例如，若要对上述信源继续输入的字符并进行编码，由于只有 4 比特来表示字典中的元素，并且已经有 15 个码段了，因此无法再向字典中添加新的码段。为了解决这个问题，编码器和译码器必须删除字典中不再使用的元素，并用新的元素替代。因此，编码器和译码器必须建立一致的删除算法。

Lempel-Ziv 算法广泛应用于计算机文件的压缩。UNIX 操作系统下的压缩和解压缩工

具以及其他压缩程序(zip，gzip 等)都是该算法的不同应用版本。

12.4　通信信道建模

在前面的章节中，介绍了信源的数学模型、信息的度量以及由信源熵给出的信源压缩的限制。在这一节中，我们将研究通信系统的其他重要组成部分，即通信信道。为了保护信息防止信道错误，我们引入了信道编码的概念。

661

正如第一章定义过，信息传输或者存储的任何介质被称为通信信道。同轴电缆、电离层、自由空间、光纤、磁盘和光盘都可认为是信道。它们的共同点是，在输入端接收信号，并在一段时间后输出(存储类)或在另一个地点输出(传输类)。因此，输入和输出的关系决定了通信信道的特性。从这个意义上讲，信道也是一个系统。

导致信道输出与输入不同的因素很多，包括衰减、非线性、带宽受限、多径传播以及噪声。所有这些因素导致了信道输入与输出关系的复杂性。由于衰落和噪声的存在，信道输入与输出的关系通常呈现随机性。

实际中遇到的信道通常是波形信道，即输入与输出均为时间连续波形。由于任何物理可实现的信道都是带宽受限的，所以利用抽样定理，波形信道可以等效为离散时间信道。在离散时间信道中，输入和输出信号均为离散时间信号。

对于离散时间信道，若其输入和输出变量的取值是有限多个或可列无穷多个，则称之为离散信道。离散信道的一个典型例子就是二进制输入、二进制输出信道。通常，一个离散信道的特性可由输入字符集$\mathscr{X}$，输出字符集$\mathscr{Y}$以及在给定输入序列下输出序列的条件概率质量函数(PMF)$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$决定。图 12-7 中给出了一个离散信道的示意图。通常，输出 y_i 不仅取决于此时的输入 x_i，而且还与以前的输入(具有符号间干扰的信道，详见第 9 章)有关，甚至还与以前和将来的输入都有关(存储信道中)。因此，信道是能够具有记忆性的。然而，若一个离散信道是无记忆的，则被称为离散无记忆信道(DMC)。对于这样的信道，对任意的 $\boldsymbol{y}\in\mathscr{Y}^n$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{X}^n$，有

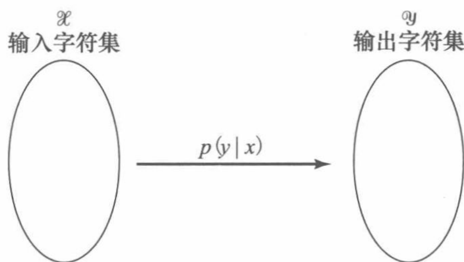


图 12-7　离散信道

$$P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}P(y_i|x_i)\qquad(12.4.1)$$

662

本章中涉及的所有信道模型都是无记忆的。

离散无记忆信道的一个特例即二进制对称信道(BSC)。图 12-8 给出了一个二进制信道。在二进制信道中，$\varepsilon=P(0|1)=P(1|0)$称为交叉概率。

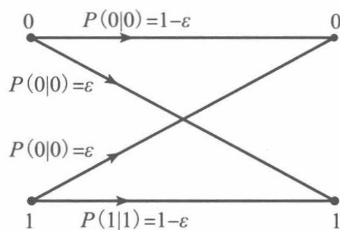


图 12-8　二进制对称信道

例 12.4.1 假设高斯信道中传输的为二进制对极信号(例如，二进制 PSK 调制系统)，由第 8 章和第 10 章可知，在这样一个信道中，1 判为 0 或 0 判为 1 的错误概率由下式给出：

$$\varepsilon=P(1|0)=P(0|1)=Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\qquad(12.4.2)$$

这里 N_0 是噪声功率谱密度，$\mathscr{E}_b$ 表示每个对极信号(0 或者 1)的能量。该离散信道就是二进制对称信道的一个例子。◀

例 12.4.2 在一个 AWGN 信道中传输二进制对极信号，其输入信号为 $\sqrt{\mathscr{E}_b}$或 $-\sqrt{\mathscr{E}_b}$，输出信号为输入信号与噪声的和。因此，对于这个二进制输入，连续输出信道有$\mathscr{X}=\{\pm\sqrt{\mathscr{E}_b}\}$，$\mathscr{Y}=\mathbf{R}$ 以及

$$f(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-x)2}{2\sigma^2}}$$

其中，σ^2 表示噪声的方差。该离散信道就是一个离散输入、连续输出的例子。◀

功率受限的离散加性高斯白噪声信道是一种最重要的连续字符集信道。在该信道中，$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$都是实数集，且输入输出关系为：

$$Y=X+Z \tag{12.4.3}$$

其中，Z 表示信道噪声，并假定服从均值为 0，方差为 P_N 的高斯分布。进一步地假定该信道的输入满足某种功率限制。例如，对某个较大的 n，长为 n 的输入分组满足

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant P \tag{12.4.4}$$

其中，P 表示某个固定的受限功率。图 12-9 给出了该信道的模型。

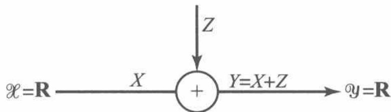


图 12-9 功率受限的加性高斯白噪声信道

663

12.5 信道容量

我们已经了解了 $H(X)$定义为离散信源可以进行无差错恢复编码的极限速率。类似地，信息在信道中的传输过程也存在着一个“基本极限”。

当然，信道中信息传输的主要目的是可靠性，它用接收端正确接收的概率来衡量。由于噪声的存在，显然传输中错误概率应该是大于 0 的某个正数。然而，信息论的一个基本结论是，只要传输速率小于被称为*信道容量*的某个数值，则可靠的传输(指错误概率小于某个特定的值)在有噪信道中是可能的。这个著名的结论最早由香农(1948b)提出，被称为*有噪信道编码定理*。有噪信道编码定理所阐述的是，*在信道中噪声所影响的并不是通信可靠度的基本限制问题，而是通信速率的基本限制问题*。

图 12-10 表示一个具有四个输入和四个输出的离散无记忆信道。如果接收方收到 a，它并不知道发送的是 a 还是 d；如果接收方收到 b，它并不知道发送的是 a 还是 b，等等。因此，总有可能出错。但如果发送方和接收方达成一致，只用字符 a 或者 c 进行通信，就可以消除不确定性。在这种情况下，如果接收方收到 c 或者 d，就可以知道发送的是 c。这意味着 a 和 c 这两个符号可以在信道上进行无差错的传输，也就是说，我们可以用所有可能的输入中的某个子集来避免传输中出错。不可否认，使用所有可能输入的某个更小的子集减少了可能输入的个数，但是这是为了实现可靠通信必须付出的代价。有噪信道编码定理的实质是，只选择这种输入，即它们所对应的可能输出为不相交的，这样所发送的信息才不会产生不确定性。所选择的输入应该是“相互远离”的，这样它们在信道上的映射才不会发生互相重叠(或是可忽略的重叠)。

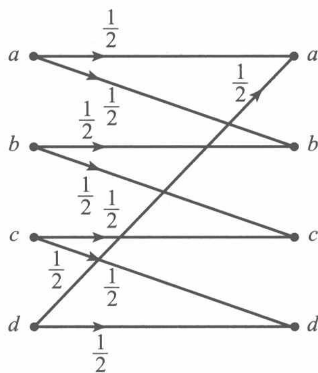


图 12-10 离散信道举例

664

考察二进制对称信道，并试图使用这种方法，我们发现无法得到无重叠的输出。实际上，对于大多数信道都是如此。为了在二进制对称信道上应用该结论，我们只能将其应用于*扩展信道*[⊖]，而不是信道本身。对输入和输出字符集分别为$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$，且条件概率为 $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的二进制信道进行 n 次扩展，得到的信道的输入和输出字符集分别为$\mathscr{X}^n$ 和$\mathscr{Y}^n$，且条件概

⊖ 在霍夫曼编码中，我们也对信源的 n 次扩展采用了编码算法以达到有效压缩。

率为 $P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}P(y_i|x_i)$。二进制对称信道的 n 次扩展将长为 n 的二进制分组作为其输入和输出。图 12-11 为信道的示意图。正如第 5 章所讨论的，根据大数逻辑，如果 n 足够大，当信道上传输长为 n 的二进制序列时，输出序列处于 $n\varepsilon$ 位置上出错的概率很高。$n\varepsilon$ 位置上出错的序列总数为

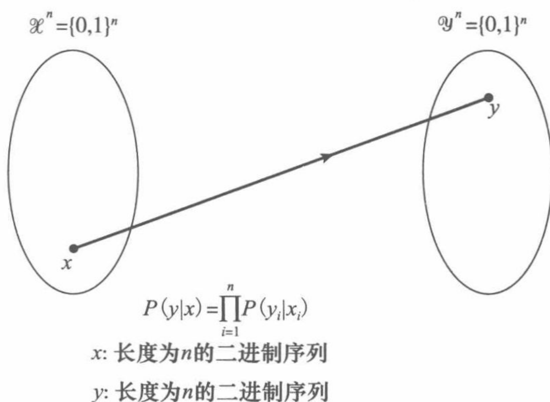


图 12-11 二进制对称信道的 n 次扩展信道

$$\binom{n}{n\varepsilon}=\frac{n!}{(n-n\varepsilon)!(n\varepsilon)!}$$

利用 Stirling 近似公式 $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$，得到

665

$$\binom{n}{n\varepsilon}\approx 2^{nH_b(\varepsilon)} \quad (12.5.1)$$

其中 $H_b(\varepsilon)=-\varepsilon\log_2\varepsilon-(1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)$ 是式(12.1.2)中定义的二进制熵函数。这意味着，对于任意的输入分组，约有 $2^{nH_b(\varepsilon)}$ 个可能的对应输出。从另一方面来说，大概率的输出序列(即典型序列)总数约为 $2^{nH(Y)}$。因此，能够与输出序列互不重叠的输入序列的最大数约为

$$M=\frac{2^{nH(Y)}}{2^{nH_b(\varepsilon)}}=2^{n(H(Y)-H_b(\varepsilon))} \quad (12.5.2)$$

这表示在这个 n 次扩展信道中，最多可以发送 $\log_2 M=n(H(Y)-H_b(\varepsilon))$ 比特信息，且每一个扩展信道的传输速率为

$$R=\frac{\log_2 M}{n}=H(Y)-H_b(\varepsilon) \quad (12.5.3)$$

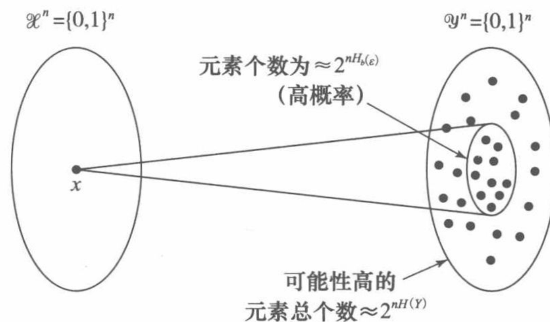


图 12-12 二进制对称信道示意图

在关系式 $R=H(Y)-H_b(\varepsilon)$ 中，ε 的值取决于信道特性，无法控制。然而由于随机变量 Y 的概率分布同时取决于输入分布 $P(x)$ 和特征为 ε 的信道特性。因此，为了最大化信道的传输速率，应该选择能够使 $H(Y)$ 最大的 $P(x)$。若 X 为一个均匀分布的随机变量，如对于二进制输入有 $P(X=0)=P(X=1)=0.5$，则 $H(Y)$ 的最大值为 1。因此有

$$R=1-H_b(\varepsilon) \quad (12.5.4)$$

同时可以证明，该速率是二进制对称信道中实现可靠传输[⊖]的最大速率。因此，二进制对称信道的信道容量为

$$C=1-H_b(\varepsilon) \quad (12.5.5)$$

图 12-13 给出了这种情况下信道容量的曲线图。我们发现当 $\varepsilon=0$ 和 $\varepsilon=1$ 时均得到信道容量最大值 $C=1$。这说明，输出总是使输入翻转的信道与那些输入无差错的信道一样具有良好的性能。当信道输出使得输入翻转，即传输发生错误的概率为 1/2 时，此时的情况最差。

666

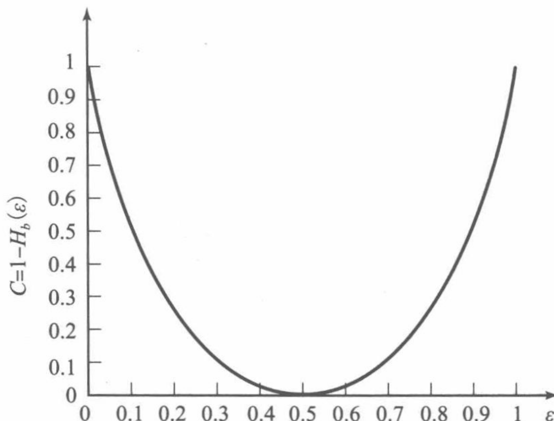


图 12-13 BSC 的信道容量

⊖ 可靠传输意指随着码段长度 n 趋于无穷，差错概率趋于零的情况。

离散无记忆信道中，随着数据分组长度的增加，仍能够实现错误概率趋于 0 时的最大传输速率被称为信道容量，用 C 表示。接下来所阐述的有噪信道编码定理给出了一般离散无记忆信道的信道容量。

有噪信道编码定理。离散无记忆信道的信道容量由下式给出：

$$C = \max_{P(X)} I(X;Y) \tag{12.5.6}$$

其中，$I(X;Y)$ 表示信道输入 X 和输出 Y 之间的互信息量，分别由式(12.1.15)和式(12.1.16)给出了定义。若传输速率 R 小于信道容量 C，则以 R 速率实现可靠的通信是可能的。反之，若 $R>C$，则不可能以 R 速率实现可靠的通信。

在定理中，R 等于 $\frac{\log_2 M}{n}$，其中 M 表示在 n 次扩展信道中传输的消息个数，而"可靠传输"是指通过增大 n 的值可以实现传输的错误概率无限接近 0。速率 R 和容量 C 的单位都为比特/传输或比特/信道使用。

有噪信道编码定理是信息论最重要的结论之一，并且它给出了在噪声存在的信道中实现可靠通信的基本限制。根据定理，不考虑信道的其他特性，任何信道都可以用容量的数值来表征，它决定了信道中可以传输的信息量。因此，若要从信息传输的角度比较两个信道时，可以用各自的信道容量来做比较。 667

例 12.5.1 求图 12-14 所示的信道的容量。

解：首先要找出使 $I(X;Y)$ 最大化的输入分布，有

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

但是，

$$H(Y|X) = P(X=a)H(Y|X=a) + P(X=b)H(Y|X=b) + P(X=c)H(Y|X=c)$$

根据信道输入和输出的关系，对于全部的三种情况($X=a$，$X=b$，$X=c$)，Y 是三元的随机变量，其概率分别是 0.25，0.25，0.5。因此

$$H(Y|X=a) = H(Y|X=b) = H(Y|X=c) = 1.5$$

由于 $P(X=a)+P(X=b)+P(X=c)=1$，且有

$$H(Y|X) = 1.5$$

以及

$$I(X;Y) = H(Y) - 1.5$$

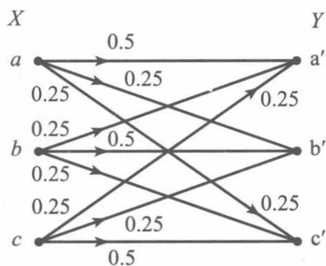


图 12-14　例 12.5.1 所示的 DMC

为了使得 $I(X;Y)$ 最大化，必须使 $H(Y)$ 最大，并且当 Y 为等概率随机变量时，$H(Y)$ 有最大值。但是并不清楚，是否存在一个输入分布能够使得输出呈均匀分布。然而，在特殊情况下(由于是对称信道)，均匀分布的输入能得到均匀分布的输出，于是有

$$H(Y) = \log 3 = 1.585$$

因此，这种情况下的信道容量为

$$C = 1.585 - 1.5 = 0.085 \quad \text{比特 / 传输}$$

这表示，每传输 1 比特的信息，信道至少需要 $\left\lceil \frac{1}{0.085} \right\rceil = 12$ 个单位的传输量。 ◀ 668

12.5.1 高斯信道容量

功率受限的离散时间高斯信道具有下列输入输出关系

$$Y = X + Z \tag{12.5.7}$$

这里，Z 表示服从均值为 0，方差为 P_N 的高斯分布的随机变量。当输入序列的长度 n 足够大时，功率限制条件如下

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant P \tag{12.5.8}$$

对长度为 n 的输入分组，其输出和噪声有下列关系

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} \tag{12.5.9}$$

如果 n 足够大，根据大数逻辑，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2\leqslant P_N \tag{12.5.10}$$

或

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2\leqslant nP_N \tag{12.5.11}$$

这意味着，(随着 n 的增大)$\boldsymbol{y}$ 位于以 $\boldsymbol{x}$ 为中心，$\sqrt{nP_N}$为半径的 n 维空间超球面内的概率趋于 1。另一方面，由于输入功率 P 的限制以及输入与噪声相互独立，因此输出功率为输入功率与噪声功率之和，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\leqslant P+P_N \tag{12.5.12}$$

或

$$|\boldsymbol{y}|^2\leqslant n(P+P_N) \tag{12.5.13}$$

这表明，输出序列(以高概率渐进方式)出现在以原点为中心、$\sqrt{n(P+P_N)}$为半径的 n 维空间超球面内。图 12-15 反映了输出空间中序列的情况。

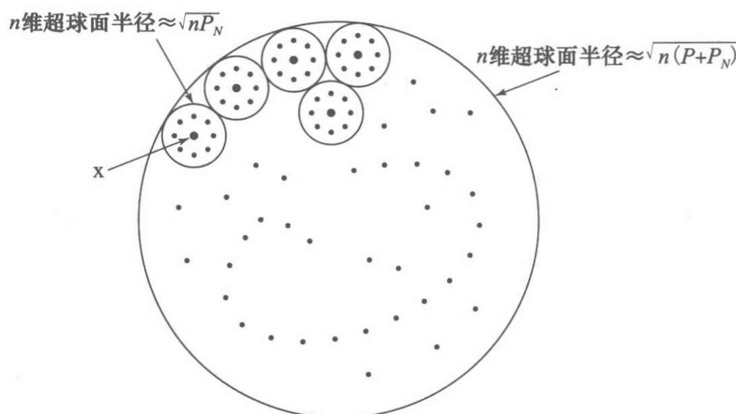


图 12-15　功率受限的高斯信道的输出序列

目前的问题是，信道传输中存在多少个输入序列 $\boldsymbol{x}$ 使得这些序列的超球面与输出序列 $\boldsymbol{y}$ 的输出空间互不重叠？显然，如果满足该条件，则输入序列能够实现可靠的解码。一个等价的问题是：半径为 $\sqrt{n(P+P_N)}$的超球面内能够容纳多少个半径为 $\sqrt{nP_N}$ 的超球面？粗略的答案是两球的体积之比。注意，对于一个普通的三维球体，其体积为$\frac{4}{3}\pi R^3$；而二维的情况下(圆形)，“体积”(即面积)为 πR^2。因此，一个 n 维的超球面的体积与 R^n 成正比。如果用下式表示 n 维超球面的体积：

$$V_n=K_nR^n \tag{12.5.14}$$

其中，R 表示超球面的半径，且 K_n 与 R 相互独立，则信道中可以可靠传输的消息总数为

$$M=\frac{K_n[n(P_N+P)]^{\frac{n}{2}}}{K_n(nP_N)^{\frac{n}{2}}}=\left(\frac{P_N+P}{P_N}\right)^{\frac{n}{2}}=(1+\frac{P}{P_N})^{\frac{n}{2}} \tag{12.5.15}$$

因此，输入功率限制为 P 的加性高斯白噪声信道的离散时间信道容量为

$$C=\frac{1}{n}\log M=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{P_N}\right)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{P_N}\right) \tag{12.5.16}$$

限带高斯波形信道。 对于限带加性高斯白噪声的连续时间信道，其噪声功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$，输入信号功率限制为 P，带宽为 W，使用奈奎斯特速率采样得到离散时间信道。每个抽样的信号功率为 P，每个抽样的噪声功率为

669 ~ 670

$$P_N = \int_{-w}^{+w} \frac{N_0}{2} \mathrm{d}f = WN_0$$

将该结果代入式(12.5.16)，得到

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \text{ 比特 / 传输} \tag{12.5.17}$$

若将此结果乘以每秒的传输次数，即 2W(根据奈奎斯特抽样定理)，于是得到以比特/秒为单位的信道容量

$$C = W\log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \text{ 比特 / 秒} \tag{12.5.18}$$

这就是著名的加性高斯白噪声信道上的香农信道容量公式。

例 12.5.2 求带宽 W=3000Hz，信噪比为 39dB 的电话线路的信道容量。

解： 信噪比为 39dB 可以换算成 7943，根据香农关系式，有

$$C = 3000\log(1 + 7943) \approx 38\,867 \quad \text{比特 / 秒}$$

◀

12.6 通信的容限

上一节给出了限带加性高斯白噪声信道容量为

$$C = W\log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

由上式可以看出，决定信道容量的基本因素有信道带宽 W，噪声功率谱密度 N_0，信号功率 P。P 和 W 之间相互折中以互相补偿。增大输入信号功率显然可以增加信道容量。因为当发射了更大的功率时，我们就可以选出更多的“远距离”的输入电平来携带信息，这样每次就可以传输更多的比特数。然而，由于信道容量与功率呈对数关系，因此随着功率增加，信道增长缓慢。这是因为，为了对抗噪声干扰，输入电平之间需要保持足够大的距离 Δ，同时为了增加输入电平的数量，只能引入比现有电平幅度更高的电平，这样需要更高的信号功率。尽管如此，通过提高信号功率，可以将信道容量提高到任意值。

671

然而，信号带宽对信道容量的影响大有不同。增加带宽 W 会带来两种相反的结果。一方面，在一个带宽更大的信道上，可以每秒钟传输更多的抽样信号，因此提高了传输速率。另一方面，更高的带宽意味着接收方接收到更高的噪声功率，这样降低了系统性能。这可以通过信道容量公式中包含的两个 W 看出。为了考察带宽增加对信道容量带来的影响，令带宽 W 趋于无穷大，于是有

$$\lim_{W\to\infty} W\log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) = \frac{P}{N_0}\log \mathrm{e} \approx 1.44\frac{P}{N_0} \tag{12.6.1}$$

这表示，与信号功率的情况不同，仅仅通过增大信号带宽并不能将信道容量提高到任意值。图 12-16 反映了信道容量 C 与带宽 W 的曲线变化关系。

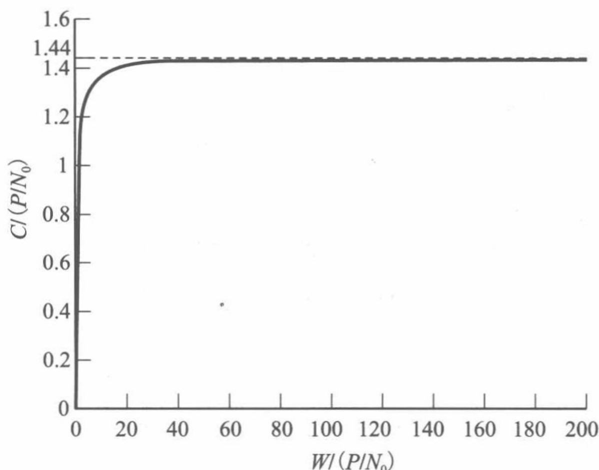


图 12-16 信道容量与带宽的曲线图

在任何实际的通信系统中，必然有

$R<C$。如果采用 AWGN 信道，有

$$R < W\log(1+\frac{P}{N_0W}) \tag{12.6.2}$$

两边同时除以 W，并定义 $r=\frac{R}{W}$为频谱比特率(或带宽利用率)，于是得到

$$r < \log(1+\frac{P}{N_0W}) \tag{12.6.3}$$

若定义$\mathscr{E}_b$ 为单位比特能量⊖，则$\mathscr{E}_b=\frac{P}{R}$。代入上式，有

672

$$r < \log(1+r\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}) \tag{12.6.4}$$

或等价为

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} > \frac{2^r-1}{r} \tag{12.6.5}$$

图 12-17 反映了上述关系。该方程给出了通信系统中两个重要参数之间的关系。这两个参数分别是频谱比特速率 r 和每比特信噪比$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}$，它们分别是通信系统中的带宽效率和功率效率的量度。r 值越大，表示系统的带宽效率越高。$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}$值小到可以达到一定的差错率，系统的功率效率越高。

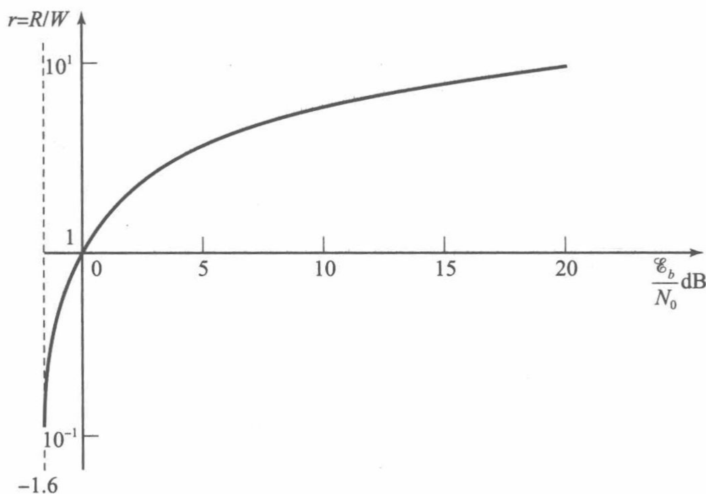


图 12-17 最佳系统中频谱比特率与 SNR/bit 的关系

由下式

$$r=\log(1+r\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}) \quad 或 \quad \frac{\mathscr{E}_b}{N_0}=\frac{2^r-1}{r} \tag{12.6.6}$$

定义的曲线将平面分为了两个区域。第一个区域(曲线下方)内有可能实现可靠的通信；第二个区域(曲线上方)则不可能实现可靠的通信。任何通信系统的性能可以由平面中的一点表示，该点距离曲线越近，则表示系统的性能越接近最佳系统。由图中可以看出，当 r 趋于 0，有

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}=\ln 2=0.693\approx -1.6\text{dB} \tag{12.6.7}$$

该值表示可靠通信的绝对最小值。换而言之，对于一个可靠的通信，必须有

⊖ 注意 P=能量/秒，R=比特/秒，因此，P/R=能量/比特=$\mathscr{E}_b$。

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} > 0.693 \tag{12.6.8}$$

673

在图 12-17 中，当 $r \ll 1$，表示高带宽的情况，此时主要考虑功率限制的问题。这种情况通常被称为*功率受限情况*。高维度的信号，如正交、双正交和单一信号，都可以应用于此情况中。$r \gg 1$ 对应于窄带宽的情况，因此，称之为*带宽受限情况*。此时，常常应用具有密集星座图的低维度信号(如 PAM、QAM 以及 PSK)。

信息传输定理。在 12.2 节中，介绍了信源编码的基本极限问题。这些基本极限是由信源熵来表述的。熵给出了能够无差错重构信源的码率下限。若要在信道容量为 C 的信道中可靠地传输某信源 U，则必须满足

$$H(U) < C \tag{12.6.9}$$

这一关系式定义了信息传输中的基本极限。注意，这里我们假定任意信源输出都可以通过信道进行传输。

例 12.6.1 概率为 $P(X=0)=\frac{1}{4}$ 的二进制信源在交叉概率为 ϵ 的二进制对称信道中传输。确定使信源能够可靠传输的 ϵ 的范围。假定信道对每个信源输出能够使用一次。

解：根据题意，有

$$H(U) = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} = 0.8113$$

对于可靠通信，需要满足 $H(U)<C$。又有 BSC 信道容量由式 $C=1-H_b(\epsilon)$ 给出，因此，必须满足

$$0.8113 < 1 - H_b(\epsilon)$$

或

$$H_b(\epsilon) < 0.1887$$

这是一个非线性方程，需要用数值方法求解。求解得到 $H_b(0.0288) \approx 0.1887$。同时求的 ϵ 存在两个可接受的值区域，即 $0 \leqslant \epsilon < 0.028$ 和 $0.9718 < \epsilon \leqslant 1$。◀

12.7 小结及深入阅读

本章介绍了信源的数学模型以及信息为离散随机变量时的度量方法。根据奈奎斯特、哈特利以及香农的创造性工作，信息的度量表述为熵，或有记忆信源的熵速率。本章同时也介绍了两个随机变量间的联合熵、条件熵以及互信息。随后，讲述了香农信源编码定理、霍夫曼编码以及用于无损数据压缩的 Lempel-Ziv 算法，我们了解到熵(或熵速率)是信源可以进行无损压缩的基本极限。

674

我们接着研究了通信信道的数学模型并介绍了一些重要的信道模型，包括 DMS、BSC、二进制输入 AWGN 信道具有输入功率限制的离散时间的 AWGN 信道以及限带的连续时间高斯波形信道。还介绍了信道容量这一重要的概念，并且阐述了香农的有噪信道编码定理，最后就信息传输理论的相关探讨做了本章的小结。

关于信息论的内容，有许多优秀的著作。有兴趣的读者可以参考下列文献：Gallager(1968)，Blahut(1987)，以及 Cover 和 Thomas(2006)的相关书籍，当然还有香农的原著(1948a，1948b)。

习题

12.1 一个离散信源的字符集为$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$，相应的概率为
$\{0.1, 0.2, 0.3, 0.05, 0.15, 0.2\}$。试求该信源的熵，并将其结果与具有相同字符集的均匀分布的信源熵相比较。

12.2 设随意变量 X 是大小为 n 的均匀分布的离散无记忆信源的输出，求其信源熵。

12.3 证明：$H(X) \geqslant 0$，当且仅当 X 是确定信号时成立。

12.4 设 X 是几何分布的随机变量，即

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1,2,3,\dots$$

1. 求 X 的信源熵。

2. 已知 $X>K$，其中 K 是正整数，则 X 的熵是多少？

12.5　令 $Y=g(X)$，其中 g 表示一个确定性函数，证明：$H(Y)\leqslant H(X)$，并指出何时等号成立。

12.6　某个信源可以用一个带宽为 6000Hz 的带宽受限过程来建模。该过程使用高于奈奎斯特速率的抽样速率进行抽样，以提供 2000Hz 的保护带。已知所得到的抽样取值集合 $\mathscr{A}=\{-4, -3, -1, 2, 4, 7\}$，相应的概率为 0.2、0.1、0.15、0.05、0.3、0.2。则离散时间信源的熵是多少单位比特/输出(抽样值)，此信源产生的信息量又是多少 bps？

12.7　设 X 代表分布于集合 $\mathscr{A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ 的随机变量，相应的概率为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$。而 Y 代表定义于同一集合的另一个随机变量，但其为均匀分布。证明

$$H(X)\leqslant H(Y)$$

当且仅当 X 也是均匀分布时等号成立。(提示：首先证明不等式 $\ln x\leqslant x-1$，当 $x=1$ 时等号成立，然后将此不等式应用到 $\sum_{n=1}^{N}p_n\ln\left(\dfrac{\frac{1}{N}}{p_n}\right)$ 中。)

12.8　随机变量 X 分布于由所有正整数 1，2，3，…构成的集合上，且相应的概率分别为 $p_1, p_2, p_3, \cdots$，已知该随机变量的期望值为 m，即

$$\sum_{i=1}^{\infty}ip_i=m$$

证明：对于所有满足上述条件的随机变量中，定义为下式的几何随机变量具有最大的熵：

$$p_i=\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-1}\quad i=1,2,3,\cdots$$

(提示：信源熵定义两种分布，一种是如上所述的几何分布，另一种是任意分布，用 q_i 表示，然后使用习题 12.7 的方法进行证明。)

12.9　一个无记忆信源的字符集为 $\mathscr{A}=\{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$，相应的概率为 $\{0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.05, 0.25, 0.3\}$。

1. 求出信源的熵。
2. 假设信源根据下面的量化准则进行量化：

$$\begin{cases}q(-5)=q(-3)=-4\\ q(-1)=q(0)=q(1)=0\\ q(3)=q(5)=4\end{cases}$$

求量化后信源的熵。

12.10　根据式(12.1.13)和式(12.1.14)给出的随机过程的熵速率的两个定义，证明：对于 DMS，系统熵速率与熵相等。

12.11　马尔科夫过程是具有一阶记忆的过程，也就是对于所有 n，该过程满足

$$p(x_n|x_{n-1},x_{n-2},x_{n-3},\cdots)=p(x_n|x_{n-1})$$

证明：马尔科夫过程的熵速率为 $H(X_n|X_{n-1})$。

12.12　利用方程 12.1.7，证明：

$$H(X|Y)=\sum_{y}p(y)H(X|Y=y)$$

12.13　设 X 和 Y 表示两个联合分布的离散随机变量。

1. 证明：

$$H(X)=-\sum_{x,y}p(x,y)\log p(x)$$

和

$$H(Y)=-\sum_{x,y}p(x,y)\log p(y)$$

2. 利用上面的结果证明：

$$H(X,Y)\leqslant H(X)+H(Y)$$

指出何时等式成立。(提示：考虑乘积集合 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 上的两个分布 $p(x, y)$ 和 $p(x)p(y)$，再把习题 12.7 已经证明的不等式应用到 $\sum_{x,y}p(x,y)\log\dfrac{p(x)p(y)}{p(x,y)}$。)

12.14　利用习题 12.13 的结论证明：

$$H(X|Y)\leqslant H(X)$$

当且仅当 X 和 Y 相互独立时等号成立。

12.15　证明通常情况下下面不等式成立：

$$H(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}H(X_i)$$

并指出等号何时成立。

12.16　假设 BSS 产生一个长度为 n 的输出序列。

1. 该序列全为 0 的概率为多少？
2. 该序列全为 1 的概率为多少？
3. 该序列前面 k 个码元为 1，后面 $n-k$ 个码元为零的概率是多少？
4. 该序列含有 k 个 1 和 $n-k$ 个零的概率是多少？
5. 如果不是 BSS 而是 $P(X_i=1)=p$ 的二进制 DMS，则上述概率又如何变化？

12.17　长度为 10 000 的二进制序列，估算其含有 3000 个 0 和 7000 个 1 的概率。

12.18　一个无记忆三进制信源的输出字符集为 a_1，a_2 和 a_3，相应的概率为 0.2，0.3 和 0.5，产生长度为 1000 的序列。

1. 信源输出中典型序列的数目大概为多少？
2. 典型序列与非典系序列的比例为多少？
3. 典型序列产生的概率是多少？
4. 描述所有输出序列所需的比特数是多少？
5. 只描述典型输出序列所需的比特数是多少？
6. 最有可能生成的序列是什么？其概率是多少？
7. 最有可能生成的序列是典型序列吗？

12.19　一个信源的字符集为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，相应的概率为 $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$。

1. 求出信源熵。

2. 无差错恢复时表示该信源所需的最小平均码长是多少？
3. 设计该信源的霍夫曼编码，并比较霍夫曼编码的平均长度与信源熵。
4. 设计信源二次扩展（每次取两个字符）的霍夫曼编码。平均码字长度是多少？每信源输出所需的平均二进制字符数是多少？
5. 初始信源的霍夫曼编码与二次扩展信源的霍夫曼编码相比较，哪种编码方案更有效？

12.20　对具有 n 个输出字符、相应概率为 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ 的信源进行霍夫曼编码。证明该信源的平均码长等于信源熵。

12.21　证明：对于任意概率分布的信源，{01，100，101，1110，1111，0011，0001}不能成为霍夫曼编码。

12.22　信源输出字符集对应的概率为{0.05，0.1，0.15，0.17，0.18，0.22，0.13}，使用 0、1 和 2 作为字符对其进行三进制霍夫曼编码。则所得的平均码长是多少？比较平均码长与信源熵。（为了使比较更有意义，熵的表达式中用什么为底来计算对数?）

12.23　信源输出字符集对应的概率为{0.05，0.1，0.15，0.17，0.13，0.4}，对其进行三进制霍夫曼编码设计。（提示：可以添加一个概率为零的虚构信源输出。）

12.24　一个离散无记忆信源的字符集为{－5，－3，－1，0，1，2，3}，相应的概率为{0.08，0.2，0.12，0.15，0.03，0.02，0.4}。

1. 为该信源设计霍夫曼编码，求出平均码字长度 $\overline{R}$。
2. 利用第 1 问的结果，设计出信源熵，并求出你所设计出的霍夫曼编码的效率。效率定义为 $\eta=\frac{H(X)}{\overline{R}}$。
3. 假设信源根据下面的量化准则进行量化：
$$\hat{X}=\begin{cases}-2, & X=-5,-3\\ 0, & X=-1,0,1\\ 2, & X=2,3\end{cases}$$
实现 $\hat{X}$ 的完全重构所需的绝对最小速率是多少（比特/符号）？
4. 观察长度为 10000 的量化后信源序列（即 $\hat{X}$），序列中最可能出现的数是多少？典型序列中的数是多少？
5. 如果在量化前对原信源进行二次扩展（即每次取两个字符），并对扩展后信源进行霍夫曼编码，计算每个独立信源符号的平均码字长度是多少？求出平均码字长度的可能范围。

12.25　一个离散无记忆信源的字符集为 $\mathscr{X}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，相应的概率为{1/32，1/8，1/2，1/16，1/32，1/4}。

1. 为该信源设计霍夫曼编码，并计算出霍夫曼编码的平均码长。
2. 通过对信源的二次扩展进行编码（换句话说，每次取两个字符，并对此信源设计霍夫曼编码），能否改进霍夫曼编码？为什么？
3. 在第 1 问中，有办法提高霍夫曼编码的性能吗？（提高性能，是指设计出具有更小平均码长的码字。）

12.26　一个离散无记忆信源的字符集为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，相应的概率为{0.1，0.2，0.05，0.3，0.35}。

1. 该信源能否在保证无损重建的条件下，以 2 比特/信源符号的速率进行压缩？
2. 考虑此信源产生的所有长度为 1000 的序列，这些序列中的多少是可能出现的？用指数形式写出答案。
3. 第 2 问中的序列中大约有多少是典型序列？用指数形式写出答案。
4. 假定信源中的两个字符合并成一个新字符 b，比如说 $b=\{a_i, a_j\}$。为了使合并后的信源（具有 4 个输出而不是 5 个输出）能够在无损恢复的条件下以 1.5 比特/信源符号的速率进行压缩，问应该将哪两个字符合并为新的字符 b?

12.27　将输出字符集为 $\{a_i\}_{i=1}^{7}$，相应的概率为{0.11，0.18，0.1，0.2，0.25，0.05，0.11}的一个离散无记忆信源无差错地发送到目的地。

1. 传输此信源所需的最小速率是多少？
2. 为此信源设计霍夫曼编码。霍夫曼编码的平均码长是多少？这个平均码长与第 1 问中结果的关系如何？
3. 对此信源的输出进行分组，构成一个新的信源，分组方式如下：$b_1=\{a_1, a_2\}$，$b_2=\{a_3, a_4\}$，$b_3=\{a_5, a_6\}$，$b_4=\{a_7\}$。对这个新信源重新回答第 1 问的问题。

12.28　确定二进制信源序列 0001001000000110000100000001000000101000010000001101000000001100 的 Lempel-Ziv 信源编码。并且从该 Lempel-Ziv 码中恢复出原始序列。（提示：需要两次二进制序列变换来确定字典的大小。）

12.29　根据 $H(X)$ 和 $H(X|Y)$ 的定义，证明：
$$I(X;Y)=\sum_{x,y}p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$
并根据习题 12.7 的方法，证明 $I(X;Y)\geqslant 0$，

当且仅当 X 和 Y 相互独立时等号成立。

12.30 证明：

1. $I(X;Y)\leqslant\min\{H(X),H(Y)\}$。
2. 如果 $|\mathscr{X}|$ 和 $|\mathscr{Y}|$ 分别表示集合 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的大小，则有 $I(X;Y)\leqslant\min\{\log|\mathscr{X}|,\log|\mathscr{Y}|\}$。

12.31 证明 $I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)=H(Y)-H(Y|X)=I(Y;X)$。

12.32 X 代表一个二进制随机变量，且 $P(X=0)=1-P(X=1)=p$，Y 是依赖于 X 的二进制随机变量，且 $P(Y=1|X=0)=P(Y=0|X=1)=\varepsilon$。

1. 求出 $H(X)$，$H(Y)$，$H(Y|X)$，$H(X,Y)$，$H(X|Y)$ 和 $I(X;Y)$。
2. 对于给定的 ε，试求使 $I(X;Y)$ 最大化的 p。
3. 对于给定的 p，试求使 $I(X;Y)$ 最大化的 ε。

12.33 证明：

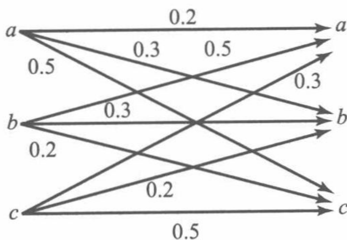
$$I(X;YZW)=I(X;Y)+I(X;Z|Y)+I(X;W|ZY)$$

怎么解释这种关系？

12.34 设 X，Y 和 Z 是三个是离散随机变量。

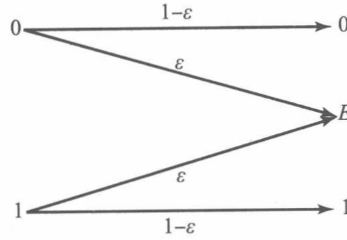
1. 证明：如果 $p(x,y,z)=p(z)p(x|z)p(y|x)$，则有
$$I(X;Y|Z)\leqslant I(X;Y)$$
2. 证明：如果 $p(x,y,z)=p(x)p(y)p(z|x,y)$，则有
$$I(X;Y)\leqslant I(X;Y|Z)$$
3. 对于每种情况，列举出满足严格不等式的例子。

12.35 求出习题 12.35 图所示的信道容量。



习题 12.35 图

12.36 信道如习题 12.36 图所示，称为二进制删除信道。求出此信道的容量，并以 ε 为变量画出信道容量的曲线。



习题 12.36 图

12.37 求出 n 个具有相同交叉概率 ε 的二进制对称信道的级联容量。当信道数量趋于无穷大时，信道容量为多少？

12.38 根据 Stirling 近似式 $n!\approx n^n\mathrm{e}^{-n\sqrt{2\pi n}}$，证明：

$$\binom{n}{n\varepsilon}\approx 2^{nH_b(\varepsilon)}$$

12.39 一个二进制输入、连续输出 AWGN 信道的输入为 $\pm A$，噪声方差为 σ^2（见例 12.4.2），证明其容量可由下式给出：

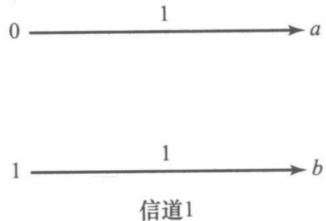
$$C=f\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

其中，

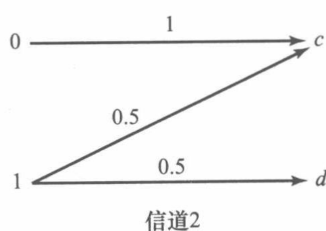
$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(u-x)^2/2}\log_2\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2xu}}\mathrm{d}u$$

12.40 以某个信道转移概率为元素（例如 $p(y_i|x_j)$）构成的矩阵，称为信道概率转移矩阵。如果信道概率转移矩阵的每一行都是其他行的置换，每一列也是其他列的置换，则信道称为对称信道。证明在对称信道中，达到信道容量时的输入概率是均匀分布。求出该信道容量的大小。

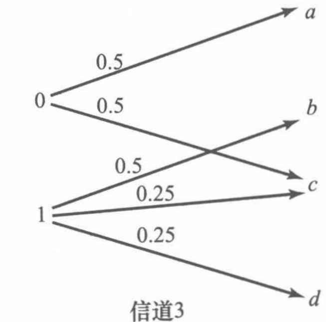
12.41 观察习题 12.41 图所示的信道 1、信道 2 和信道 3。



信道1



信道2



信道3

习题 12.41 图

1. 求出信道 1 的容量。达到容量的输入分布是什么？

2. 求出信道2的容量。达到容量的输入分布是什么？

3. 设C表示第三个信道的容量，C_1和C_2分别表示第一个信道和第二个信道的容量。下列关系哪一个正确，为什么？

$$(a)C < \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

$$(b)C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

$$(c)C > \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

12.42 设C表示输入集合为$\mathscr{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，输出集合为$\mathscr{Y}=\{y_1, y_2, \cdots, y_M\}$的离散无记忆信道的容量。证明：$C \leqslant \min\{\log M, \log N\}$。

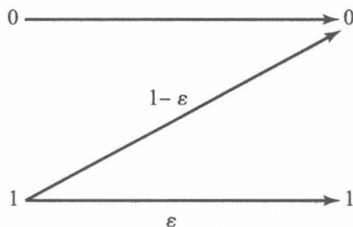
12.43 信道C(也称为Z信道)如习题12.43图所示。

1. 求出达到容量时的输入概率分布。

2. 对于$\varepsilon=0$，$\varepsilon=1$，$\varepsilon=0.5$的情况，输入分布和容量是多少？

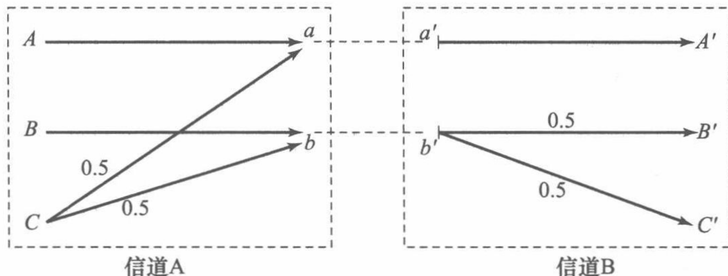
3. 证明：如果n个信道进行级联，所得信道将等于满足$\varepsilon_1=\varepsilon^n$的Z信道。

4. 当$n\to\infty$时，等效Z信道的容量是多少？



习题12.43图

12.44 如习题12.44图所示，求出信道A和信道B的容量。级联信道AB的容量是多少？



习题12.44图

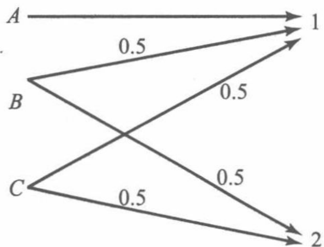
12.45 一个加性高斯白噪声信道，带宽为1MHz，功率为10W，噪声功率谱密度为$\frac{N_0}{2}=10^{-9}\,\mathrm{W/Hz}$，求其信道容量。

12.46 信道C_1是一个加性高斯白噪声信道，带宽为W，功率为P，噪声功率谱密度$\frac{N_0}{2}$。信道C_2是一个具有与C_1相同带宽和功率的加性高斯白噪声信道，但其噪声功率谱密度为$S_n(f)$。假定两个信道的总噪声功率是相同的，即

$$\int_{-W}^{W} S_n(f)\mathrm{d}f = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2}\mathrm{d}f = N_0 W$$

哪个信道具有更大的容量？请给出直观的解释。

12.47 如习题12.47图所示信道，求出其信道容量以及达到该容量时的输入分布。



习题12.47图

12.48 $(\mathscr{X}_1, p(y_1 \mid x_1), \mathscr{Y}_{11})$和$(\mathscr{X}_2, p(y_2 \mid x_2), \mathscr{Y}_2)$分别表示两个离散无记忆信道，相应的容量是分别是$C_1$和$C_2$。由$(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2, p(y_1 \mid x_1)p(y_2 \mid x_2), \mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2)$定义一个新信道，该信道是“乘积信道”，模拟$x_1 \in \mathscr{X}_1$和$x_2 \in \mathscr{X}_2$同时在两个无交叉干扰信道中发射的情形。证明：此新信道的容量是C_1和C_2之和。

12.49 $(\mathscr{X}_1, p(y_1 \mid x_1), \mathscr{Y}_1)$和$(\mathscr{X}_2, p(y_2 \mid x_2), \mathscr{Y}_2)$分别表示两个离散无记忆信道，其输入为$\mathscr{X}_i$，输出为$\mathscr{Y}_i$，条件概率为$p(y_i \mid x_i)$。进一步假定$\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2 = \varnothing$和$\mathscr{Y}_1 \cap \mathscr{Y}_2 = \varnothing$。定义这两个信道的和作为一个新信道，输入集合为$\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$，输出集合为$\mathscr{Y}_1 \cup \mathscr{Y}_2$。条件概率为$p(y_i \mid x_i)$，其中$i$表示输入信道属于哪个$\mathscr{X}$。这模拟了两条信道并行通信的情形，并且在每个传输间隔，只用一个信道，输入和输出集合是分离的，因此在接收端，不会对使用哪个信道产生歧义。

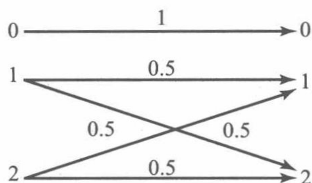
1. 证明：这个信道的容量满足$2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$，其中C_1和C_2是每个信道的容量。

2. 利用第1问的结果，证明，如果$C_1 = C_2 = 0$，仍然有$C=1$。换句话说，证明使用两个零容量的信道每次可以传输1比特。你怎么

理解这个结果？

3. 计算如习题 12.49 图所示的信道容量。

675
~
684



习题 12.49 图

12.50 X 是一个二进制无记忆信源，$P(X=0)=0.3$。在交叉概率 $\varepsilon=0.1$ 的二进制对称信道上传送这个信源的输出。

1. 假设信源直接连接在信道上，也就是没有采用编码，接收端的差错概率是多少？
2. 可靠传输的可能 ε 取值范围是多少（当然要进行编码）？

上机习题

12.1 霍夫曼编码

本题目的是使用 MATLAB 设计霍夫曼编码。离散无记忆信源输出来自于字符集 $\mathscr{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_9\}$，相应的概率为

$$p=\{0.2,0.15,0.13,0.12,0.1,0.09,0.08,0.07,0.06\}$$

1. 设计霍夫曼编码，并简要画出对应的码树。为字符集中的 9 个符号指定码字。
2. 计算霍夫曼编码的平均码长。
3. 求出信源的熵，并且与霍夫曼编码的平均码长相比较。

12.2 霍夫曼编码

本题目的是使用 MATLAB 设计霍夫曼编码。离散无记忆信源输出来自于字符集 $\mathscr{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$，相应的概率为

$$p=\{0.1,0.3,0.05,0.09,0.21,0.25\}$$

1. 求信源的熵。
2. 设计霍夫曼编码，并简要画出对应的码树。为字符集中的 6 个符号指定码字。
3. 计算第 2 问中霍夫曼编码的效率。
4. 对长度为 2 的信源序列设计霍夫曼编码，并简要画出对应的码树。为长度为 2 的符号指定码字并计算霍夫曼编码的效率。比较序列长度为 2 的效率与序列长度为 1 的效率。

12.3 霍夫曼编码

离散无记忆信源输出来自于字符集 $\mathscr{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_9\}$，相应的概率为

$$p=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256},\frac{1}{256}\right\}$$

1. 设计霍夫曼编码，并简要画出对应的码树。为字符集中的 9 个符号指定码字。
2. 计算霍夫曼编码的平均码长、信源的熵、霍夫曼编码的效率。
3. 指出在什么条件下，霍夫曼编码的效率等于 1。

12.4 对印刷英文文本进行霍夫曼编码

字符集中的字符在印刷英文文本中出现的概率如下表所示：

字符	概率	字符	概率	字符	概率
A	0.0642	B	0.0127	C	0.0218
D	0.0317	E	0.1031	F	0.0208
G	0.0152	H	0.0467	I	0.0575
J	0.0008	K	0.0049	L	0.0321
M	0.0198	N	0.0574	O	0.0632
P	0.0152	Q	0.0008	R	0.0484
S	0.0514	T	0.0796	U	0.0228
V	0.0083	W	0.0175	X	0.0013
Y	0.0164	Z	0.0005	Space	0.1859

1. 计算印刷英文文本的熵。
2. 设计印刷英文文本的霍夫曼编码。
3. 计算码字的平均码长和霍夫曼编码的效率。

12.5 二进制对称信道的容量

二进制数据经过 BPSK 调制后在加性高斯白噪声信道中传输，且在接收端通过最佳匹配滤波器对接收到的码字进行硬判决。

1. 以 γ 为变量画出信道的错误概率曲线，这里

$$\gamma=\frac{\mathscr{E}}{N_0} \tag{12.7.1}$$

这里，$\mathscr{E}$是每个 BPSK 信号的能量，$n_0/2$ 是加性高斯白噪声的功率谱密度。假定 γ 的范围为 -20dB 到 20dB。

2. 绘出以 γ 为变量的信道容量曲线。

12.6 二进制 AWGN 信道的容量

假设二进制加性高斯白噪声信道由两个输入量化电平 A 和 $-A$，以及均值为 0，方差为 σ_2 的高斯噪声模拟合成。这里有$\mathscr{X}=\{-A, A\}$，$\mathscr{Y}=\mathbf{R}$，$p(y|X=A)\sim\mathcal{N}(A, \sigma^2)$以及$p(y|X=-A)\sim\mathcal{N}(-A, \sigma^2)$。以 A/σ 为变量，绘出信道容量曲线。（提示：利用习题 12.39 的结论。）

12.7 限带加性高斯白噪声的容量

本题目的是使用 MATLAB 计算限带加性高斯

白噪声的容量。这个信道容量可由下式给出：

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)$$

其中，W 是信道的带宽，P 是平均传输功率，$N_0/2$ 是加性高斯白噪声的功率谱密度。

1. 画出带宽 $W=3000\text{Hz}$ 的信道容量，横坐标为 P/N_0，P/N_0 取值范围是 -20dB 到 30dB。
2. 画出当 $P/N_0=25\text{dB}$ 时，作为带宽 W 的函数的信道容量。当 $W\to\infty$ 时，信道容量的极限是多少？

12.8 限带加性高斯白噪声的容量

AWGN 容量可由下式给出：

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)$$

此容量也可以由 $\mathscr{E}_b/N_0$ 表示，就是确定差错率的 SNR/bit。由于平均功率 $P=\mathscr{E}_b/T_b=C\,\mathscr{E}_b$，其中 $1/T_b=C$ 是单位为 bps 的速率，这个信道容量的计算公式可以表示为

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(1+\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}\frac{C}{W}\right)$$

如果认为 C/W 是 $\mathscr{E}_b/N_0$ 的一个函数，可以得

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{W}}-1}{\frac{C}{W}}$$

1. $\mathscr{E}_b/N_0$ 是归一化容量 C/W 的一个函数，画出取值范围是 $0.1\leqslant C/W\leqslant 10$ 的图形。也可以很方便地画出函数 SNR/bit 的图形 $(10\log_{10}\mathscr{E}_b/N_0)$。
2. 随着 $C/W\to 0$，计算 SNR/bit 的极限。

685~688

第13章

可靠通信的编码

第 12 章介绍了噪声信道中信源编码(数据压缩)的基本界限及数据传输。无错信源压缩的基本界限由熵(或熵速率——对于有记忆信源来说)给出，而可靠通信的基本约束条件由信道容量给出。此外还介绍了达到理论预测边界的一些信源编码算法。本章介绍信道编码方法，是为了达到香农噪声信道编码理论给出的边界，即信道容量。可以证明要达到信道容量比设计出优良的信源编码要困难得多。

13.1 编码的优点

本节从一道例题开始，说明编码如何帮助我们在数字通信中获得较低的错误概率。

例 13.1.1 在一个数字通信系统中，发送功率为 P，信源的速率为 R，系统采用 $M=4$PSK 的信号(QPSK)，源码的每两个比特映射到图 13-1 所示星座图的 4 个信号之一。因此$\mathscr{E}_b=\dfrac{P}{R}$，星座图中任意两个信号间的最小欧氏距离为

$$d_{\min}^2=4\,\mathscr{E}_b=4\,\frac{P}{R} \tag{13.1.1}$$

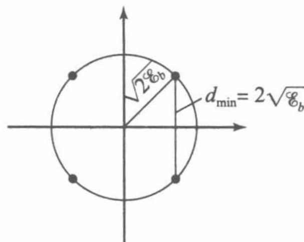


图 13-1 4PSK 方案的信号星座图

假设不用二维 QPSK 调制，而是采用 3 个正交信号传输同样的两个比特，例如使用 $\psi(t)$，$\psi(t-T)$ 和 $\psi(t-2T)$，在$[0, T]$区间外 $\psi(t)=0$,并且

689

$$\int_0^T \psi^2(t)\,\mathrm{d}t=1 \tag{13.1.2}$$

显然，这是一组维数为 3 的正交信号集。采用在这些正交基信号，可以构建如下 4 个信号

$$s_1(t)=\sqrt{\mathscr{E}}(+\psi(t)+\psi(t-T)+\psi(t-2T)) \tag{13.1.3}$$
$$s_2(t)=\sqrt{\mathscr{E}}(+\psi(t)-\psi(t-T)-\psi(t-2T)) \tag{13.1.4}$$
$$s_3(t)=\sqrt{\mathscr{E}}(-\psi(t)-\psi(t-T)+\psi(t-2T)) \tag{13.1.5}$$
$$s_4(t)=\sqrt{\mathscr{E}}(-\psi(t)+\psi(t-T)-\psi(t-2T)) \tag{13.1.6}$$

或等价表示为矢量形式

$$\boldsymbol{s}_1=\sqrt{\mathscr{E}}(+1,+1,+1) \tag{13.1.7}$$
$$\boldsymbol{s}_2=\sqrt{\mathscr{E}}(+1,-1,-1) \tag{13.1.8}$$
$$\boldsymbol{s}_3=\sqrt{\mathscr{E}}(-1,-1,+1) \tag{13.1.9}$$
$$\boldsymbol{s}_4=\sqrt{\mathscr{E}}(-1,+1,-1) \tag{13.1.10}$$

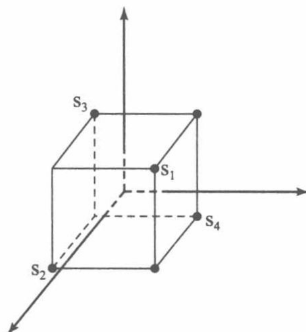


图 13-2 位于立方体顶点的码字

图 13-2 给出了三维空间中对应的信号星座图。显然，对于这样选择的码字，每个码字与其他码字在两个分量上都不同。因此，任意两个信号间的欧氏距离为

690

$$d_{ij}^2=|\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_j|^2=8\,\mathscr{E},\quad i\neq j \tag{13.1.11}$$

容易求出能量$\mathscr{E}$与每比特能量$\mathscr{E}_b$ 的关系。由于每个波形传送了 2 比特的信息，

$$2\,\mathscr{E}_b=3\,\mathscr{E} \tag{13.1.12}$$

因此，

$$\mathscr{E}=\frac{2}{3}\,\mathscr{E}_b=\frac{2}{3}\,\frac{P}{R} \tag{13.1.13}$$

将式(13.1.13)代入式(13.1.11)，得到

$$d_{ij}^2 = \frac{16}{3}\frac{P}{R}, \quad i \neq j \tag{13.1.14}$$

上式与 4PSK 调制时的最小距离相比较，发现最小欧氏距离的平方的倍增因子为

$$\frac{d_{ij}^2}{d_{4PSK}^2} = \frac{\frac{16}{3}\frac{P}{R}}{4\frac{P}{R}} = \frac{4}{3} \tag{13.1.15}$$

因为错误概率是最小欧氏距离的减函数，所以这种新的信号传送方式降低了发生错误的概率。实际上，错误概率的降低等效于发送功率乘以因子 4/3 带来的错误概率降低，这相当于 1.25dB 的功率增益。当然，获得这个增益是有代价的。在 $2/R$ 的时间间隔(即传送 2 比特信息的时间)内需要传送 3 个信号，这些信号占用的宽度减少了 2/3，带宽相应地增加到原先的 3/2 倍。获得增益带来的另一个问题是译码方案复杂度的增加。◀

上面的例题初步说明了信道编码方案的作用。通过编码能够获得更低的错误概率(等效于更高效的 SNR)，这是以带宽[⊖]和系统复杂度的增加为代价的。在前面的例题中，维数从 2 增加到 3(从 QSPA 到三维信号)。这等价于下面的映射：

$$(+1,+1) \to (+1,+1,+1)$$
$$(+1,-1) \to (+1,-1,-1)$$
$$(-1,-1) \to (-1,-1,+1)$$
$$(-1,+1) \to (-1,+1,-1)$$

从映射中可以看出，编码的作用是在两个信息位上增加了奇偶校验位。奇偶校验位是这样增加的：保持结果中+1 的个数为奇数(或者等价地说，−1 的个数为偶数)。

691

在信号波形编码的一般方案中，长度 $k=RT$ 的原始序列被映射到长度为 n 的序列

$$\boldsymbol{s}_i = \sqrt{\mathscr{E}}(\underbrace{\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1}_{n}) \tag{13.1.16}$$

这些点都对应着边长为 $2\sqrt{\mathscr{E}}$的超立方体的顶点。比值

$$R_c = \frac{k}{n} \tag{13.1.17}$$

称为**码率**。n 维空间内的超立方体有 2^n 个顶点，需要选择其中的 $M=2^k$ 个作为码字。显然，选择 2^k 个顶点使得它们之间的距离尽可能地远，从而使得它们之间的欧氏距离较大，以降低错误概率。在例 13.1.1 中有 $k=2$ 和 $n=3$。从三维立方体的 $2^3=8$ 个顶点中选出 $2^k=4$ 个点使它们尽可能地互相远离。编码的速率为 $R_c=2/3$。

假设选定超立方体的 2^k 个顶点作为码字，任意两个码字至少有 $d_{\min}^{\mathrm{H}}$个不同的元素。这个参数称为**码字的最小汉明距离**，13.2 节将会给出更准确的定义。欧氏距离与汉明距离间的关系非常简单，如果码字 $\boldsymbol{s}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_j$ 有 d_{ij}^{H}个位置不同，那么它们之间的欧氏距离 d_{ij}^{E}与汉明距离 d_{ij}^{H}之间的关系满足

$$(d_{ij}^{\mathrm{E}})^2 = \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n \\ l: s_i^l \neq s_j^l}} (\pm 2\sqrt{\mathscr{E}})^2 = 4\mathrm{d}_{ij}^H \mathscr{E} \tag{13.1.18}$$

这就是说，可以用最小汉明距离来表示最小欧氏距离

$$(d_{\min}^{\mathrm{E}})^2 = 4d_{\min}^{\mathrm{H}}\mathscr{E} \tag{13.1.19}$$

若传送 $\boldsymbol{s}_i$，根据一致极限准则(见 8.4.2 节)，码字错误率的上界为

$$P_{M_i} \leqslant MQ\left(\sqrt{\frac{4d_{\min}^{\mathrm{H}}\mathscr{E}}{2N_0}}\right) \leqslant \frac{M}{2}\mathrm{e}^{-d_{\min}^{\mathrm{H}}\mathscr{E}/N_0} \tag{13.1.20}$$

⊖ 存在增加码字间的欧氏距离而不增加带宽的编码调制方法。

最后一步中用到了第 5 章中介绍的 Q 函数的边界。注意，每个码字的能量为 $n\mathscr{E}$，且必须等于 PT，从而有

692

$$\mathscr{E}=\frac{PT}{n}=\frac{RT}{n}\mathscr{E}_b=\frac{k}{n}\mathscr{E}_b=R_c\mathscr{E}_b \tag{13.1.21}$$

由 $\mathscr{E}_b=\frac{P}{R}$，可得

$$P_M\leqslant\frac{M}{2}\mathrm{e}^{-d_{\min}^{H}R_c\mathscr{E}_b/N_0} \tag{13.1.22}$$

(由于界限与 i 无关，因此可以删除下标 i。) 如果不经编码即选用 k 维超立方体的所有顶点，而不是 n 维超立方体顶点中的 2^k 个顶点，将得到下面的错误概率一致极限公式

$$P_M\leqslant MQ\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)\leqslant\frac{M}{2}\mathrm{e}^{-\mathscr{E}_b/N_0} \tag{13.1.23}$$

比较两个极限可以发现，编码得到的功率增益等价于

$$G_{\text{编码}}=d_{\min}^{\mathrm{H}}R_c \tag{13.1.24}$$

称为*渐近编码增益*，简称为*编码增益*。可以看出，编码增益是最小汉明距离和码率的函数，通常 $R_c<1$ 且 $d_{\min}^{\mathrm{H}}\geqslant1$，所以编码增益可能大于 1 也可能小于 1。存在多种编码方案能够提供良好的编码增益，编码增益的定义强调，对于给定的 n 和 k，能使最小汉明距离达到最大的编码是最优编码。

为了研究信道编码中带宽的要求，先来考虑不使用编码时的情况，此时发送一个比特所用的脉冲，其宽度为

$$T_b=\frac{1}{R} \tag{13.1.25}$$

在编码之后，原先发送 k 个脉冲的时间内，现在需要发送 n 个脉冲，因此每个脉冲的持续时间降低因子为 $\frac{k}{n}=R_c$，则带宽扩展比为

$$B=\frac{W_{\text{编码}}}{W_{\text{未编码}}}=\frac{1}{R_c}=\frac{n}{k} \tag{13.1.26}$$

可以证明在 AWGN 信道中，存在编码序列 $(n_i,\ k_i)$，具有固定的码率 ($\frac{k_i}{n_i}=R_c$ 与 i 无关) 且满足

$$R_c<\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) \tag{13.1.27}$$

其中 $\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)$ 是以每次传输比特数为单位的信道容量，当 n_i 趋于无限大时，错误概率趋于零。

本章研究两种主要的编码方式：*分组码*和*卷积码*。前面已经介绍过分组码。在分组码中，信息序列分为长度为 k 的分组，每个分组映射到长度为 n 的信道输入分组，这种映射关系与前面的分组无关，即各个分组之间没有记忆性。在卷积码的编码器中，利用如图 13-3所示的长度为 k_0L 的移位寄存器，每次将 k_0 个比特存入移位寄存器，同时输出 n_0 个比特。这些比特不仅与最近输入的 k_0 个比特有关，还与移位寄存器前面的 $(L-1)k_0$ 个信息比特有关。如下所示的量

693

$$m=L \tag{13.1.28}$$

称为卷积码的*约束长度*，而卷积码总的可能状态数为 $2^{(L-1)k_0}$，卷积码的码率定义为

$$R_c=\frac{k_0}{n_0} \tag{13.1.29}$$

分组码与卷积码最大的差别在于卷积码存在记忆性。

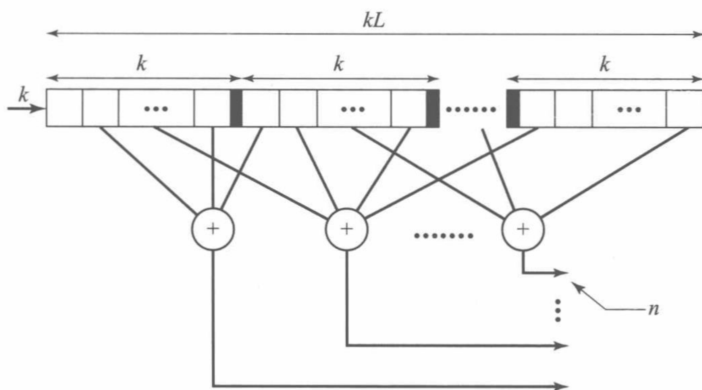


图 13-3　卷积码编码器

13.2　线性分组码

一个(n, k)分组码输出的长度为n的序列称为码字，它完全由$M=2^k$个二进制输入序列决定。输出码$\mathscr{C}$由M个码字$\boldsymbol{c}_i(1\leqslant i\leqslant 2^k)$组成，即

$$\mathscr{C}=\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_M\}$$

其中$\boldsymbol{c}_i$是长度为n，码元为 0 或 1 的序列。这样的一组码字称为码书，或简称为码。

694

定义 13.2.1　若分组码中任意两个码字的模 2 加仍是分组码的一个码字，则称该分组码为线性的。这就要求若$\boldsymbol{c}_i$和$\boldsymbol{c}_j$是码字，则$\boldsymbol{c}_i\oplus\boldsymbol{c}_j$也是码字，其中$\oplus$表示按位模 2 加。 ■

从上面的定义可以看出，线性分组码是n维空间的一个k维子空间。显然，全零序列是任何线性分组码的一个码字，因为对于任意码字$\boldsymbol{c}_i$，零序列都可以用$\boldsymbol{c}_i\oplus\boldsymbol{c}_i$表示。进一步假设线性分组码都满足以下关系：如果信息序列$\boldsymbol{x}_1$(长度k)映射到码字$\boldsymbol{c}_1$(长度为n)，$\boldsymbol{x}_2$映射到$\boldsymbol{c}_2$，则$\boldsymbol{x}_1\oplus\boldsymbol{x}_2$映射到码字$\boldsymbol{c}_1\oplus\boldsymbol{c}_2$。

例 13.2.1　(5，2)分组码定义为

$$\mathscr{C}_1=\{00000,10100,01111,11011\}$$

假设信息序列与码字的映射关系如下所示：

$$00\rightarrow 00000$$
$$01\rightarrow 01111$$
$$10\rightarrow 10100$$
$$11\rightarrow 11011$$

很容易验证该分组编码是线性的。然而，定义为

$$\mathscr{C}_2=\{00000,11100,01111,11011\}$$

的码不是线性的，因为第二个码字和第三个码字的和不是码字。 ◀

下面定义一些基本的参数以描述分组码的特征。

定义 13.2.2　两个码字$\boldsymbol{c}_i$和$\boldsymbol{c}_j$的对应位不同(即某位上一个码字为 1，而另一个码字为零)的位数称为二者的汉明距离，用$d(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)$[⊖]表示。 ■

定义 13.2.3　码字$\boldsymbol{c}_i$中非零位个数称为该码字的汉明重量(简称重量)，用$w(\boldsymbol{c}_i)$表示。 ■

定义 13.2.4　任意两个不同码字间汉明距离的最小值，称为码的最小距离，即

⊖ 汉明距离用d表示，欧氏距离用d^E表示。

$$d_{\min} = \min_{\substack{c_i, c_j \\ c_i \neq c_j}} d(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) \tag{13.2.1}$$

695

■

定义 13.2.5 除全零码外的码字最小重量，称为码的最小重量：

$$w_{\min} = \min_{c_i \neq 0} w(\boldsymbol{c}_i) \tag{13.2.2}$$

■

定理 13.2.1 在所有线性分组码中，$d_{\min} = w_{\min}$。

证明： 如果 $\boldsymbol{c}$ 是一个码字，有 $w(\boldsymbol{c}) = d(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0})$。如果 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_j$ 也是码字，则 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_i \oplus \boldsymbol{c}_j$ 也是一个码字，并且 $d(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) = w(\boldsymbol{c})$。这说明在线性分组码中，对应于任意一个码字的重量，都存在两个码字间的汉明距离，同时对任意两个码字间的汉明距离，也总能找到某个码字的重量。特别低，有 $d_{\min} = w_{\min}$。 ■

生成矩阵和奇偶校验矩阵。 在(n, k)线性分组码中，信息序列[⊖] $\boldsymbol{e}_1 = (1000\cdots0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0100\cdots0)$，$\boldsymbol{e}_3 = (0010\cdots0)$，…，$\boldsymbol{e}_k = (0000\cdots1)$分别记为 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$，…，$\boldsymbol{g}_k$。其中 $\boldsymbol{g}_i$ 是长度为 n 的二进制序列。于是任意的信息序列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$都可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \tag{13.2.3}$$

其对应的码字为

$$\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{g}_i \tag{13.2.4}$$

定义该分组码的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kn} \end{bmatrix} \tag{13.3.5}$$

根据式(13.2.3)有

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{G} \tag{13.2.6}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 $1 \times k$ 的行矢量，$\boldsymbol{G}$ 为 $k \times n$ 的生成矩阵。该关系式说明生成矩阵的行矢量的任意线性组合都是一个码字。任意线性分组码的生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是秩为 k 的 $k \times n$ 矩阵（根据定义，子空间的维数是 k）。生成矩阵完整地描述了码。给定了生成矩阵就很容易确定编码器的结构。

696

例 13.2.2 求例 13.2.1 中第 1 个编码方案的生成矩阵。

解： 先找到对应于信息序列(10)和(01)的码字(10100)和(01111)，于是生成矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 10100 \\ 01111 \end{bmatrix} \tag{13.2.7}$$

与信息序列(x_1, x_2)对应的码字为

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x_1, x_2)\boldsymbol{G} \tag{13.2.8}$$

或表示为

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 \\ c_2 &= x_2 \\ c_3 &= x_1 \oplus x_2 \\ c_4 &= x_2 \\ c_5 &= x_2 \end{aligned}$$

◀

⊖ 本章中所有矢量都表示成行矢量。

上述编码码字的一个性质是：码字是以信息序列自身开始的，后面是附加位。此类编码称为系统码，码字中信息序列后面的附加部分称为奇偶校验比特。码为系统码的充要条件是生成矩阵形式如下

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k \mid \boldsymbol{P}] \tag{13.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{I}_k$ 是 $k\times k$ 的单位矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 $k\times(n-k)$ 的二进制矩阵。在系统码中，有

$$c_i = \begin{cases} x_i & 1 \leqslant i \leqslant k \\ \sum_{j=1}^{k} p_{ji} x_j & k+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{13.2.10}$$

这里所有的加法都是模 2 加。

前面已经定义，线性分组码$\mathscr{C}$是 n 维空间的一个 k 维子空间。根据线性代数知识，如果取所有长度为 n 的序列与 k 维线性子空间内所有矢量正交，那么所有$(n-k)$维线性子空间称为 k 维子空间的正交补集。该$(n-k)$维子空间定义的$(n, n-k)$线性分组码称为原$(n-k)$码的对偶码，用$\mathscr{C}^{\perp}$表示。显然，原码$\mathscr{C}$与对偶码$\mathscr{C}^{\perp}$是相互正交的。若对偶码的生成矩阵用 $\boldsymbol{H}$ 表示，它是一个$(n-k)\times n$ 的矩阵，那么原码的任意码字与 $\boldsymbol{H}$ 的所有行矢量正交，即

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}, \quad \text{对于所有 } \boldsymbol{c} \in \mathscr{C} \tag{13.2.11}$$

697

对偶码$\mathscr{C}^{\perp}$的生成矩阵 $\boldsymbol{H}$ 称为原码$\mathscr{C}$的奇偶校验矩阵(也称监督矩阵)，因为生成矩阵的每一行都是码字，故有

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0} \tag{13.2.12}$$

对系统码的特殊情况，有

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k \mid \boldsymbol{P}] \tag{13.2.13}$$

奇偶校验矩阵具有如下形式：

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \mid \boldsymbol{I}_k] \tag{13.2.14}$$

例 13.2.3 求例 13.2.1 的奇偶校验矩阵。

解：

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 10100 \\ 01111 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 100 \\ 111 \end{bmatrix}$$

所以得到

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 11 \\ 01 \\ 01 \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

由 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{0}$ 给出的奇偶校验等式为

$$c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 0$$
$$c_2 \oplus c_4 = 0$$
$$c_2 \oplus c_5 = 0$$

◀

汉明码。汉明码是一种典型的线性分组码，其中 $n=2^m-1$，$k=2^m-m-1$，并且对整数 $m\geqslant 3$，最小汉明距离 $d_{\min}=3$。这意味着，$m=3$ 时为(7，4)汉明码，$m=4$ 时为(15，11)汉明码。下面将说明，这些具有最小距离的码能够纠正单个错误。汉明码奇偶校验矩阵的结构很简单，除了全零序列外，包括所有长度为 m 的二进制序列。汉明码的码率为

698

$$R_c = \frac{2^m - m - 1}{2^m - 1} \tag{13.2.15}$$

当 m 很大时，上式取值趋近于 1。可见，汉明码是一种高速率码，而且最小汉明距离($d_{\min}=3$)也比较小。在后面将看到，编码的纠错能力与最小汉明距离是密切相关的，因此，汉明码的纠错能力是有限的。

例 13.2.4 求(7，4)系统形式汉明码的生成矩阵和奇偶校验矩阵。

解： 由题意可知 $m=3$，于是 $\boldsymbol{H}$ 将包括除全零序列之外所有长度为 3 的二进制序列。可得系统形式的奇偶校验矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \mid \boldsymbol{I}_k]$$

且生成矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [\boldsymbol{I}_k \mid \boldsymbol{P}]$$

如果信息序列 $\boldsymbol{x}=(x_1，x_2，x_3，x_4)$采用这种编码形式，得到的码字为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{G}$，各分量为

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 \\ c_2 &= x_2 \\ c_3 &= x_3 \\ c_4 &= x_4 \\ c_5 &= x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \\ c_6 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \\ c_7 &= x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{0}$ 得到的奇偶校验式为

$$\begin{aligned} c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 &= 0 \\ c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_6 &= 0 \\ c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_7 &= 0 \end{aligned}$$

699 ◀

13.2.1 线性分组码的译码及其性能

信道编码的主要目的是增加传输信号间的欧氏距离，同时在不增加传输功率的前提下减少错误概率。这在前一节的例题中有所体现。如图 13-2 所示，可以看到，通过使超立方体顶点码字间的距离尽量大，就能够达到这一目的。这意味着比较两种编码方法好坏的一个重要测度是码字间汉明距离的大小。但是，要确定任意两个码字间的汉明距离十分困难，在很多情况下甚至是不可能的。因此，通常只比较它们的最小码距。对于线性分组码，最小码距即为码字的最小重量。对于给定的 n 和 k，$d_{\min}$(或 $w_{\min}$)大的编码的性能较好。

软判决译码。由第 8 章和第 9 章可知，加性高斯白噪声信道的最佳信号检测方法是最小欧氏距离检测，即接收信号与发送信号的欧氏距离最小。这意味着接收信道的输出通过匹配滤波器后，选择欧氏距离意义上最接近于接收信号的调制信号。在使用编码波形时，同样如此。假设采用二进制 PSK 来传送编码信号，则每个码字 $\boldsymbol{c}_i=(c_{i1}，c_{i2}，\cdots，c_{in})$映射到序列 $s_i(t)=\sum_{k=1}^{n}\psi_{ik}(t-(k-1)T)$，其中，

$$\psi_{ik}(t) = \begin{cases} \psi(t) & c_{ik} = 1 \\ -\psi(t) & c_{ik} = 0 \end{cases} \tag{13.2.16}$$

并且信号 $\psi(t)$是持续时间为 T、能量为$\mathscr{E}$的信号，且在时间间隔$[0，T]$外能量等于零。则任意两个波形信号间的欧氏距离为

$$(d_{ij}^{\mathrm{E}})^2 = 4d_{ij}^{\mathrm{H}}\,\mathscr{E} \tag{13.2.17}$$

上式给出了采用二进制 PSK(或任意对极信号)方案时欧氏距离与汉明距离的关系。现在采用更为一般的关系式

$$P_2 = Q\left(\frac{d^{\mathrm{E}}}{\sqrt{2N_0}}\right) \tag{13.2.18}$$

得到

700

$$p(\text{接收码字 } \boldsymbol{c}_j \mid \text{发送码字 } \boldsymbol{c}_i) = Q\left(\sqrt{\frac{2d_{ij}\,\mathscr{E}}{N_0}}\right) \tag{13.2.19}$$

由于 $d_{ij} \geqslant d_{\min}$，且 $Q(x)$是 x 的减函数，可以得到如下结论：

$$p(\text{接收码字 } \boldsymbol{c}_j \mid \text{发送码字 } \boldsymbol{c}_i) \leqslant Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}\,\mathscr{E}}{N_0}}\right) \tag{13.2.20}$$

应用 8.4.2 节中介绍的联合界，可得

$$p(\text{错误} \mid \text{发送码字 } \boldsymbol{c}_i) \leqslant (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}\,\mathscr{E}}{N_0}}\right) \tag{13.2.21}$$

假设发送信号是等概的，最终可以得到

$$P_M \leqslant (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}\,\mathscr{E}}{N_0}}\right) \tag{13.2.22}$$

在记为$\mathscr{E}$的码元能量和记为$\mathscr{E}_b$ 的每信息比特能量间存在简单的关系。由于每个码字有 n 个码元，所以所有传输能量为 $n\,\mathscr{E}$。但是具有 n 个码元的码字携带 k 个信息比特，因此有 $k\,\mathscr{E}_b = n\,\mathscr{E}$，服从如下关系

$$\mathscr{E} = \frac{k}{n}\,\mathscr{E}_b = R_c\,\mathscr{E}_b \tag{13.2.23}$$

从式(13.2.22)和式(13.2.23)中，可以得到

$$P_M \leqslant (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}R_c\,\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{13.2.24}$$

式(13.2.22)和式(13.2.24)就是采用最佳解调的编码通信系统的错误概率界限。所谓最佳解调是指接收到的信号 $r(t)$通过一组匹配滤波器，得到接收矢量 $\boldsymbol{y}$，然后在信号星座图中寻找与 $\boldsymbol{y}$ 欧氏距离最近的点作为译码器输出。这种搜索最小欧氏距离的译码方法称为**软判决译码**，并且需要进行实数运算。

例 13.2.5 速率为 $R=10^4$ bps 的二进制信源通过加性高斯白噪声信道，假设接收功率为 1μW，噪声功率谱密度$\frac{N_0}{2}=10^{-11}$，调制方式是二进制 PSK。试比较不经过编码直接传输的性能与采用例 13.2.4 的(7，4)汉明码编码传输的性能。

701

解： 1. 对于未编码的情况，有

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2P}{RN_0}}\right) \tag{13.2.25}$$

但$\frac{2P}{RN_0} = \frac{10^{-6}}{10^4 \times 10^{-11}} = 10$。因此，

$$P_2 = Q(\sqrt{10}) = Q(3.16) \approx 7.86 \times 10^{-4} \tag{13.2.26}$$

4 比特的错误概率为

$$P_{4\text{比特错误}} = 1-(1-p_b)^4 \approx 3.1 \times 10^{-3} \tag{13.2.27}$$

2. 采用(7，4)汉明码，可以有 $d_{\min}=3$，且

$$\frac{\mathscr{E}}{N_0} = R_c\,\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} = R_c\,\frac{P}{RN_0} = \frac{4}{7} \times 5 = \frac{20}{7}$$

于是，码字错误概率为

$$P_M \leqslant (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}\mathscr{E}}{N_0}}\right) = 15Q\left(\sqrt{3\times\frac{40}{7}}\right) = 15Q(4.14) \approx 2.6\times10^{-4}$$

可以看出，采用简单的编码后，错误概率减小为原来的1/12，当然所付出的代价是需要的传输带宽相应地增加了。带宽扩展比是

$$\frac{W_{\text{编码}}}{W_{\text{未编码}}} = \frac{1}{R_c} = \frac{7}{4} = 1.75$$ ◀

硬判决译码。一种相对简便且更常用的译码方法是对接收矢量 y 的分量实施硬判决，然后寻找与接收矢量在汉明距离上最接近的码字。下面的例子说明了软判决与硬判决的区别。

例 13.2.6 一(3，1)码由两个码字 000 和 111 构成，通过$\mathscr{E}=1$的二进制 PSK 调制后进行传输。接收矢量(匹配滤波器输出经过抽样后得到)为 $\boldsymbol{y}=(0.5, 0.5, -3)$。如采用软判决方法，需要计算 $\boldsymbol{y}$ 与两个码字矢量(1，1，1)和(−1，−1，−1)的欧氏距离，并选择较小的一个。根据$(d^E(\boldsymbol{y}, (1, 1, 1))^2 = 0.5^2+0.5^2+4^2=16.5$ 和$(d^E(\boldsymbol{y}, (-1, -1, -1))^2=1.5^2+1.5^2+(-2)^2=8.5$，软判决将把 $\boldsymbol{y}$ 判为(−1，−1，−1)，或与之等价的(0，0，0)。然而，如果选用硬判决，首先要判定 y 的每一位是 0 或是 1，将 $\boldsymbol{y}$ 的每一位与零阈值相比，得到$\hat{c}=(1, 1, 0)$，再比较$\hat{c}$与(1，1，1)和(0，0，0)的汉明距离，找到汉明距离意义上最近的一个，显然，判决的结果是(1，1，1)。由此例可见，软判决译码与硬判决译码的结果可能是不同的。当然，软判决译码是最佳的检测方法，其错误概率更低。 ◀

硬判决译码包括以下三个步骤：首先，将 $r(t)$通过匹配滤波器，对输出进行抽样，得到矢量 $\boldsymbol{y}$，这是一个码元为实数的 n 维矢量。然后，将 $\boldsymbol{y}$ 的每个分量与门限(通常为零)相比较，并量化为两个信号电平之一(通常为 0 或 1)，从而得到传输信号的估计矢量$\hat{\boldsymbol{c}}$，这是一个 n 维二进制码元矢量。最后，寻找与$\hat{\boldsymbol{c}}$在汉明距离意义上最近的码字作为译码器的输出。本节将给出一种系统的硬判决译码方法。

首先建立标准阵列的概念。将所讨论的编码的所有码字表示为 $\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$，…，$\boldsymbol{c}_M$，其中码字长度为 n 并且 $M=2^k$，并用 $\boldsymbol{c}_1$ 代表全零码字。标准阵列是 $2^{n-k}\times2^k$ 的矩阵，每个元素是长度为 n 的二进制序列，其构造过程如下：将所有码字写在一行，以全零码字开始，作为标准阵列的第 1 行。第 2 行的构造方法是，在没有出现第 1 行的二进制序列(即非码字)中，找出重量最小的一个，记为 $\boldsymbol{e}_1$，写在 $\boldsymbol{c}_1$ 的下方[⊖]。对于 $2\leqslant i\leqslant M$，在 $\boldsymbol{c}_i$ 下方写 $\boldsymbol{e}_1\oplus\boldsymbol{c}_i$。第 3 行构造方法类似，从前两行未用的二进制 n 元组中，找出重量最小的码字记为 $\boldsymbol{e}_2$，所以第三行的元素是 $\boldsymbol{e}_2\oplus\boldsymbol{c}_i$。这样重复下去，直到所有二进制序列都用完为止。图 13-4 反映了上述生成标准阵列的过程。标准阵列的每一行称为一个陪集，每行的第一个元素(通常为 $\boldsymbol{e}_1$)称为陪集首。

$$\begin{matrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 & & \boldsymbol{c}_M \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\oplus\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{e}_1\oplus\boldsymbol{c}_3 & & \boldsymbol{e}_1\oplus\boldsymbol{c}_M \\ \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\oplus\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{e}_2\oplus\boldsymbol{c}_3 & & \boldsymbol{e}_2\oplus\boldsymbol{c}_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{2^{(n-k)}-1} & \boldsymbol{e}_{2^{(n-k)}-1}\oplus\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{e}_{2^{(n-k)}-1}\oplus\boldsymbol{c}_3 & & \boldsymbol{e}_{2^{(n-k)}-1}\oplus\boldsymbol{c}_M \end{matrix}$$

图 13-4　标准阵列

标准阵列有如下一些重要性质。

定理 13.2.2　阵列中所有元素都不相同。

证明：假设标准阵列中有两个元素是相等的，那么可以分为两种情况来讨论：

1. 两个相等的元素属于同一陪集。即 $\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_j$，推出 $\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{c}_j$，而这是不可能的。

2. 两个相等的元素属于不同的陪集。即对于 $l\neq k$，有 $\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{e}_k\oplus\boldsymbol{c}_j$，这意味着 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_k\oplus(\boldsymbol{c}_i\oplus\boldsymbol{c}_j)$。根据分组码的线性性质，$\boldsymbol{c}_i\oplus\boldsymbol{c}_j$ 也是一个码字(称之为 $\boldsymbol{c}_m$)，于是 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_k\oplus\boldsymbol{c}_m$，得到 $\boldsymbol{e}_l$和 $\boldsymbol{e}_k$属于同一陪集，这与假设 $l\neq k$ 相矛盾。 ■

由此可见，标准阵列有 2^{n-k}行。

定理 13.2.3　若 $\boldsymbol{z}_1$ 和 $\boldsymbol{z}_2$ 是同一陪集中的元素，那么 $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{H}^t=\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{H}^t$。

证明：因为 $\boldsymbol{z}_1$ 和 $\boldsymbol{z}_2$ 在同一陪集中，所以对于 $1\leqslant i$，$j\leqslant M$，$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_i$ 并且 $\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_j$，于是，

⊖ 注意由于 $\boldsymbol{c}_1=(0, 0, \cdots, 0)$，所以 $\boldsymbol{c}_1\oplus\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1$。

702　703

$$z_1 \boldsymbol{H}^t = (\boldsymbol{e}_l \oplus \boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{H}^t = \boldsymbol{e}_l\boldsymbol{H}^t + \boldsymbol{0} = (\boldsymbol{e}_l \oplus \boldsymbol{c}_j)\boldsymbol{H}^t = z_2\boldsymbol{H}^t$$ ■

这个定理告诉我们，标准阵列中每一个陪集都可以使用 $\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{H}^t$ 来唯一标识，其中 $\boldsymbol{e}_l$ 表示陪集首。一般来说，对于任意长度为 n 的序列 $\boldsymbol{z}$，定义其伴随式 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}^t \tag{13.2.28}$$

如果 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_i$，即 z 属于第$(l+1)$个陪集，则有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{H}^t$。伴随式是一个长度为 2^{n-k} 的二进制序列，并且对于给定的陪集，其伴随式是唯一的。显而易见，对于第一个陪集(包括码字那一行)，伴随式 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$。

例 13.2.7 构造一个(5, 2)分组码的标准阵列，并确定每个陪集的伴随式，码字为 00000，10100，01111，11011.

解：这种编码的生成矩阵是

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

相应的奇偶校验矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

704

利用前面介绍的方法构造标准阵列如下：

00000 01111 10100 11011 伴随式 = 000
10000 11111 00100 01011 伴随式 = 100
01000 00111 11100 10011 伴随式 = 111
00010 01101 10110 11001 伴随式 = 010
00001 01110 10101 11010 伴随式 = 001
11000 10111 01100 00011 伴随式 = 011
10010 11101 00110 01001 伴随式 = 110
10001 11110 00101 01010 伴随式 = 101 ◀

假设接收序列 $\boldsymbol{y}$ 按分量方式与一个门限比较后得到二进制矢量$\hat{\boldsymbol{c}}$，需要找到与$\hat{\boldsymbol{c}}$之间汉明距离最小的码字。首先，要确定$\hat{\boldsymbol{c}}$属于哪个陪集。先求$\hat{\boldsymbol{c}}$的伴随式 $\boldsymbol{s}=\hat{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{H}^t$，有了 $\boldsymbol{s}$，就能从标准阵列中找出对应于 $\boldsymbol{s}$ 的陪集。假设陪集首是 $\boldsymbol{e}_l$。因为$\hat{\boldsymbol{c}}$属于陪集，所以对 $1\leqslant i\leqslant M$，$\hat{\boldsymbol{c}}$可以表示为 $\boldsymbol{e}_l\oplus\boldsymbol{c}_i$ 的形式。$\hat{\boldsymbol{c}}$对于任意码字 $\boldsymbol{c}_j$ 的汉明距离是

$$d(\hat{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{c}_j) = w(\hat{\boldsymbol{c}} \oplus \boldsymbol{c}_j) = w(\boldsymbol{e}_l \oplus \boldsymbol{c}_i \oplus \boldsymbol{c}_j) \tag{13.2.29}$$

因为使用的是线性分组码，所以对于 $1\leqslant k\leqslant M$，$\boldsymbol{c}_i\oplus\boldsymbol{c}_j=\boldsymbol{c}_k$，于是

$$d(\hat{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{c}_j) = w(\boldsymbol{c}_k \oplus \boldsymbol{e}_l) \tag{13.2.30}$$

而 $\boldsymbol{c}_k\oplus\boldsymbol{e}_l$ 也属于$\hat{\boldsymbol{c}}$所在的陪集。于是，要找到最小的 $\boldsymbol{d}(\hat{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}_j)$，相当于在$\hat{\boldsymbol{c}}$所属的陪集中寻找重量最小的元素。根据标准阵列构造的原则，一行中重量最小的元素就是陪集首，即 $\boldsymbol{c}_k=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{c}_j$。这表明找到$\hat{\boldsymbol{c}}$就将其译码为 $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{c}_i = \hat{\boldsymbol{c}} \oplus \boldsymbol{e}_l \tag{13.2.31}$$

硬判决译码的过程总结如下：

1. 找到接收信号的矢量表达式 $\boldsymbol{y}$。
2. 将 $\boldsymbol{y}$ 的每个码元与最佳门限(通常是零)比较，并进行二进制判决得到二进制矢量。
3. 由 $\boldsymbol{s}=\hat{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{H}^t$，得到$\hat{\boldsymbol{c}}$的伴随式。
4. 在标准阵列中找出 $\boldsymbol{s}$ 对应的陪集。
5. 取陪集首 $\boldsymbol{e}$，获得$\hat{\boldsymbol{c}}$的译码输出 $\boldsymbol{c}=\hat{\boldsymbol{c}}\oplus\boldsymbol{e}$。

在上述的译码方案中，译码器输出的矢量 $\boldsymbol{c}$ 与矢量$\hat{\boldsymbol{c}}$间相差 $\boldsymbol{e}$，通常称二进制 n 元组 $\boldsymbol{e}$ 为错误图样。因此，阵列中的所有陪集首构成了可纠错的错误图样的全体。

705

下面来研究硬判决译码的错误概率极限。注意，因为对矢量每一比特都要进行判决，

所以对于对极信号，每比特的错误概率为

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{13.2.32}$$

对于正交信号有

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{13.2.33}$$

输入码字 $\boldsymbol{c}$ 与硬限幅器输出 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 间是二进制输入二进制输出信道，可以将其看成转移概率为 P_2 的二进制对称信道。因为编码是线性的，所以码字 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_j$ 间的距离等于全零码字与 $\boldsymbol{c}_i \oplus \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_k$ 间的距离。为不失一般性，假设发送的是全零码字。如果发送的是 $\mathbf{0}$，此时根据一致极限准则，错误概率不会超过汉明距离最接近 $\mathbf{0}$ 的译码码字错误概率的 $(M-1)$ 倍。对于距离全零码字 $d_{\min}$ 的码字 $\boldsymbol{c}$，有

$$P(\boldsymbol{c} \mid \mathbf{0}\text{ 发送}) \leqslant \begin{cases} \sum_{i=\frac{d_{\min}+1}{2}}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{i} P_2^i (1-P_2)^{d_{\min}-i}, & d_{\min}\text{ 为奇数} \\ \sum_{i=\frac{d_{\min}}{2}+1}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{i} P_2^i (1-P_2)^{d_{\min}-i} & \\ \quad + \frac{1}{2}\binom{d_{\min}}{\frac{d_{\min}}{2}} P_2^{\frac{d_{\min}}{2}} (1-P_2)^{\frac{d_{\min}}{2}}, & d_{\min}\text{ 为偶数} \end{cases}$$

或一般地

$$P(\boldsymbol{c} \mid \mathbf{0}\text{ 发送}) \leqslant \sum_{i=\frac{d_{\min}+1}{2}}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{i} P_2^i (1-P_2)^{d_{\min}-i} \tag{13.2.34}$$

因此有

$$P_M \leqslant (M-1) \sum_{i=\frac{d_{\min}+1}{2}}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{i} P_2^i (1-P_2)^{d_{\min}-i} \tag{13.2.35}$$

上式给出了线性分组码硬判决译码的错误概率上限。下列不等式给出硬判决译码错误概率上限的简化形式

$$P_M \leqslant (M-1)\left[P_2(1-P_2)\right]^{\frac{d_{\min}}{2}} \tag{13.2.36}$$

706

式(13.2.36)是由习题 13.21 导出的。

可以看到，不论是软判决译码还是硬判决译码，$d_{\min}$ 是决定错误概率的主要因素。这就意味着，对于给定的 (n, k) 码，$d_{\min}$ 越大越好。

还可以看出，加性高斯白噪声信道中软判决译码和硬判决译码在性能上大约相差 2dB，即硬判决方案的功率要比软判决方案的功率高 2dB，才能获得与软判决译码相当的错误概率。但是，如果 $\boldsymbol{y}$ 不采用 2 电平量化而采用 8 电平量化(每码元 3 比特)的分量，则软、硬判决间的性能差异为 0.1dB。这种多电平量化是介于软判决与硬判决之间的一种折中方案，在文献中经常将其归入软判决。

例 13.2.8 如果在例 13.2.5 中采用硬判决，结果将会如何变化?

解： 本例中 $P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{40}{7}}\right) = Q(2.39) = 0.0084$ 并且 $d_{\min} = 3$，因此，

$$P_{16} \leqslant \binom{7}{2} P_2^2 (1-P_2)^5 + \binom{7}{3} P_2^3 (1-P_2)^4 + \cdots + P_2^7 \approx 21 P_2^2 \approx 1.5 \times 10^{-3}$$

可见编码后错误概率下降因子为 2，而前面的软判决下降因子为 12。采用式(13.2.36)中的界限，而不是精确的错误概率，可以得到

$$P_{16} \leqslant (2^k - 1)[P_2(1 - P_2)]^{3/2} = 0.0114 = 11.4 \times 10^{-3} \tag{13.2.37}$$

◀

13.2.2 一些重要的线性分组码

通常来说，线性分组码的硬判决译码采用标准阵列和伴随式译码，这在实际中对于很长的分组来说太复杂。为了使线性分组码的译码更实用，人们特别设计了几类存在低复杂译码算法的线性分组码，并给出了其译码算法。

应用最广的线性分组码的子类是*循环码*。循环码的特点是，任何码字循环移位后仍是码字。因此如果用多项式表示，循环码具有丰富并且优良的结构。循环码的硬判决译码比普通线性分组码的硬判决译码更简单，并且利用简单的移位寄存器电路就能实现。

循环码的一个子类叫做 BCH 码(Bose，Chaudhuri，Hocquenghem code)，这种码备受关注并且也有着广泛的应用。可以设计 BCH 码以纠正任意给定错误数。在关于编码理论的许多书籍中，都给出了大量能纠正指定错误数的 BCH 码设计表格。对于 BCH 码的硬判决译码，存在一种结构严整且快速的译码算法，叫做 Berlekamp-Massey 译码算法。 707

里德-所罗门码(Reed-Solomon code)是非二进制 BCH 码的子集，因此也属于循环码。与本章介绍的其他编码不同，里德-所罗门码是非二进制码，即在码字中 $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，码元 c_i 不是二进制的 0 或 1，但每个码元 c_i 本身是一个由 0 和 1 组成的长度为 k 的序列。因此，里德-所罗门码字符容量为 $q=2^k$，这种码是 q 进制码。里德-所罗门在纠正 13.2.4 节中的突发错误时特别有用。衰落信道和存储信道中特别容易出现突发错误。里德-所罗门码广泛用于 CD 和 DVD 中数据、音乐和视频的存储。

里德-所罗门码也可以与二进制码相连接，以提供更高层次的错误保护。用于连接的二进制码可以是分组码或卷积码。在调制器之前和解调器之后可以分别放置编码器和译码器，这称为*内部编解码器对*。13.4 节将介绍级联码。

要了解循环码、BCH 码和里德-所罗门码的具体结构，需要具备大量有限域理论知识，这些知识在许多编码理论的经典教科书中都有介绍。有兴趣的读者可以参阅本章最后引用的相关书籍。

13.2.3 检错与纠错

设$\mathscr{C}$为具有最小汉明距离 $d_{\min}$ 的线性分组码。如果发送码字 $\mathbf{c}$，且采用硬判决译码，假如接收到的$\hat{\mathbf{c}}$相比其他码字距离 $\mathbf{c}$ 更近，那就可以准确译码。这种情况如图13-5所示。每个码字周围都有一个半径为 e_c 的“汉明球体”，e_c 表示可纠正的错误数目。如果这些球体是互不相交的，则可以纠正 e_c 个错误，球体互不相交的条件是

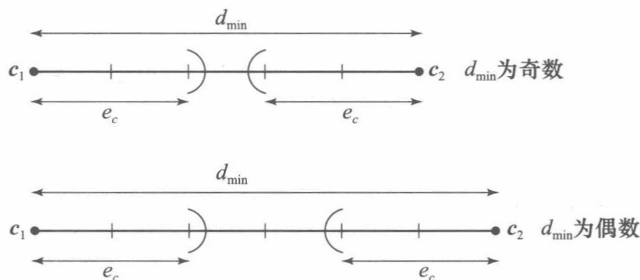


图 13-5 e_c 和 $d_{\min}$之间的关系 708

$$\begin{cases} 2e_c + 1 = d_{\min} & d_{\min} \text{ 为奇数} \\ 2e_c + 2 = d_{\min} & d_{\min} \text{ 为偶数} \end{cases}$$

或

$$e_c = \begin{cases} \dfrac{d_{\min} - 1}{2}, & d_{\min} \text{ 为奇数} \\ \dfrac{d_{\min} - 2}{2}, & d_{\min} \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{13.2.38}$$

可以归纳成

$$e_c = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \tag{13.2.39}$$

某些情况下只关心能检测出多少错误而不要求纠正错误，例如在发射机和接收机之间具有反馈链路的通信系统中，如果检测到错误，那么接收端可以通过反馈通道将出错信息反馈给发送端，并让其重新发送信号。如果码的检错能力用 e_d 表示，显然，在不要求纠错的前提下 $e_d=d_{\min}-1$ 因为当错误个数为 $d_{\min}-1$ 或更小时，发送码字经过传输信道输出后被转换为非码字序列，这样就可以断定有错误发生。如果既要检错又要纠错，那么两者之间要折中，如图 13-6 所示。从图中可以看出

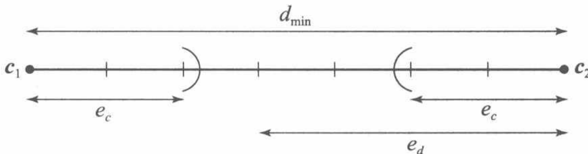


图 13-6　e_c、e_d 和 $d_{\min}$ 之间的关系

$$e_c+e_d\leqslant d_{\min}-1 \tag{13.2.40}$$

并且 $e_c\leqslant e_d$。

13.2.4　突发错误纠错编码

绝大多数的线性分组码是用来纠正*随机错误*的。所谓随机错误指错误出现位置是随机的，且错误之间是统计独立的。包括加性高斯白噪声信道在内的一些信道可以很好地用随机错误信道建模。但是在另一些信道中，错误独立出现的假设是不成立的，比如 14.1 中介绍的衰落信道。在这样的信道中，当衰落严重时，会发生一串连续的错误，即错误具有*突发性*。显然，在突发错误信道中，某一位置或某一时刻发生错误的概率，与其相邻比特是否正确接收有关。另一个突发错误信道的例子是光盘。光盘上的物理损坏，如划痕，会引起一连串的错误，即错误具有突发性。当然，在突发错误长度不超过码字间最小汉明距离一半的前提下，用于纠正随机错误的编码方法也可用于纠正突发错误。但是，根据突发错误的性质，可以找到更有效的编码方案。Fire 码和 Burton 码就是两种专门用于突发错误检测的编码方案，有兴趣的读者可以参考 Lin 和 Costello(2005)关于此类编码的讨论。

709

纠正突发错误的一个有效办法是对编码数据进行*交织*，使得错误的位置看上去是随机的，并分布于多个码字间，而不是少数几个码字之间。这样，每一分组的错误数量将会很低，并且便于用随机纠错编码进行纠正。在接收端，使用*去交织器*将数据复原。使用交织/去交织的编码系统框图如图 13-7。



图 13-7　采用交织/去交织的编码系统框图

*m 阶交织器*能够读入 m 个长度为 n 的码字，并存为 m 行 n 列的矩阵。然后，按列顺序读出，作为交织器的输出送入数字调制器。在接收端，将解调器的输出送至去交织器，将产生同样的 $m\times n$ 矩阵，按行读取并送入译码器，这一过程如图 13-8 所示。

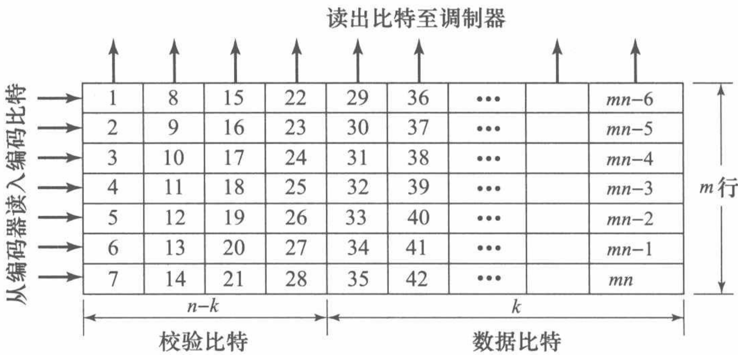


图 13-8　编码数据的块交织

假设 $m=8$，并使用(15，11)汉明码(可纠正一位错码码字)编码，那么交织器生成包含 120 个二进制码字的 8×15 的矩阵。显然，长度小于等于 8 的突发错误经过交织，可以使得每个码字最多只有一位错误，因此可以纠正。如果没有交织/去交织过程，则 8 位突发错误可能导致两个码字的错误(或影响到 22 个信息比特错误的检测)。

710

13.3 卷积码

卷积码与分组码的不同在于卷积码的编码设计中存在记忆性。在分组码中，根据编码(例如 $\boldsymbol{G}$)定义的规则，每个 k 比特输入分组映射为 n 比特输出分组，且与编码器此前的输入序列无关。此类编码的码率为

$$R_c=\frac{k}{n} \tag{13.3.1}$$

在卷积码中，信道中传输的每个 k 比特分组仍然映射为 n 比特分组，但这 n 比特输出并不仅仅取决于当前 k 比特输入，而与此前的输入信息比特也有关。输出与先前输入比特的相关性决定了卷积码的编码器是一个有限状态机。

为了更加详细地说明，图 13-9 给出了卷积码编码器的框图。编码器内包含有 kL 位移位寄存器，其中 L 称为卷积码的约束长度。在每个瞬时，k 比特信息进入移位寄存器，同时丢弃寄存器最末端的 k 比特。k 比特进入移位寄存器后，计算移位寄存器内的 n 个线性组合用以生成编码波形，如图 13-9 所示。这样编码后，显然 n 比特编码输出不仅和最近的 k 比特输入有关，还与 k 比特到来前的 $(L-1)k$ 位输入寄存器的 $(L-1)k$ 比特信息有关。因此，移位寄存器是一个有限状态机，它的状态数是 $2^{(L-1)k}$。因为每 k 比特输入得到 n 比特输出，所以卷积码的码率为

$$R_c=\frac{k}{n} \tag{13.3.2}$$

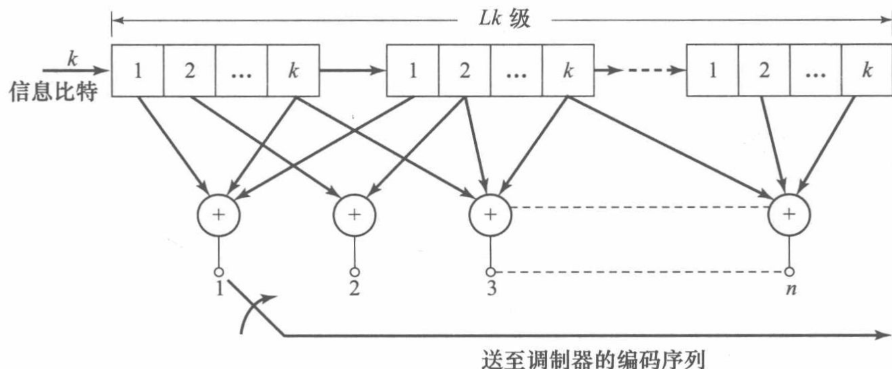


图 13-9 卷积编码器方框图

711

例 13.3.1 图 13-10 是一个卷积码编码器，其中 $k=1$，$n=2$，$L=3$。根据上面的结论，此卷积码的码率是 1/2，状态数是 $2^{(L-1)k}=4$。可以使用编码器两个输出比特与移位寄存器中内容之间的关系来描述该卷积码的特性，不需要画出编码器。通常使用 n 个矢量 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_n$ 代表卷积码的生成序列。如果移位寄存器的第 i 位与对应于输出第 j 位的组合器相连，则生成序列 $\boldsymbol{g}_j\,(1\leqslant j\leqslant n)$ 的第 i 比特为 1，$1\leqslant i\leqslant 2^{kL}$，否则为 0。在本例中，生成序列为

$$\boldsymbol{g}_1=[1\quad 0\quad 1]$$
$$\boldsymbol{g}_2=[1\quad 1\quad 1]$$

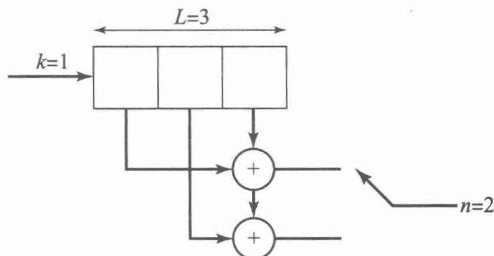


图 13-10 码率为 1/2 的卷积码编码器

13.3.1 卷积码的基本性质

因为卷积编码器的记忆性是有限的，所以可以使用状态转移图来表示其转移过程。在状态转移图中，卷积编码器的每一个状态对应于一个方框，状态的转移用两个方框间的有向连线表示。在线上标出状态转移的输入和对应的输出。因此，每个状态引出的线数(2^k)等于此状态下编码器所有可能输入的总数。而并入每一状态的线数等于通过一次转移到达此状态的状态总数。即等于当编码器输入 k 比特时，离开此编码器的可能比特组合数，它同样等于 2^k。图 13-10 中卷积码的状态转移图如图 13-11 所示。

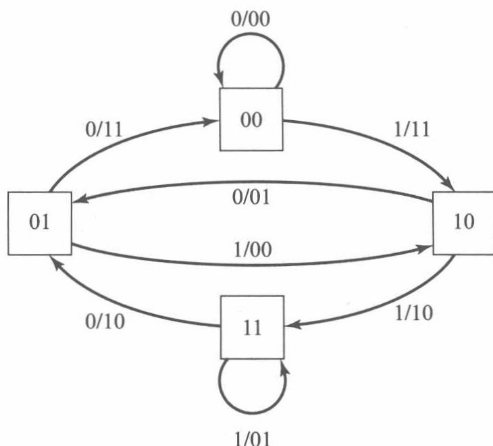


图 13-11 图 13-10 中编码器的状态转移图，编码器输入和输出用转移线上的“/”分隔

另一种更为常用的描述卷积码的方法是网格图。该图根据时间的推进来反映状态的转移。网格图上纵坐标表示所有状态，横坐标表示时间，其沿时间轴重复纵轴。然后，每一次状态转移则利用连接相邻时间点上两个状态的有向线段来表示。网格图实际上是状态转移图在时间上的重复，因此和状态转移图相似，进入节点和离开节点的支路数都是 2^k。在 $k=1$ 的情况下，使用实线表示 0 输入对应的支路，虚线表示由 1 输入编码器对应的支路。图 13-12 是图 13-10 中编码器所对应的网格图。

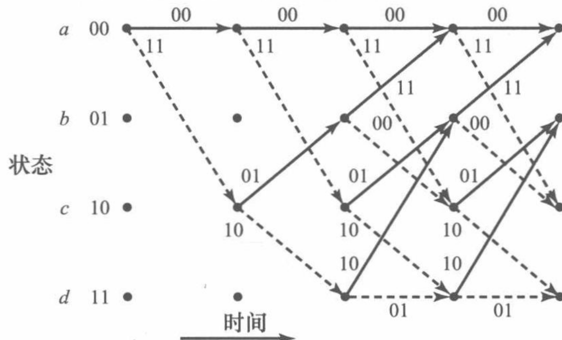


图 13-12 图 13-10 中编码器所对应的网格图

编码。卷积码的编码过程很简单。假设向编码器输入第一个信息比特之前，编码器处于全零状态。编码器每次接收 k 比特的信息并产生 n 比特的输出，然后送入信道，直到最后一组 k 比特信息编码完成并送入信道为止。为简单起见，假设在最后一组 k 比特信息之后，再次输入 $k(L-1)$ 个 0，编码器相应产生 n 个输出，使编码器回到全零状态，为下一次发送做准备。

712 ~ 713

例 13.3.2 在图 13-10 中所示的卷积码中，求输入信息序列 $\boldsymbol{x}=(1101011)$ 的编码输出序列。

解：注意编码器在传输前的状态是 0，并且在传输完最后的信息比特后，传输两个 0 比特。于是输入序列变为 $\boldsymbol{x}_1=(110101100)$，根据这个传输序列，得到码字 $\boldsymbol{c}=(111010000100101011)$。◀

转移函数。对于任意的卷积码，转移函数给出了从全零状态开始到第一次回到全零状态网格上的各种路径。根据前面的编码习惯，卷积编码器的任意输出码字都对应于网格图上从全零状态出发并回到全零状态的一条路径。在 13.3.4 节中我们将会了解到，卷积码的转移函数在决定编码器错误概率极限时扮演了重要角色。为了求得卷积码的转移函数，将全零状态分为两个状态，一个代表起始状态，另一个代表第一次回到全零状态。所有其他状态都称为中间状态。对于每一条连接两个状态的线段，定义了形如 $D^{\alpha}N^{\beta}J$ 的函数，其中 α 表示此次状态转移输出序列中 1 的个数，β 表示此时输入序列中 1 的个数。卷积码转移函数就是起始全零状态到终止全零状态流程图的转移函数，它是树参数 D，N，J 的函数，并用 $T(D, N, J)$表示。$T(D, N, J)$的每一个元素对应网格图上两个全零状态间的一条路径，J 的幂指数表示路径所包含的支路数目，D 的幂指数表示路径对应码字中 1 的个数(或者说是码字的汉明重量)，N 的幂指数表示输入序列中 1 的数目。由于

$T(D, N, J)$指出了从全零状态开始到第一次回到全零状态间所有路径的特性，因此为了便于推导，忽略全零状态上的自环。为了求得卷积码的转移函数，可以使用求流程图转移函数的所有规则。

714

例 13.3.3 求图 13-10 中卷积码的转移函数。

解：图 13-13 是求该卷积码转移函数的流图，图中的编码器共有 4 种可能状态，用移位寄存器前两位的内容表示。

利用字母来表示各个状态：

$$00 \rightarrow a$$
$$01 \rightarrow b$$
$$10 \rightarrow c$$
$$11 \rightarrow d$$

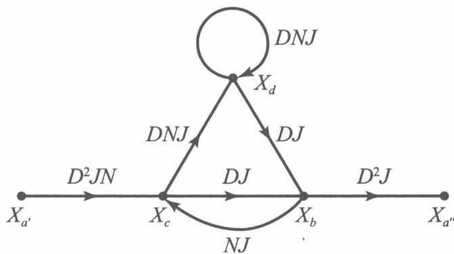


图 13-13　求转移函数的流图

从图中可以看出 a 状态被分为状态 a' 和状态 a''，分别代表初始状态和终止状态。根据流图上的关系可以得出

$$X_c = X_{a'} D^2 NJ + NJ X_b$$
$$X_b = DJ X_d + DJ X_b$$
$$X_d = DNJ X_c + DNJ X_d$$
$$X_{a''} = D^2 J X_b$$

消去 X_b，X_c，X_d，得到

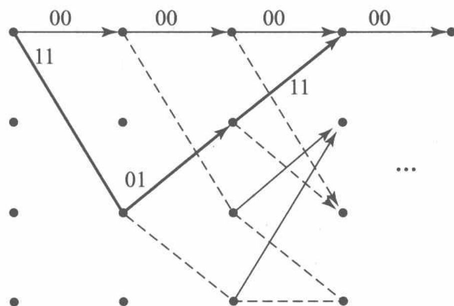
$$T(D,N,J) = \frac{X_{a''}}{X_{a'}} = \frac{D^5 NJ^3}{1 - DNJ - DNJ^2} \tag{13.3.3}$$

将 $T(D, N, J)$展开成多项式形式，得到

$$T(D,N,J) = D^5 NJ^3 + D^6 N^2 J^4 + D^6 N^2 J^5 + D^7 N^3 J^5 + \cdots \tag{13.3.4}$$

第一项 D^5NJ^3 说明网格图上存在这样一条路径：它从全零状态出发第 1 次回到全零状态，跨越了 3 条支路，其中一条对应的输入信息是 1(另外两条是 0)，同时这条路径对应码字的汉明重量为 5。这条路径在图 13-14 中以粗实线画出，它在某种程度上类似于分组码中重量最小的码字。实际上，这条路径对应于全零码字距离最小的码字，这个最小距离等于 $T(D, N, J)$展开式中 D 的最小次数，称为码的自由距离，并用符号 d_{free} 表示。上述卷积码的自由距离为 5。因此转移函数的一般形式为

$$T(D,N,J) = \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d D^d N^{f(d)} J^{g(d)} \tag{13.3.5}$$



13-14　对应于图 13-10 中的 D^5NJ^3 路径

715

◀

如果只关心码字的重量，可以在 $T(D, N, J)$中令 $N=J=1$，即得到转移函数的简化形式，可以表示为

$$T_1(D) = \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d D^d \tag{13.3.6}$$

后面推导卷积码错误概率极限的过程中，将会用到这种转移函数形式。

例 13.3.4 对于图 13-10 中的编码，有

$$T_1(D) = \left.\frac{D^5 NJ^3}{1 - DNJ - DNJ^2}\right|_{N=J=1} = \frac{D^5}{1-2D} = D^5 + 2D^6 + 4D^7 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i D^{5+i}$$ ◀

灾难性卷积码。卷积码将一个输入信息比特(通常比较长)序列映射为一个码字在信道上传输，编码的目的是尽可能地减少信道噪声的影响。显而易见，当码字差别很大的信息序列经过编码后得到的码字之间差别并不大时，码字之间容易混淆，并会引起信息流中的比特出现大量错误，这种编码方法就不是好的方法。这种不良特性的极限情况就是，两个

在无限多位不同的信息序列，编码后映射成为仅在少量有限个比特上不同的两个码字。这种情况下，由于码字之间仅有有限个比特不同，必然存在错误译码的可能性。进一步导致在检测输入序列时出现无限多个错误。具有这种特性的卷积码称为*灾难性编码*，在实际系统中应当予以避免。

下面举一个灾难性编码的例子，考虑由下式描述的(2，1)码：

$$\boldsymbol{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{g}_2 = [0 \quad 1 \quad 1]$$

它的编码器和状态转移图如图 13-15 所示。从图中可以看出，在"11"状态上存在一个自环(即返回同一状态的零距离路径)，对应编码器的输入为"1"，输出为全零。因此，如果全"1"信息序列进入编码器，那么得到的输出是

716

$$\boldsymbol{c} = (10010000\cdots0001001)$$

如果与全"0"输入序列对应的输出码字相比较

$$\boldsymbol{c}_0 = (0000\cdots000)$$

可以发现，尽管输入的信息序列截然不同，但是输出序列却非常接近(汉明距离仅为 4)，因此很容易发生译码错误。如果在某个状态上存在输入 k 不全为零而输出 n 全是零的自循环，那么译码时就会发生灾难性错误，因此应当避免采用这样的编码。

13.3.2　卷积码的最大似然译码——维特比算法

前面曾经讨论过分组码的不同译码方法，我们知道存在软判决和硬判决两种译码方法。软判决译码是比较匹配滤波器的输出矢量 $\boldsymbol{y}$ 与编码调制系统星座图中各个信号点间的欧氏距离，并选择欧氏距离最近的点。硬判决译码是先在 $\boldsymbol{y}$ 的不同分量上进行判决，将 $\boldsymbol{y}$ 转化到二进制序列 $\hat{\boldsymbol{c}}$，再比较各码字与 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 的汉明距离，并选择距离最近的码字。这两种方法的一个共同的基本任务就是，*在网格图中寻找一条与给定序列距离最近的路径*。在通信的众多领域以及电气工程的其他学科中，都存在类似问题。例如，通过具有符号间干扰的限带信道传输信号时的最大似然序列估计(见 10.4.3 节)、语音识别和模式分类方案，等等。所有这些问题本质上都是一样的，可以归结为*最优化网格搜索算法*。著名的维特比(Viterbi)算法能够很好地解决这些问题。

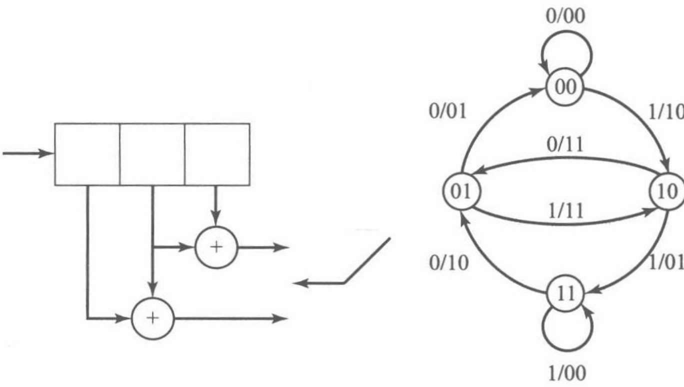


图 13-15　灾难性差错编码的编码器和状态转移图

717

卷积码的硬判决译码，是在网格图中找到一条路径，使它所代表的码字 $\boldsymbol{c}$ 与量化后的接收序列 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 有最小的汉明距离。在硬判决译码中，此信道是二进制无记忆的(信道的无记忆性基于信道噪声是白噪声的假设)。由于所求路径始于全零状态，又返回到全零状态，假设跨越了 m 条支路，并且由于每条支路对应 n 比特的编码器输出，因此 $\boldsymbol{c}$ 的总比特数(也是 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 的总比特数)为 mn。第 i 条支路所对应的序列分别用 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ 表示，其中 $1 \leqslant i \leqslant m$ 且 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ 的长度均为 n。则序列 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{c}$ 间的汉明距离可以表示为

$$d(\boldsymbol{c}, \hat{\boldsymbol{c}}) = \sum_{i=1}^{m} d(\boldsymbol{c}_i, \hat{\boldsymbol{c}}_i) \tag{13.3.7}$$

卷积码的软判决译码过程与硬判决译码过程类似，但有三点不同：

1. 硬判决处理的是序列 $\hat{\boldsymbol{c}}$，而软判决直接处理最佳数字解调器(匹配滤波器型或相关器

型)的输出矢量 $\boldsymbol{y}$。

2. 硬判决中 $\boldsymbol{c}$ 是二进制序列(0，1)，而软判决中对应的是 $\boldsymbol{c}'$，且其元素为

$$c'_{ij}=\begin{cases}\sqrt{\mathscr{E}}, & c_{ij}=1\\ -\sqrt{\mathscr{E}}, & c_{ij}=0\end{cases}\quad 对于 1\leqslant i\leqslant m, 且 1\leqslant j\leqslant n$$

3. 硬判决的依据是汉明距离，而软判决的依据是欧氏距离。原因在于所研究的是加性高斯白噪声信道。

综上所述，有

$$d_{\mathrm{E}}^2(\boldsymbol{c}',\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{m}d_{\mathrm{E}}^2(\boldsymbol{c}'_i,\boldsymbol{y}_i)\tag{13.3.8}$$

从式(13.3.7)和式(13.3.8)可以看出，要解决的问题可以表述为如下的一般形式：对于给定的序列 $\boldsymbol{a}$，在网格图上找出一条从全零状态 $S_1=0$ 到全零状态 $S_m=0$ 的路径，该路径对应的序列 $\boldsymbol{b}$ 在某种距离测度下与 $\boldsymbol{a}$ 之间距离最小[⊖]。能使此问题求解变得简单的关键是，不论是硬判决译码还是软判决译码，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的距离都可用路径上各个支路间距离的总和来计算。这一点从式(13.3.7)和式(13.3.8)中容易看到。

假设上述一般性问题可以形式化地表示为测度 μ 的最小化

718

$$\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{m}\mu(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i)$$

其中，对于软判决译码和硬判决译码，μ 分别表示欧氏距离和汉明距离。首先，可以发现如果路径($S_1=0$，$S_i=l$，$S_m=0$)是一条起始并终止于全零状态的最佳路径，其中 $1\leqslant i\leqslant m$，并且在时刻 i 通过状态 l，那么这条路径的一部分($S_1=0$，$S_i=l$)对测度的贡献必定比 $S_1=0$ 和 $S_i=l$ 之间其他路径(记为$\overline{(S_1=0,\ S_i=l)}$)的贡献要小。否则，由$\overline{(S_1=0,\ S_i=l)}$和($S_i=l$，$S_m=0$)形成的路径为最优路径。如图 13-16 所示。

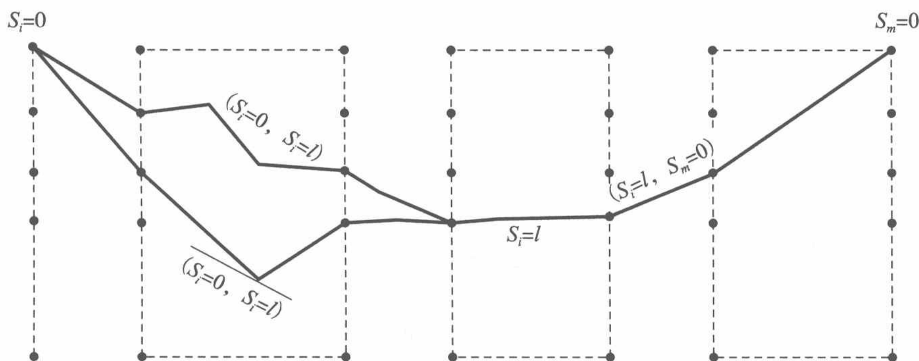


图 13-16　最优路径($S_1=0$，$S_i=l$，$S_m=0$)与连接$\overline{(S_1=0,\ S_i=l)}$和($S_i=l$，$S_m=0$)的次优路径的比较

这表明，在时刻 i 的每个状态 l，仅有一条连接于全零状态和状态 l 间的路径被保存。这条路径是 $S_1=0$，$S_i=l$ 间的最小测度路径，即与接收序列间的汉明距离或欧氏距离最小。$S_1=0$，$S_i=l$ 间的最小测度路径称为*幸存路径*或简称为 $S_i=l$ 的*幸存者*。

令 Λ_{i-1} 表示时刻 $i-1$ 的状态集，这些状态通过一定的路径连接至 $S_i=l$。如果从 $S_1=0$ 到 $S_i=l$ 的一条路径是幸存路径，那么该路径必定是状态 $S_{i-1}=\lambda$ 的幸存路径($\lambda\in\Lambda_{i-1}$)与 $S_{i-1}=\lambda$ 和 $S_i=l$ 间支路的级联。因此，要找到状态 $S_i=l$ 的幸存路径，就要先找到所有 $S_{i-1}=\lambda$，$\lambda\in\Lambda_{i-1}$ 的幸存路径及其距离测度值，然后加上连接 Λ_{i-1} 的元素到 $S_i=l$ 的支路，求出 $S_1=0$ 到 $S_i=l$ 各条路径的测度，选择测度值最小的一条作为 $S_i=l$ 的新的幸存路径。

⊖ 这个问题也可转化为求最大值。例如，求最小欧氏距离等价于求最大相关度。

此过程从 $S_1=0$ 开始，一直进行到状态 $S_m=0$，最后 $S_m=0$ 上的幸存路径就是最佳路径，也是与接收序列最佳(最大似然)匹配的。这一过程如图 13-17 所示。

在每一步中，新的幸存测度是

$$\mu(S_1=0,S_i=l)=\min_{\lambda\in\Lambda_{i-1}}\{\mu(S_1=0,S_{i-1}=\lambda)+\mu(S_{i-1}=\lambda,S_1=l)\}\quad(13.3.9)$$

有了幸存测度值，那么 $S_i=l$ 上的幸存路径就是根据式(13.3.9)使幸存测度值最小的 λ 所对应的路径($S_1=0$，$S_{i-1}=\lambda$，$S_i=l$)。

719

下面总结一下维特比算法的过程：

1. 将接收序列分解为 m 个长度为 n 的子序列。

2. 画出深度为 m 的网格图，而网格最后的 $L-1$ 级只需画出对应于全零输入序列的路径(因为输入序列的后面要附上 $k(L-1)$ 个 0)。

3. 令 $i=1$，初始全零状态的测度值为 0。

4. 找出网格图上所有连接第 i 级状态到第 $(i+1)$ 级状态的支路，求出接收序列的第 i 个子序列到这些支路的距离。

5. 将这些距离添加到第 i 级状态的测度上，得到第 $(i+1)$ 级状态的测度候选值。第 $(i+1)$ 级上每个状态都有 2^k 个测度候选值，与到达这一状态的各条支路相对应。

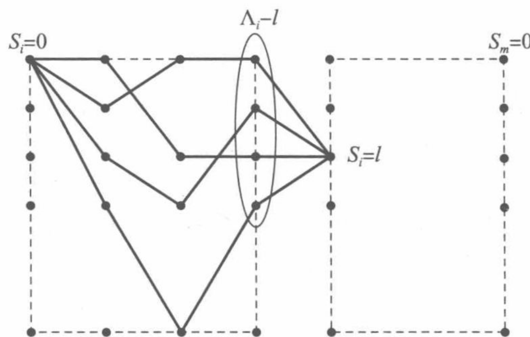


图 13-17　从以前的幸存路径中寻找新的幸存路径

6. 在第 $(i+1)$ 级的每个状态上，选择最小测度的候选值所对应的分支为幸存路径，同时将最小测度作为第 $(i+1)$ 级状态上的测度。

7. 如果 $i=m$，则进入步骤 8，否则 i 增加 1，并返回步骤 4。

8. 从终止级全零状态沿幸存路径回溯到初始全零状态，即得最佳译码路径，对应的输入比特序列即为最大似然译码的信息序列。为了得到最佳输入比特序列，可以从中删去最后的 $k(L-1)$ 个 0。

从以上过程可以看出，译码器只有在收到全部序列(卷积码可能非常长)之后，才能开始译码，并且需要记录所有的幸存路径。可见维特比算法的译码时延很大，同时还需要大量的存储器。在实际的系统中，经常采用次优方法来克服这些缺点。比如路径存储截断法。它的原理是译码器在每一级上不必搜索到起始状态，而只向后搜索 δ 级。这样在第 $(\delta+1)$ 级状态，译码器将判决出对应于第 1 级(最前面的 k 比特)的输入，而以后收到的序列不会对这个判决结果产生影响。也就是说，此时的译码时延为 $k\delta$ 比特，而且只需要保存最后 δ 步的幸存路径信息。计算机模拟的结果显示，当 $\delta\approx 5L$ 时，路径存储截短所引起的性能退化是可以忽略的。

720

例 13.3.5　以图 13-10 所示的卷积码为研究对象，假设采用硬判决译码，量化后的接收序列为

$$\hat{c}=(01101111010001)$$

求最大似然信息序列和错误个数。

解： 这种编码是 $L=3$ 的(2，1)卷积码。接收序列 $\hat{c}$ 的长度是 14，所以 $m=7$，因此要画出深度为 7 的网格图。同时，注意输入信息序列最后附加了 $k(L-1)=2$ 个 0，也就是说，实际输入的信息只有 5 位，添加了“00”之后才变成 7 位。图 13-18 是译码过程的网格图，分解后的接收序列 $\hat{c}$ 已在图的上方标出。因此网格图上最后的两步只需要画出对应于全零输入的支路。注意，在绘制最后两级网格时，只考虑编码器的输入为 0 的情况(在最后两级中，没有虚线对应 1 输入)。首先，将初始全零状态的距离测度值设为零，计算下一级状态上的距离测度值。第 1 级，进入每个状态的支路只有一条，因此不需要进行比较，直接将测度(接收序列与网格图上支路间的汉明距离)累加到前一状态的测度上。第 2 级，仍然不需要比较。到第 3 级，开始遇到两条支路进入同一状态的情况，此时就需要进行比较，并且选择一条幸

存路径。在两条进入同一状态的路径中，选择具有最小累计测度的路径作为幸存路径，然后去掉没有选中的路径(图中用-⋀⋁-表示)。如果在某个状态上，两条路径的累计距离相等，那么其中任何一条都可能是幸存路径。对于这种情况，在网格图上用“?”标出。这样的过程一直进行到进入终止全零状态为止。然后再沿幸存路径回到起始全零状态，这条路径(网格图上用粗实线表示)就是最优路径。对应于此路径的输入序列是 110 0000，其中最后两个 0 不是信息比特，添加这两个零的目的是使编码器回到全零状态。因此，信息序列是 1 1000。对应的卷积码码字是 11 1010 1100 0000，与接收序列的汉明距离是 4。在网格图上，找不到与接收序列 $\hat{c}$ 的汉明距离小于 4 的路径。◀

721

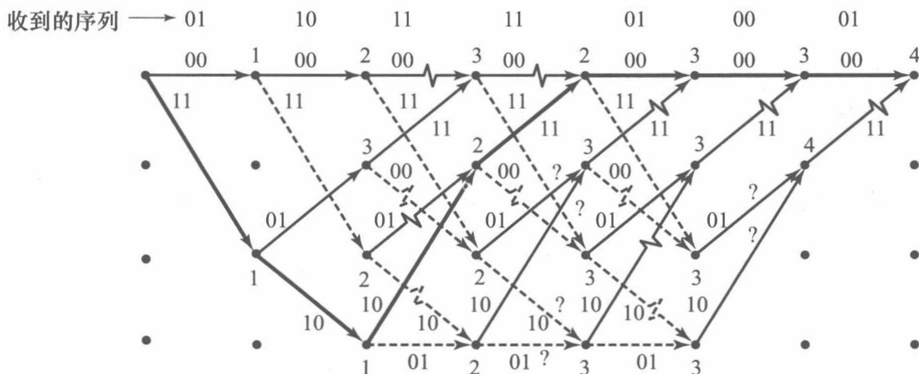


图 13-18　序列 01101111010001 的维特比译码网格图

软判决译码过程与此类似，不过软判决主要依据欧氏距离的平方，而不是汉明距离。

13.3.3　卷积码的其他译码算法

维特比算法提供了卷积码的最大似然译码方法。可是，算法的复杂度同网格图上的状态数是成正比的，即算法的复杂度随卷积码约束长度的增长而呈指数式增长。因此，维特比算法只适用于约束长度较小的编码。对于约束长度较大的卷积码，建议采用其他一些次优的译码算法，比如 Wozencraft(1957)的序列译码，Fano(1963)算法，Zigangirov(1966)的堆栈算法，Jelinek(1969)和 Heller(1975)的反馈译码算法，以及 Massey(1963)的多数逻辑译码。

13.3.4　卷积码的错误概率界限

卷积码差错性能的研究方法与分组码不同。因为卷积码没有分组结构，而是将一个长信息序列映射为一个更长的二元序列进行传输。信息序列译码中出现的错误数是一个随机变量，并与信道特性(软判决时指 SNR，硬判决时指交叉概率)和输入序列长度有关。序列越长，序列出错的概率就越高。因此，有必要将错误比特数根据输入序列长度进行归一化。

衡量卷积码的性能的一个常用的测度是*平均比特差错概率*，定义为每传输比特的期望错误译码比特数。为了求得此量的界限，首先推导出每个长度为 k 的信息序列可能发生错误的平均比特数的界限，然后将此结果除以 k 完成归一化。假设传输的是全零序列[⊖]，并且在译码的前 l 级都没有错误发生。这时，有 k 个信息比特进入译码器并且在译码器中移至网格图的下一级。期望找到这 k 比特的传输中可能发生的期望错误数的界限。因为假设前 l 级没有发生错误，所以到此为止网格图上的全零路径有着最小的距离测度值。到了下一级，即 $(l+1)$ 级，可能存在另一条累计测度比全零路径要小的路径，因而导致错误的发生。这种情况反映在网格图上，就是存在一条路径，在 $(l+1)$ 级上第 1 次与全零路径重合，并且其累计测度比全零路径要小(如图 13-19 所示)。这种情况称之为*初次差错事件*，

722

⊖　根据卷积码的线性，可以不失一般性地做此假设。

对应的概率称为初次差错事件概率。

第一步先求初次差错事件概率的界限。用 $P_2(d)$ 表示与全零路径汉明距离为 d 的路径是 $(l+1)$ 级上幸存路径的概率。重量为 d 的路径数目用 a_d 表示，可以得到初次差错事件概率的界为

$$P_e \leqslant \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d P_2(d) \quad (13.3.10)$$

其中，等式右边包括了所有在 $(l+1)$ 级上并入全零路径的路径，$P_2(d)$ 的取值与采用软判决还是硬判决译码有关。

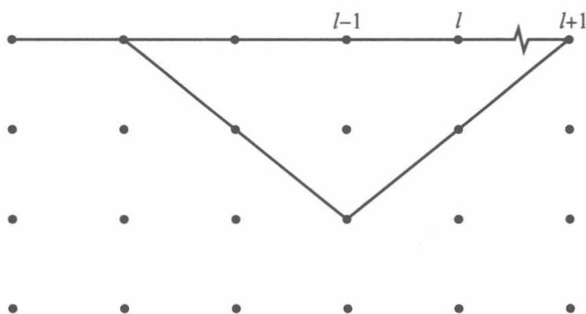


图 13-19 初次差错事件的路径

对于软判决译码的情况，如果采用的是对极信号(如二进制 PSK)，则有

$$P_2(d) = Q\left(\frac{d^{\mathrm{E}}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}d}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2R_c d\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \quad (13.3.11)$$

因此

723

$$P_e \leqslant \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d Q\left(\sqrt{2R_c d\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \quad (13.3.12)$$

利用 Q 函数的上限可得

$$Q\left(\sqrt{2R_c d\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-R_c d\mathscr{E}_b/N_0} \quad (13.3.13)$$

注意有

$$\mathrm{e}^{-R_c d\mathscr{E}_b/N_0} = D^d \big|_{D=\mathrm{e}^{-R_c\mathscr{E}_b/N_0}} \quad (13.3.14)$$

最终可得

$$P_e \leqslant \frac{1}{2}\sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d D^d \bigg|_{D=\mathrm{e}^{-R_c\mathscr{E}_b/N_0}} = \frac{1}{2}T_1(D)\bigg|_{D=\mathrm{e}^{-R_c\mathscr{E}_b/N_0}} \quad (13.3.15)$$

上式给出了初次差错事件概率的上限。要得到关于 k 比特输入产生的平均错误比特数的界 $\overline{P}_b(k)$，可以发现网格中的每一条路径会引起一定数目的输入比特发生译码错误。转移函数 $T(D, N, J)$ 展开式中的通项 $D^d N^{f(d)} J^{g(d)}$，对应着 $f(d)$ 个非零输入比特。这表示将选择每条路径的概率，乘以选择那一条路径时将会出现的输入错误总数，可以获得输入比特中的平均错误数。因此，在软判决的情况下，平均错误比特数的界为

$$\overline{P}_b(k) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d f(d) Q\left(\sqrt{2R_c d\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d f(d)\mathrm{e}^{-R_c d\mathscr{E}_b/N_0} \quad (13.3.16)$$

如果定义

$$T_2(D,N) = T(D,N,J)\big|_{J=1} = \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d D^d N^{f(d)} \quad (13.3.17)$$

可得

$$\frac{\partial T_2(D,N)}{\partial N} = \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d f(d) D^d N^{f(d)-1} \quad (13.3.18)$$

那么根据式(13.3.16)和式(13.3.18)，可得

724

$$\overline{P}_b(k) \leqslant \frac{1}{2}\frac{\partial T_2(D,N)}{\partial N}\bigg|_{N=1,\,D=\mathrm{e}^{-R_c\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}} \quad (13.3.19)$$

将此上界除以 k 后，就得到每一个输入比特所引起的平均错误比特数。因此，最终结果为

$$\overline{P}_b = \frac{1}{2k}\frac{\partial T_2(D,N)}{\partial N}\bigg|_{N=1,D=e^{-R_c\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}}} \tag{13.3.20}$$

对于大 SNR 的情况，最小距离表达式中的第一项是主导项，忽略后面的项可得到近似表达式

$$\overline{P}_b \approx \frac{1}{2k}a_{d_{\min}} f(d_{\min}) e^{-R_c d_{\min}\mathscr{E}_b/N_0} \tag{13.3.21}$$

硬判决译码的基本过程与上面的推导类似，唯一不同的是 $P_2(d)$的界限。可以得到 $P_2(d)$的界限(参见习题 13.19)为

$$P_2(d) \leqslant [4p(1-p)]^{d/2} \tag{13.3.22}$$

其中 p 是二进制对称信道的交叉概率。根据此结果可得硬判决译码的错误概率上限

$$\overline{P}_b \leqslant \frac{1}{k}\frac{\partial T_2(D,N)}{\partial N}\bigg|_{N=1,D=\sqrt{4p(1-p)}} \tag{13.3.23}$$

比较卷积码软判决与硬判决译码的性能，可以发现与线性分组码情况相似，在加性高斯白噪声信道中，软判决译码比硬判决译码的性能改善了大约 2dB。

具有很好距离特性的卷积码。通过上面的讨论可知，自由距离 d_{free} 对卷积码的性能好坏具有决定性的影响。对于给定的 n 和 k，卷积码的自由距离由其约束长度决定。在许多参考文献中，已经对具有良好距离特性的卷积码进行了广泛研究。表 13-1 和表 13-2 列出了一些码率为 1/2 和 1/3 的卷积码的计算机仿真结果。在这些表中，对于一定的约束长度，列出了具有最大自由距离的卷积码。表中生成式 $\boldsymbol{g}_i$ 的系数是以八进制表示的。编码的自由距离在表的右侧列出。

表 13-1 码率为 1/2 的最大自由距离的卷积码

约束长度	八进制的生成数		自由距离	约束长度	八进制的生成数		自由距离
3	5	7	5	9	561	753	12
4	15	17	6	10	1167	1545	12
5	23	35	7	11	2335	3661	14
6	53	75	8	12	4335	5723	15
7	133	171	10	13	10533	17661	16
8	247	371	10	14	21675	27123	16

Odenwalder(1970)和 Larsen(1973).

表 13-2 码率为 1/3 的最大自由距离的卷积码

约束长度	八进制的生成数			自由距离	约束长度	八进制的生成数			自由距离
3	5	7	7	8	9	557	663	711	18
4	13	15	17	10	10	1117	1365	1633	20
5	25	33	37	12	11	2353	2671	3175	22
6	47	53	75	13	12	4767	5723	6265	24
7	133	145	175	15	13	10533	10675	17661	24
8	225	331	367	16	14	21645	35661	37133	26

Odenwalder(1790)和 Larsen(1973).

13.4 基于组合码的优良编码

通过前面几节可知，分组码和卷积码的性能均与其距离特性有关，具体说就是与分组码的最小距离和卷积码的自由距离有关。为了设计一个达到给定码率且具有较高最小距离的分组码，就必须增加码字的分组长度 n。但 n 的增加导致了译码设备复杂度的增加。在大多数分组码的译码算法中，译码器的复杂度随码字的分组长度 n 的增长呈指数

式上升。

725～726 对于卷积码，在给定码率下增加自由长度，就需要增加码的约束长度。而约束长度的增加将导致编码网格上状态数的增加，从而增大译码设备的复杂度。因此，卷积码译码算法复杂度随约束长度呈指数式上升。

为了增加码字的有效分组长度，同时将复杂度限制在可实现的程度，人们提出了许多方案。这些方法中大多数都是通过将简单编码组合得到复杂编码而实现的。这样得到的码的译码也采用这些简单码的译码方法。这样的译码是次优译码方法，通常也能获得令人满意的性能。本节主要讨论三种广泛使用的由简单码组合成复合码的方法，这些方法生成的码即为乘积码、级联码和 Turbo 码。

13.4.1 乘积码

乘积码(或阵列码)的结构与纵横字谜非常相似，它是由以矩阵形式列出的两个线性分组码构成的。矩阵形式如图 13-20 所示，其中的两个线性码，一个参数是 n_1，k_1，$d_{\min 1}$，另一个参数是 n_2，k_2，$d_{\min 2}$。组合出的码是一组$(n_1 n_2,\ k_1 k_2)$的线性分组码，其最小距离是其分量码的最小距离乘积，即 $d_{\min}=d_{\min 1}d_{\min 2}$。如果采用最佳硬判决译码，则纠错能力是$\left\lfloor\dfrac{d_{\min 1}d_{\min 2}-1}{2}\right\rfloor$。也可以利用分量码的特性来进行译码，这与解纵横字谜的过程是类似的。先根据行码字，对每个比特的值进行最佳猜测，再根据对应的列码字，进一步改进猜测的结果。这一过程可以用迭代方式反复进行，在每一步逐渐提高猜测的准确度，因此称这种译码方式为迭代译码。要实现这个译码过程，需要行码字和列码字的译码算法都能提供每个比特的估计。换言之，具有软输出的译码方案(通常是似然值)是理想的。在 13.5 节讨论 Turbo 码时将描述这种迭代译码过程。727

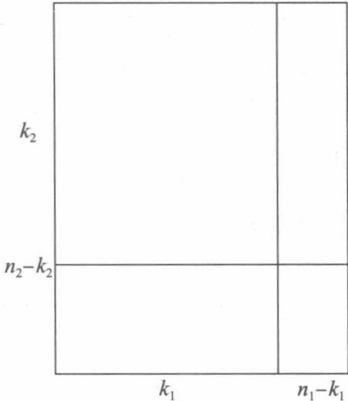


图 13-20 乘积码的结构

13.4.2 级联码

级联码包括一个内部码和一个外部码，其串行连接方式如图 13-21 所示。内部码是二进制分组码或卷积码，而典型的外部码是里德-所罗门码。设内部码是$(n,\ k)$码，可以把内部编码器、数字调制器、波形信道、数字解调器和内部译码器合并起来看成是一个数字信道。信道的输入、输出都是长度为 k 的二进制分组，或者说是 q 进制字符集中的一个元素($q=2^k$)。随后对这个 q 进制输入、q 进制输出的信道运用里德-所罗门码(外部码)，以达到更高的纠错性能。若内部码和外部码的码率分别是 r_c 和 R_c，则级联码的码率为

$$R_{cc}=R_c r_c \tag{13.4.1}$$

同时，级联码的最小距离也是内部码最小距离和外部码最小距离的乘积。在级联码中，内部码的性能对符合编码的总体性能起着决定性的作用，因此通常采用卷积码作为内部码，并以维特比算法实现卷积码的软判决译码。

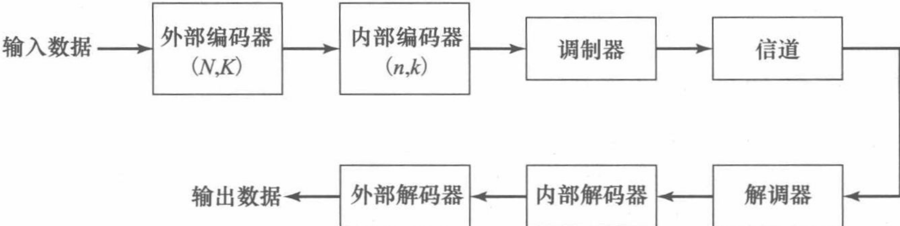


图 13-21 采用级联码的通信系统框图

13.5 Turbo 码及迭代译码

香农随机编码理论指出，若要获得信道容量，除了编码长度需要足够长以外，还需要编码结构具有随机性或接近随机性。但是一般情况下，对于一个随机生成的码字来说，其译码复杂度将随着码长而显著增加。由于随机码缺少结构特征，且码长较长，因此采用接近信道容量的最大似然(ML)译码算法是不切实际的。Turbo 码以一个伪随机交织器将两个简单码结合在一起，这种编码方式具有类随机码的特性及较大的分组码长值。不过，由于这种码采用前文提到的简单码组合方法，其译码可以采用基于分量码译码的迭代方式实现。这种译码方法称为*迭代译码*或 *Turbo 译码*。这种迭代译码算法并非最优算法，但是对于很多码在几次迭代后就能达到接近最大似然译码的性能。 728

Berrou 等人(1993)提出的采用交织方式的并行级联卷积码(PCCC)也称为 Turbo 码。图 13-22 中的 Turbo 码编码器是由两个*递归系统卷积码*编码器并行连接而成的，其中第二个编码器设在交织器之后。两个编码器通常都被交织器分隔开，码率为 1/2。可以发现，

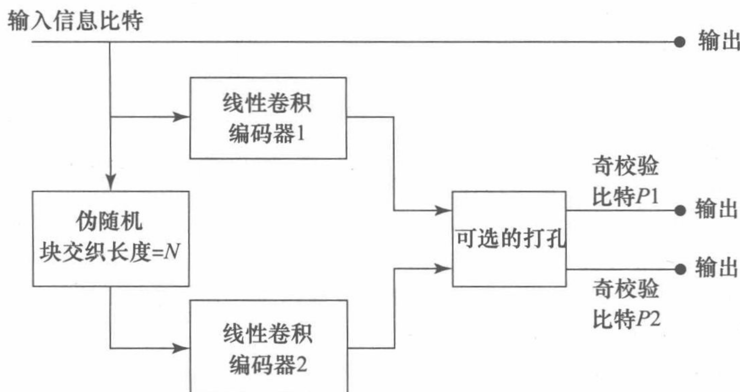


图 13-22 并行级联码编码器(Turbo 码)

由于信息比特只从两个编码器输出一次，所以在打孔(puncturing)前，从 Turbo 编码器输出的码率通常为 $R_c=1/3$。但是，对二进制卷积码编码器输出序列中的校验位进行打孔，可以获得更高的码率，比如 1/2 或 2/3。Turbo 码编码器中的交织器通常选择伪随机交织器，并表示为 Π，交织器在编码序列进入第 2 个编码器之前对信息进行重排。采用两个递归卷积码编码器与交织器级联，可以得到仅含有少量低重量码字的码。这个特性并不一定意味着级联码的自由距离会变大，但是可使最相近码字的数量减少。换句话说，与任意码字间的距离较小的码字数量变少，因此，码字相对稀疏。因此，Turbo 码的编码增益一部分是源自此特性，比如，交织器的引入，使得多重 Turbo 码中相似码字的数量减少。

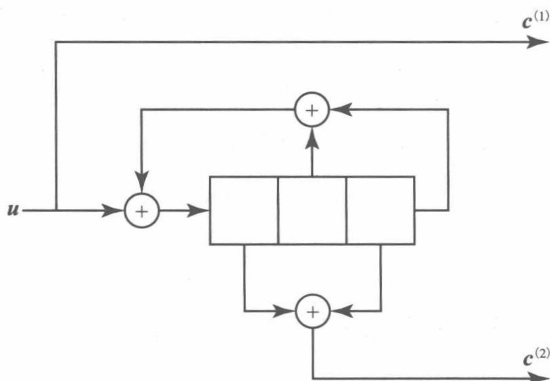


图 13-23 递归系统卷积码编码器

递归系统卷积码属于系统卷积码，这意味着输入比特将直接作为编码比特的一部分出现，而校验比特由递归(反馈)线性滤波器生成。图 13-23 为一个码率为 1/2 的 RSCC 的编码器，其中 $\boldsymbol{c}^{(1)}=\boldsymbol{u}$，因此这是系统码。图中的校验比特 $\boldsymbol{c}^{(2)}$ 是由线性的反馈移位寄存器生成的，所以是递归的。 729

Turbo 码的分量码经常用编码器的前反馈连接数与反馈连接数的比值来描述。连接数

以八进制形式给出。比如，27/31 的 RSC 编码器有 31 个反馈连接～$g_1=(11001)$和 27 个前馈连接～$g_2=(10111)$。图 13-24 给出此编码器的框图。图中 c_i^p 定义为编码器生成的校验位比特流。根据以上定义可以清楚地看出图 13-23 所示的编码器为 5/7 递归系统卷积码编码器。

Turbo 码中数字交织器通常都是很长的，一般在数千比特数量级上。采用伪随机交织器可以获得很好的性能，交织器的恰当选择可以进一步地提升编码性能，而且这种性能提升对于较短的交织长度更明显。还要注意，为了使编码器最后回到全零序列，非递归卷积码需要在信息序列后添加一段零序列。而 RSCC(递归系统卷积码)则需要添加一段特定的非零序列。由于数字交织器的存在，在大多数情况下，不可能让两个分量编码器都回到全零状态。

730

例 13.5.1 采用图 13-23 所示的 5/7 RSC 编码器为二进制信息序列 $\boldsymbol{u}$ 生成相应的校验比特。

$\boldsymbol{u}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1]$

假设编码器的初始状态为零状态。

解： 当 u 通过全零状态的移位寄存器后，得到的校验比特为

$\boldsymbol{c}^{(2)}=[0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$

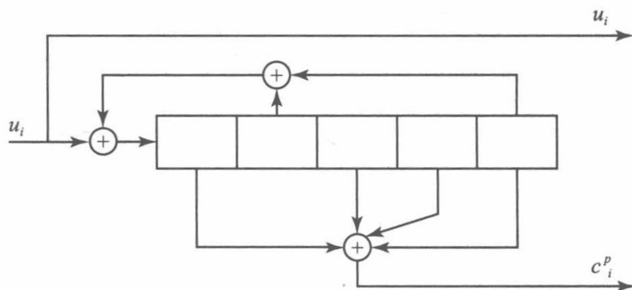


图 13-24　27/31 RSC 编码器

因为 Turbo 码由两个分量码组成，所以可以使用 13.4 节所述的迭代译码算法进行译码。所有能够获得比特似然的译码方法都可以用于 Turbo 码的迭代译码中。例如，Bahl、Xoxke、Jlinek 和 Raviv(BCJR)提出的最大后验概率(MAP)译码，参见 Bahl 等(1974)。还有一种常用的复杂度较低(且性能降质)的方法是 Hagenauer 和 Hoher(1989)提出的软输出维特比算法(SOVA)。在这类译码方法中，第一级译码器计算出每一比特的似然并送入第二级译码器，第二级编码器计算似然比，并返回给第一级译码器。重复这一过程直到似然值表明，每个比特正确译码概率足够高，迭代停止。此时形成最终判决。◀

13.5.1　卷积码的最大后验概率译码——BCJR 算法

BCJR 算法因 Bahl 等人(1974)而得名。该算法按照最大后验概率(MAP)准则对卷积码每一个符号进行译码。该算法中，译码器利用最大后验概率准则对译码器的每一个输入符号进行译码，而非寻找最大可能的输入序列。

假设 S 是卷积码编码器中的状态集。因为编码器的输入只能是 0 或者 1，从状态 $i-1$ 到状态 i(即从 $\sigma_{i-1}\in S$ 到 $\sigma_i\in S$)的转换，取决于 $u_i=0$ 或者 $u_i=1$。记 S_ℓ 为对应 $u_i=\ell$ 的所有状态对的集合(σ_{i-1},σ_i)，其中 $\ell=0$，1。

逐符号最大后验概率译码器接收到序列 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$，解调器利用最大后验概率准则基于此接收序列对 u_i 译码并输出

731

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= \underset{u_i\in(0,1)}{\operatorname{argmax}} P(u_i\mid \boldsymbol{y}) = \underset{u_i\in(0,1)}{\operatorname{argmax}}\frac{p(u_i,\boldsymbol{y})}{p(\boldsymbol{y})} = \underset{u_i\in(0,1)}{\operatorname{argmax}} p(u_i,\boldsymbol{y}) \\ &= \underset{\ell\in(0,1)}{\operatorname{argmax}} \sum_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_\ell} p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{13.5.1}$$

最后一个等式对应于 $u_i=\ell$ 的状态集(σ_{i-1},σ_i)，其中 $\ell=0$，1。

若定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1^{(i-1)} &= (\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}^{(i-1)}) \\ \boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)} &= (\boldsymbol{y}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{y}_N)\end{aligned} \tag{13.5.2}$$

可以写为

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}) \tag{13.5.3}$$

则有

$$
\begin{aligned}
p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}) &= p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}) \\
&= p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i)p(\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}|\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i) \\
&= p(\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)})p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)})p(\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}|\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i) \\
&= p(\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)})p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1})p(\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}|\sigma_i) \qquad (13.5.4)
\end{aligned}
$$

前三步由连接规则得到，最后一步由网格图中状态的马尔可夫特性得到。

此时，假设接收序列 $\boldsymbol{y}$ 是固定的，并对此序列给出三个函数 $\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})$，$\beta_i(\sigma_i)$ 和 $\gamma_i(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ 的定义如下

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1}) &= p(\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)}), \\
\beta_i(\sigma_i) &= p(\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}|\sigma_i), \\
\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) &= p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1}). \qquad (13.5.5)
\end{aligned}
$$

利用式(13.5.4)中的定义，有

$$
p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}) = \alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\beta_i(\sigma_i) \qquad (13.5.6)
$$

因此，从式(13.5.1)可得到

$$
\hat{u}_i = \underset{l\in(0,1)}{\operatorname{argmax}} \sum_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_l} \alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\beta_i(\sigma_i) \qquad (13.5.7)
$$

式(13.5.7)表明对于最大后验概率译码，需要 $\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})$，$\beta_i(\sigma_i)$ 和 $\gamma_i(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ 的取值。

$\alpha_i(\sigma_i)$的前向递归：可以证明 $\alpha_i(\sigma_i)$ 可以由如下形式的前向递归得到

$$
\alpha_i(\sigma_i) = \sum_{\sigma_{i-1}\in S}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i), 1\leqslant i\leqslant N \qquad (13.5.8)
$$

732

为了证明式(13.5.8)，采用如下关系集合：

$$
\begin{aligned}
\alpha_i(\sigma_i) &= p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i)}) = \sum_{\sigma_{i-1}\in S} p(\sigma_{i-1},\sigma_i,\boldsymbol{y}_1^{(i-1)},\boldsymbol{y}_i) = \sum_{\sigma_{i-1}\in S} p(\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)})p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)}) \\
&= \sum_{\sigma_{i-1}\in S} p(\sigma_{i-1},\boldsymbol{y}_1^{(i-1)})p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1}) = \sum_{\sigma_{i-1}\in s}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) \qquad (13.5.9)
\end{aligned}
$$

可以完成对 $\alpha_i(\sigma_i)$ 的前向反馈关系的证明。此关系式说明，已知值 $\gamma_i(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$，就能够由 $\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})$ 得到 $\alpha_i(\sigma_i)$。假设网格图的初始态为全零，则前向递归的初始条件为

$$
\alpha_0(\sigma_0) = P(\sigma_0) = \begin{cases} 1 & \sigma_0 = 0 \\ 0 & \sigma_0 \neq 0 \end{cases} \qquad (13.5.10)
$$

式(13.5.8)和式(13.5.10)为计算 α 的值提供了完整的递归集。

$\beta_i(\sigma_i)$的后向递归：β 可以由后向递归得到

$$
\beta_{i-1}(\sigma_{i-1}) = \sum_{\sigma_i\in S}\beta_i(\sigma_i)\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i), 1\leqslant i\leqslant N \qquad (13.5.11)
$$

证明此递归式可用

$$
\begin{aligned}
\beta_{i-1}(\sigma_{i-1}) &= p(\boldsymbol{y}_i^{(N)}|\sigma_{i-1}) = \sum_{\sigma_i\in S} p(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)},\sigma_i|\sigma_{i-1}) \\
&= \sum_{\sigma_i\in S} p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1})p(y_{i+1}^{(N)}|\sigma_i,\boldsymbol{y}_i,\sigma_{i-1}) = \sum_{\sigma_i\in S} p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1})p(\boldsymbol{y}_{i+1}^{(N)}|\sigma_i) \\
&= \sum_{\sigma_i\in S}\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\beta_i(\sigma_i) \qquad (13.5.12)
\end{aligned}
$$

733

假设网格图的终止状态为全零，后向递归的边界条件如下

$$
\beta_N(\sigma_N) = \begin{cases} 1 & \sigma_N = 0 \\ 0 & \sigma_N \neq 0 \end{cases} \qquad (13.5.13)
$$

递归关系式(13.5.8)和(13.5.11)与初始条件式(13.5.10)和(13.5.13)在 γ 已知的条件下，是决定 α 和 β 的必要条件。现在我们关注如何求得 γ。

计算 $\gamma_i(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$：将 $\gamma_i(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$，$1\leqslant i\leqslant N$，写为

$$\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) = p(\sigma_i,\boldsymbol{y}_i|\sigma_{i-1}) = p(\sigma_i|\sigma_{i-1})p(\boldsymbol{y}_i|\sigma_i,\sigma_{i-1}) = P(u_i)p(\boldsymbol{y}_i|u_i)$$
$$= P(u_i)p(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{c}_i) \tag{13.5.14}$$

这里认为状态对$(\sigma_{i-1},\ \sigma_i)$和输入 u_i 之间是一一对应的。上述表达式清晰地说明了$\gamma_i(\sigma_{i-1},\ \sigma_i)$依赖于 $P(u_i)$和 $p(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{c}_i)$，$P(u_i)$是信息序列在时刻 i 时的先验概率，$p(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{c}_i)$由信道特征决定。通常在无可用信息时作如下假设，如果信息序列是等概的，则 $P(u_i=0)=P(u_i=1)=1/2$。很明显，以上推导是基于状态对$(\sigma_{i-1},\ \sigma_i)$有效的假设，即状态 σ_{i-1} 和 σ_i 之间可能发生转换。

式(13.5.7)和式(13.5.8)、(13.5.11)中分别给出的 α 和 β 的前向、后向关系式，以及关于 γ 的式(13.5.14)，即为卷积码逐符号 MAP 译码的 BCJR 算法。

维特比译码需要寻找可能性最大的信息序列，而 BCJR 算法寻找可能性最大的单个比特。BCJR 算法还需要计算 $P(u_i|\boldsymbol{y})$的值。这个值给出了 u_i 在译码器中的置信度，被称为**软输出或软信息**。知道了 $P(u_i|\boldsymbol{y})$，就可以求得后验似然比

$$L(u_i) = \ln\frac{P(u_i=1|\boldsymbol{y})}{P(u_i=0|\boldsymbol{y})} = \ln\frac{P(u_i=1,\boldsymbol{y})}{P(u_i=0,\boldsymbol{y})} = \ln\frac{\sum\limits_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\beta_i(\sigma_i)}{\sum\limits_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\beta_i(\sigma_i)} \tag{13.5.15}$$

734

似然比也被认为是软输出。软输出这一概念在本章后面讨论的 Turbo 码译码中尤为重要。像 BCJR 这样输入软信息(矢量 $\boldsymbol{y}$)并生成软输出的译码器被称为**软入软出**(SISO)译码器。基于 $L(u_i)$软信息的译码准则如下

$$\hat{u}_i = \begin{cases}1 & L(u_i)\geqslant 0\\ 0 & L(u_i)<0\end{cases} \tag{13.5.16}$$

对于一个 AWGN 信道，我们有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}$ 表示对应于编码序列的调制信号。在这种信道模型下

$$\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) = \frac{p(u_i)}{(\pi N_0)^{n/2}}\exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{c}_i\|^2}{N_0}\right) \tag{13.5.17}$$

对于 $n=2$，系统卷积码且调制方式为 BPSK 的特例，则有

$$\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) = \frac{1}{\pi N_0}\exp\left\{-\frac{(y_i^s)^2+(y_i^p)^2+2\mathscr{E}}{N_0}\right\}P(u_i)\exp\left(\frac{2y_i^sc_i^s+2y_i^pc_i^p}{N_0}\right) \tag{13.5.18}$$

上标 s 表明这是一个系统码，上标 p 表示是 y 和 c 中的校验位。

将公式(13.5.18)代入式(13.5.15)可得

$$L(u_i) = \frac{4\sqrt{\mathscr{E}}y_i^s}{N_0} + \ln\frac{P(u_i=1)}{P(u_i=0)} + \ln\frac{\sum\limits_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\exp\left(\frac{2y_i^pc_i^p}{N_0}\right)\beta_i(\sigma_i)}{\sum\limits_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1})\exp\left(\frac{2y_i^pc_i^p}{N_0}\right)\beta_i(\sigma_i)} \tag{13.5.19}$$

式(13.5.19)表明信息比特的对数似然比(LLR)由三部分相加得到：第一部分与系统比特有关，第二部分与先验概率有关，第三部分与校验比特有关。

上述版本的 BCJR 算法存在一个问题，即该算法不是数值稳定的，特别是对于较长的网格图。BCJR 算法还有一个对数域版本，称为 log-APP(对数后验概率)算法或 log-MAP 算法。

在 log-APP 算法中，采用 α、β 和 γ 的对数

$$\widetilde{\alpha}_i(\sigma_i) = \ln(\alpha_i(\sigma_i))$$

$$\widetilde{\beta}_i(\sigma_i) = \ln(\beta_i(\sigma_i)) \tag{13.5.20}$$

$$\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i) = \ln(\gamma_i(\sigma_{i-1},\sigma_i))$$

735

通过直接计算可知前向和后向迭代对$\widetilde{\alpha}_i(\sigma_i)$和$\widetilde{\beta}_i(\sigma_{i-1})$均成立：

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_i(\sigma_i) &= \ln\Big(\sum_{\sigma_{i-1}\in S}\exp(\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i))\Big)\\ \widetilde{\beta}_{i-1}(\sigma_{i-1}) &= \ln\Big(\sum_{\sigma_i\in S}\exp(\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i))\Big)\end{aligned} \tag{13.5.21}$$

初始条件为

$$\widetilde{\alpha}_0(\sigma_0) = \begin{cases}0 & \sigma_0 = 0\\ -\infty & \sigma_0 \neq 0\end{cases},\quad \widetilde{\beta}_N(\sigma_N) = \begin{cases}0 & \sigma_N = 0\\ -\infty & \sigma_N \neq 0\end{cases} \tag{13.5.22}$$

后验 L 值为

$$\begin{aligned}L(u_i) = &\ln\Big(\sum_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}\exp(\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i))\Big)\\ &-\ln\Big(\sum_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}\exp(\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i))\Big)\end{aligned} \tag{13.5.23}$$

这些关系在数值上更加稳定，但计算效率不高。为了提高计算效率引入以下表示法：

$$\begin{aligned}\max{}^*\{x,y\} &\triangleq \ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)\\ \max{}^*\{x,y,z\} &\triangleq \ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\end{aligned} \tag{13.5.24}$$

通过这些定义，可以得到迭代公式如下

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_i(\sigma_i) &= \max_{\sigma_{i-1}\in S}{}^*\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\}\\ \widetilde{\beta}_{i-1}(\sigma_{i-1}) &= \max_{\sigma_i\in S}{}^*\{\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)\}\end{aligned} \tag{13.5.25}$$

迭代初始条件如式(13.5.22)所示。后验 L 值为

$$\begin{aligned}L(u_i) = &\max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}{}^*\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\}\\ &-\max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}{}^*\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\widetilde{\gamma}_i(\sigma_{i-1},\sigma_i)+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\}\end{aligned} \tag{13.5.26}$$

736

对于二进制卷积码，经 BPSK 调制和 AWGN 信道，后验 L 值可以用式(13.5.19)中的对数形式得到，结果为

$$\begin{aligned}L(u_i) = &\frac{4\sqrt{\mathscr{E}}y_i^s}{N_0}+L^a(u_i)+\max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}{}^*\left\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\frac{2y_i^pc_i^p}{N_0}+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\right\}\\ &-\max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}{}^*\left\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1})+\frac{2y_i^pc_i^p}{N_0}+\widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\right\}\end{aligned} \tag{13.5.27}$$

将 $L^a(u_i)$定义为

$$L^a(u_i) = \ln\frac{P(u_i=1)}{P(u_i=0)} \tag{13.5.28}$$

可见在这种情况下，后验 L 值为 3 部分之和。第 1 项为$\frac{4\sqrt{\mathscr{E}}y_i^s}{N_0}$，由译码器收到的对应于系统比特的信道输出决定。第 2 项为 $L^a(u_i)$，由信息比特的先验概率决定。其他几项表示信道输出对校验比特的贡献。

很容易得到(见习题 13.22)

$$\begin{aligned}\max{}^*\{x,y\} &= \max\{x,y\}+\ln(1+\mathrm{e}^{-|x-y|})\\ \max{}^*\{x,y,z\} &= \max{}^*\{\max{}^*\{x,y\},z\}\end{aligned} \tag{13.5.29}$$

$\ln(1+e^{-|x-y|})$这一项当 x 和 y 相差较大时取值较小。其最大值出现在 $x=y$ 时，且等于 ln2。显然 x 和 y 较大或相差较大时，可以用下式近似

$$\max{}^{*}\{x,y\} \approx \max\{x,y\} \tag{13.5.30}$$

同样条件下也有以下近似式

$$\max{}^{*}\{x,y,z\} \approx \max\{x,y,z\} \tag{13.5.31}$$

式(13.5.30)和式(13.5.31)两个近似式在 x 和 y(或 x，y，z)相差较大时是有效的。一般情况下，用式(13.5.25)中的 max 来近似$\max^{*}$会造成较小的性能损失。由此近似得到的算法是 MAP 算法的次优实现方式，称为 max-log-APP 算法(或 max-log-MAP 算法)。

通常并不直接采用式(13.5.30)和式(13.5.31)的近似式，而采用查找表的方式计算修正项 $\ln(1+e^{-|x-y|})$，以提高运算速度。

13.5.2 Turbo 码的迭代译码

737 从前文讨论已经看到由于码字网格图中的状态数很大，Turbo 码的最优译码并不实用。由 Berrou 等人(1993)提出的一种次优的迭代译码算法，称为 **Turbo 译码算法**，具有非常接近香农限的优异性能。

Turbo 译码算法是基于迭代的 log-APP 或 max-log-APP 算法。如式(13.5.27)所示，码率为 1/2 的 RSCC 码的 LLR 可以写为如下三项

$$L(u_i) = L_c y_i^s + L^a(u_i) + L^{(e)}(u_i) \tag{13.5.32}$$

其中

$$\begin{aligned}
L_c y_i^s &= \frac{4\sqrt{\mathscr{E}}y_i^s}{N_0} \\
L^a(u_i) &= \ln\frac{P(u_i=1)}{P(u_i=0)} \\
L^{(e)}(u_i) &= \max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_1}{}^{*}\left\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1}) + \frac{2y_i^p c_i^p}{N_0} + \widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\right\} \\
&\quad - \max_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)\in S_0}{}^{*}\left\{\widetilde{\alpha}_{i-1}(\sigma_{i-1}) + \frac{2y_i^p c_i^p}{N_0} + \widetilde{\beta}_i(\sigma_i)\right\}
\end{aligned} \tag{13.5.33}$$

并定义 $L_c=\dfrac{4}{N_0}\sqrt{\mathscr{E}}$。

第一项 $L_c y_i^s$ 被称为信道 L 值，表示对应于系统比特的信道输出的影响。第二项 $L^a(u_i)$是先验 L 值，它是信息序列先验概率的函数。最后一项是 $L^{(e)}(u_i)$，代表了外 L 值或外信息，是后验 L 值的一部分，不依赖于先验概率和信道输出中的系统信息。

假设二进制信息序列 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, \cdots u_N)$，送入第一个码率为 1/2 的 RSCC 码编码器，记输出的校验比特为 $\boldsymbol{c}^p=(c_1^p, c_2^p, \cdots c_N^p)$。信息序列通过交织器后得到 $\boldsymbol{u}'=(u_1', u_2', \cdots, u_N')$，这个序列送入第二个编码器并生成校验序列 $\boldsymbol{c}'^p=(c_1'^p, c_2'^p, \cdots c_N'^p)$。序列 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{c}^p$，和 $\boldsymbol{c}'^p$经 BPSK 调制后通过高斯信道传输。相应的输出序列被定义为 $\boldsymbol{y}^s$，$\boldsymbol{y}^p$ 和 $\boldsymbol{y}'^p$。第一个分量码的最大后验译码器的输入为($\boldsymbol{y}^s$，$\boldsymbol{y}^p$)。在第一次迭代译码时，假设译码器的所有比特等概，则先验 L 值设为零。得到($\boldsymbol{y}^s$，$\boldsymbol{y}^p$)后，第一个译码器根据式(13.5.27)计算后验 L 值。在第一个分量码译码器的输出中，从后验 L 值减去信道 L 值，得到外 L 值，记为 $L_{12}^{(e)}(u_i)$并由交织器Ⅱ重排列，重排后的外 L 值作为第二个组成码译码器的先验 L 值。此外，第二个译码器的输入还包括 $\boldsymbol{y}'^p$，和交织器Ⅱ重排后的 $\boldsymbol{y}^s$。第二个译码器计算得到的外 L 值记为 $L_{21}^{(e)}(u_i)$，经过Π^{-1}的重排列后，将其送入第一个译码器，在下一次迭代中采用此 L 值作为先验 L 值。此迭代过程在固定的迭代次数后结束，或在满足给定停止条件时

738 结束。在最后一次迭代后，后验 L 值 $L(u_i)$将用于最终判决。

Turbo 码译码器的组成框图是一个 SISO 译码器，其输入为 $\mathbf{y}^s$，$\mathbf{y}^p$ 和 $L^{(a)}(u_i)$，输出是 $L^{(e)}(u_i)$和 $L(u_i)$。迭代译码中的 $L^{(a)}(u_i)$将由另一个译码器的外 L 值替换。图 13-25 是 Turbo 码译码器的框图。

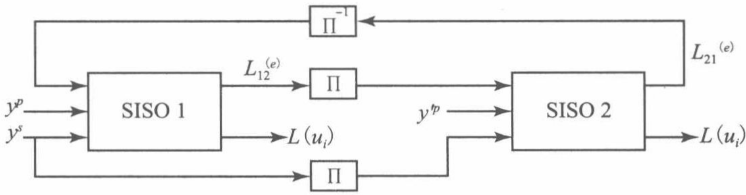


图 13-25 Turbo 码译码器框图

13.5.3 Turbo 码的性能

Turbo 码在低 SNR 的情况下具有良好的性能。提高 Turbo 码的性能主要通过增加交织器的长度和迭代次数来实现。最早研究 Turbo 码的 Berrou 等人(1993)使用的是如图 13-26所示的 21/37 递归系统卷积码。该 Turbo 码的约束长度 $N=2^{16}=6\ 5536$，舍弃部分监督比特后，码率可达到 1/2。利用 BCJR 译码算法对该 Turbo 码进行译码的性能见图 13-27。经过 18 次迭代后，在 SNR＝0.7dB 时可以达到误码率 10^{-5}，对于 1/2 码率的码来说，距香农限仅 0.5dB。

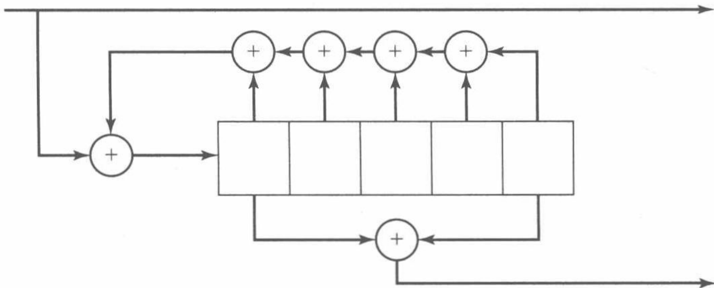


图 13-26 21/37 递归系统卷积码

Turbo 码存在误码平台的问题。如图 13-27 所示，比特错误概率随$\mathscr{E}_b/N_0$ 的增加急剧 739

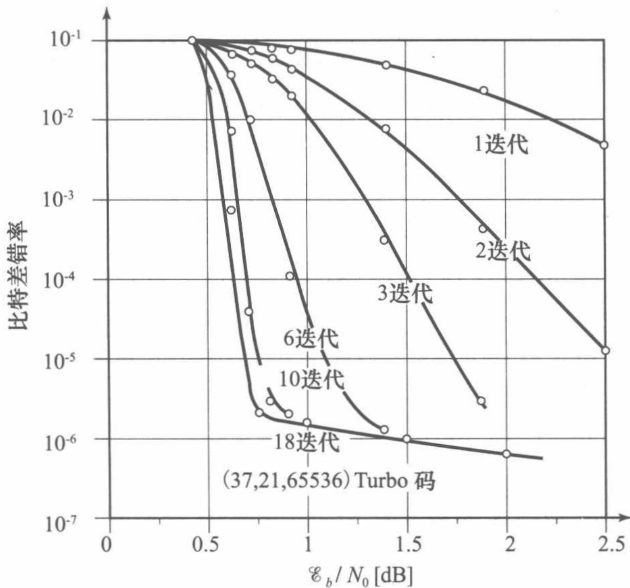


图 13-27 (37，21，65535)Turbo 码在不同的迭代次数下的性能点

下降，但到了某个取值点后，曲线下降会变得非常缓慢。误码平台的存在是由于Turbo码的距离特性所致。虽然Turbo码在低信噪比时有着很好的性能，但其最小距离较小。而Turbo码性能优越的原因在于尽管其距离特性较差，但低距离的路径数目（称为*距离的重复度*）相当少。在一般的卷积码中，可以把卷积码的最小距离设计得很大，但是小距离的重复度也很高。从式(13.3.21)可以看出，在低信噪比情况下，重复度($a_{d_{\min}}$)对编码性能的影响较大，而对于高信噪比的情况，编码最小距离扮演了主要角色。因此，Turbo码的性能在大信噪比时显著退化。

图13-28比较了上述21/37Turbo码与码率为1/2、约束长度为14的卷积码通过软判决维特比译码的性能。两种编码的性能界限（采用联合界）也绘制在图中。

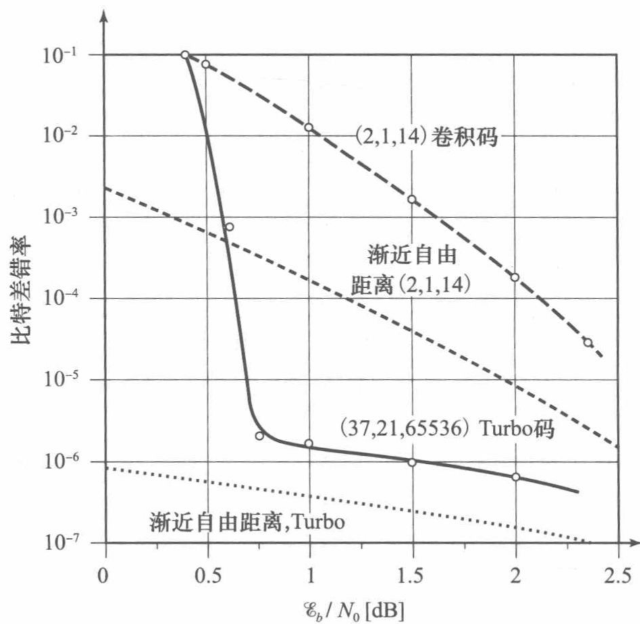


图13-28 Turbo码与卷积码的性能比较

13.6 低密度奇偶校验码

低密度奇偶校验码(LDPC)是一种分组码。这种编码于20世纪60年代初期由Gallager首次提出，但直到20年后，才引起人们的广泛关注。由于它出色的性能，很快受到了广泛的研究。研究表明其迭代译码方式为*和积译码算法*。事实上，其性能与Turbo码非常相似，若精心设计，则可获得优于Turbo码的性能。由于具有优异的性能，低密度奇偶校验码已成为各种通信广播领域的标准。

低密度奇偶校验码是具有很大码长的线性分组码，码长n通常为数千码字。这种码的奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$中只有很少的1元素。低密度这个词就是指这种码的奇偶校验矩阵中元素1的密度很低。规则的LDPC码可以定义为一种具有$m\times n$维稀疏奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$的线性分组码，且该矩阵满足如下性质。

1. $\boldsymbol{H}$的每一行包含w_r个1，其中$w_r\ll\min\{m, n\}$.

2. $\boldsymbol{H}$的每一列包含w_c个1，其中$w_c\ll\min\{m, n\}$.

这里将低密度奇偶校验矩阵的密度记为r，它是$\boldsymbol{H}$矩阵中的元素1的个数与元素总数的比值，即

$$r=\frac{w_r}{n}=\frac{w_c}{m} \tag{13.6.1}$$

从上式可以明显看出

$$\frac{m}{n}=\frac{w_c}{w_r} \tag{13.6.2}$$

740 ～ 741

如果矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是满秩，那么 $m=n-k$

$$R_c=1-\frac{m}{n}=1-\frac{w_c}{w_r} \tag{13.6.3}$$

否则

$$R_c=1-\frac{\operatorname{rank}(\boldsymbol{H})}{n} \tag{13.6.4}$$

低密度奇偶校验码可以很方便地用一种称为 Tanner 图的图形表示法表示。Tanner 图可以表示任何一种线性分组码。Tanner 图是 $\boldsymbol{cH}^t=\boldsymbol{0}$ 的图形表示，将每个码字元素 $c_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 表示为节点 i，称为变量节点，用圆圈表示；将 $\boldsymbol{cH}^t=\boldsymbol{0}$ 确定的 $n-k$ 个约束中的每一个约束表示为节点 $j(1\leqslant j\leqslant n-k)$ 称为校验节点，用方框表示。如果 c_i 出现在第 j 个奇偶校验方程中，就将变量节点 i 和校验节点 j 连接起来，每个节点的度是这个节点的连接的边数。

图 13-29 就是一个(7，4)汉明码的 Tanner 图，此汉明码的奇偶校验方程如下(见例 13.2.4)。

$$\begin{aligned} f_1: c_1+c_2+c_3+c_5&=0 \\ f_2: c_2+c_3+c_4+c_6&=0 \\ f_3: c_1+c_2+c_4+c_7&=0 \end{aligned} \tag{13.6.5}$$

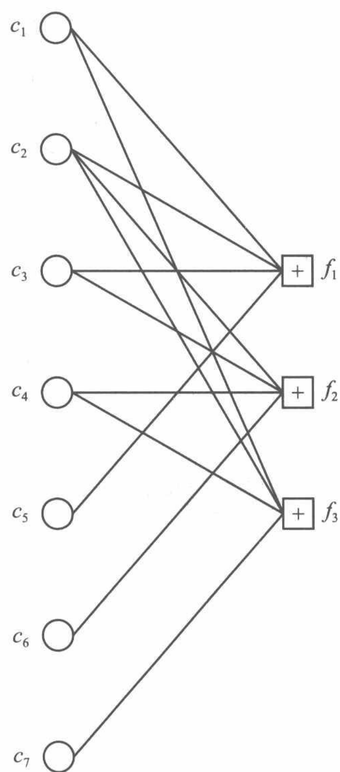


图 13-29 (7，4)汉明码的 Tanner 图

图 13-29 的 Tanner 图并不是规则 LDPC 码，图中各校验节点的度不相等，而且变量节点的度也不相等。还可以看到在图 13-29 中包含了多个环，所谓环是从一个节点开始到同一个节点结束的边连成的路径。图中最短环的长度称为图的围长。图 13-29 的围长是 4(对应环 $c_1\to f_1\to c_2\to f_3\to c_1$)

图 13-29 中 Tanner 图中，对应 Tanner 图输入的变量节点，用左边的圆圈表示；校验节点或者称约束节点对应变量之间的约束关系，这些节点用图中右边的方框表示。如果一个二元序列 c 满足式(13.6.5)的三个等式，那么它就是一个(7，4)汉明码字。还可以发现，图 13-29 的边只存在于变量节点和校验节点之间，也就是说所有的边分别连接一个左边的节点与一个右边的节点。具有这种特征的图称为二分图。

我们定义一个命题 P 的指示函数

$$\delta[P]=\begin{cases}1 & P \text{ 是真} \\ 0 & P \text{ 是假}\end{cases} \tag{13.6.6}$$

那么，如果码字 $\boldsymbol{c}$ 满足式(13.6.5)中 3 个方程，则为汉明码。采用式(13.6.6)中的表示方法，则 $\boldsymbol{c}$ 是一个码字，当且仅当

$$\delta[c_1+c_2+c_3+c_5=0]\delta[c_2+c_3+c_4+c_6=0]\delta[c_1+c_2+c_4+c_7=0]=1 \tag{13.6.7}$$

742

图 13-29 中给出的图就是式(13.6.7)的图形法表示。

规则 LDPC 码的 Tanner 图是由统一的约束节点和变量节点组成。由于码字的低密

度和规则约束，所有校验节点的度等于w_r，且w_r远小于码字分组的长度。同理，所有变量节点的度w_c也是相等的。图13-30是一个规则LDPC码的Tanner图，其$w_r=3$，$w_c=4$。

LDPC码的Tanner图一般有多个环。我们之前定义了图的围长是图中的最短环长。显然，有环的Tanner图的围长至少等于4。一种常用的LDPC译码技术是和积算法。这个算法对于Tanner图围长很大的LDPC码非常有效。这是因为，为了使和积算法对有环图有效，外部信息值必须很高。所谓外信息是一个节点外的其他变量节点对该节点译码所贡献的信息。假如LDPC码的围长很短，对应一个比特即一个节点的信息很快会循环回到该节点，那么只能提供极少的外部信息，从而导致很差的性能。现在如何设计LDPC码的围长也是很热门的话题。

743

到目前为止讨论的低密度校验码都是*规则LDPC码*。不规则LDPC码则是一种更一般的LDPC码，其校验矩阵$\boldsymbol{H}$中，每行的1的个数和每列的1的个数都是可变的，但是$\boldsymbol{H}$矩阵中1元素的总数仍然很小。不规则LDPC码的$\boldsymbol{H}$矩阵结构更大的灵活性，使得1元素在行列中的分布优化成为可能。一般而言，不规则LDPC码比规则LDPC码性能更好，而且它也是可以达到与信道容量相差1dB以内最优性能的码字之一。

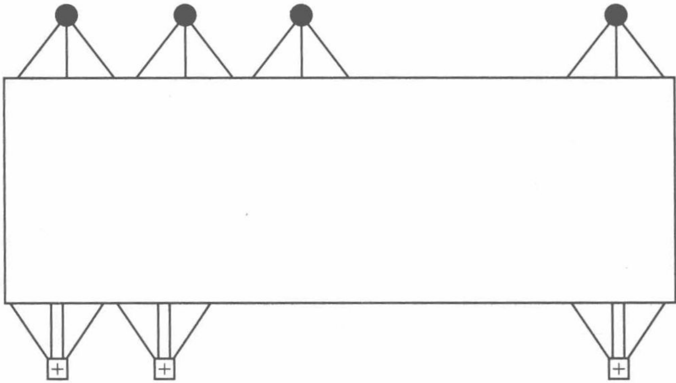


图13-30 $w_r=3$，$w_c=4$的规则LDPC码的Tanner图

例13.6.1 (12，3)规则LDPC码校验矩阵如式(13.6.8)。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}\tag{13.6.8}$$

已知w_c，w_r以及这个码字的密度。写出奇偶校验式并画出Tanner图。这个码的围长是多少？

解：这个校验矩阵的每一行包含4个1，每一列有3个1。因此$w_r=3$，$w_c=4$。LDPC的密度用r表示，定义为

744

$$r=\frac{w_c}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\tag{13.6.9}$$

如果$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是一个码字，那么$\boldsymbol{cH}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{0}$。这种关系包括9个校验方程，每个都包含$w_c=4$个变量，校验方程如下

$$c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8 = 0$$
$$c_1 \oplus c_2 \oplus c_5 \oplus c_{12} = 0$$
$$c_4 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} = 0$$
$$c_2 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_{10} = 0$$
$$c_1 \oplus c_3 \oplus c_8 \oplus c_{11} = 0$$
$$c_4 \oplus c_5 \oplus c_9 \oplus c_{12} = 0$$
$$c_1 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_7 = 0$$
$$c_6 \oplus c_8 \oplus c_{11} \oplus c_{12} = 0$$
$$c_2 \oplus c_3 \oplus c_9 \oplus c_{10} = 0$$

可以看到，每个 $c_i(1\leqslant i\leqslant n)$在这 9 个式子里正好出现 $w_r=3$ 次。图 13-31 给出了这个码的 Tanner 图。从 Tanner 图中很容易看出这个码字的围长是 4(比如，有个长度为 4 的路径从 c_4 开始，经过 c_5 又回到 c_4)。◀

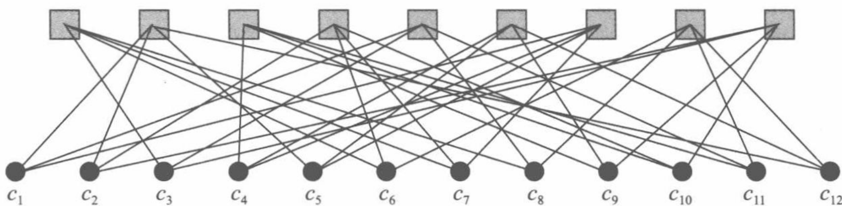


图 13-31　校验矩阵如式(13.6.8)的 LDPC 码的 Tanner 图

13.6.1　LDPC 译码

本节介绍 LDPC 码的两种译码算法，分别是比特翻转算法与和积译码算法，后者也称为信任传播算法。比特翻转是一种低复杂度的硬判决译码算法，而和积译码则是一种高复杂度的软判决算法。

比特翻转算法。比特翻转算法是一种硬判决的译码算法。假设 $\boldsymbol{y}$ 是信道的硬判决输出(比如，信道输出量化为 0 或 1)。比特翻转的第一步先计算校验式 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{H}^t$。如果校验式为 0，输出$\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{y}$ 并退出。否则，考虑 $\boldsymbol{s}$ 的非零分量。每个非零分量对应一个不满足的校验方程。当不满足的校验方程个数超出特定门限时，通过翻转 $\boldsymbol{y}$ 的非零分量进行 $\boldsymbol{y}$ 的更新。更新后，再重新计算校验方程，整个过程重复一定迭代次数或者直到校验式等于 0 停止。Gllager(1963)计算出了比特翻转算法中的最优门限值。

745

一种更简单的比特翻转译码的版本是仅翻转 $\boldsymbol{y}$ 中不满足校验方程中的那些比特，并重复计算校验式。迭代过程一直持续到校验式为 0 或达到了最大的迭代次数。有兴趣的读者可参考 Lin 和 Cosello(2005)对比特翻转算法及其各种修改版本更详细的描述。

和积译码算法。和积译码算法属于消息传送算法的一种，是基于在变量节点与校验节点之间传递似然比的一种迭代译码算法。这种算法中，每个变量节点接收信道的输出，并把这个码字分量的似然值传递给校验节点。每个校验节点利用从与之相连的(外信息)其他变量节点接收到的似然，更新每个比特的似然值并传递给对应的变量节点。迭代循环进行，直到达到最大的迭代次数，或者码字正确译出，即满足所有的校验方程。这里我们仅给出 AWGN 信道下 BPSK 调制的和积译码算法的步骤。感兴趣的读者可参考 Ryan 和 Lin(2009)对该算法更详细的描述。

对于 AWGN 信道下 BPSK 调制，0 映射为$\sqrt{\mathscr{E}}$，1 映射为$-\sqrt{\mathscr{E}}$，当第 i 条信道的输出为 y_i 时，相应的似然比为

$$L(y_i)=\ln\frac{p(y_i\mid 0)}{p(y_i\mid 1)}=\ln\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-(y_i-\sqrt{\mathscr{E}})^2}}{N_0}}{\mathrm{e}^{-(y_i+\sqrt{\mathscr{E}})^2}/N_0}=\frac{4\sqrt{\mathscr{E}}}{N_0}y_i \tag{13.6.10}$$

和积译码算法在每个节点 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 初始化，并把式(13.6.10)中的似然值传递给校验节点 $j\in M(i)$，$M(i)$代表与变量节点 i 相连的所有校验节点的集合。换句话说，对于 $1\leqslant i\leqslant n$，$j\in M(i)$，从节点 i 到节点 j 传递的信息为

746

$$L_{i\to j}=L_i=\frac{4\sqrt{\mathscr{E}}}{N_0}y_i \tag{13.6.11}$$

校验节点 j 从与其相邻的变量节点中获得所有消息后，利用以下关系计算出要传递给节点 i 的消息，$1\leqslant i\leqslant n$，

$$L_{j\to i}=2\tanh^{-1}\left(\prod_{i'\in N(j)-\{i\}}\tanh\left(\frac{1}{2}L'_{i\to j}\right)\right) \tag{13.6.12}$$

其中，$N(j)$表示与校验节点 j 相邻的变量节点的集合，对于所有 $i\in N(j)$。

接下来，变量节点根据从校验节点获取的信息来更新自己的信息，然后变量节点 i 向校验节点 $j(j\in M(i))$发送更新后的似然比

$$L_{i\to j}=L_i+\sum_{j'\in M(i)-\{j\}}L_{j'\to i} \tag{13.6.13}$$

式(13.6.12)和(13.6.13)是迭代计算且似然比在校验节点和变量节点之间不断更新，直到达到迭代次数或码字检验正确。码字的校验是依据以下公式计算出变量节点的总似然比

$$L_i^{总}=L_i+\sum_{j\in M(i)}L_{j\to i} \tag{13.6.14}$$

且利用以下式子检验$\hat{\boldsymbol{c}}$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_i=\begin{cases}1, & L_i^{总}<0\\0, & 其他\end{cases} \tag{13.6.15}$$

13.7 带宽受限信道的编码

前面讨论了两类主要的信道编码：分组码和卷积码，这两种编码都是通过扩展信号的带宽来提升系统的性能。在这两种情况下，编码使得已编码波形间的欧氏距离变大，且带宽增加了一个扩展因子$\dfrac{n}{k}=\dfrac{1}{R_c}$。在带宽足够宽且系统设计者不受严格的带宽约束时，这种编码被广泛地采用。深空通信系统就是这种情况。但是，在许多实际的系统中，信道带宽都受到了严格的限制，无法接受编码引起的信号带宽的扩展。例如采用电话线路传输数字信号(调制解调器设计)时，信道带宽严格受限，由于编码引起的系统开销严重制约传输速率。本节将讨论一种适用于限带信道的整体编码调制方法，称为网格编码调制。

747

13.7.1 编码与调制的结合

使用分组码或卷积码将增加信息的冗余度，从而增大编码波形间的欧氏距离。另一个方面，当采用二进制 PSK 调制时，传输信号的维数由 k 增加到了 n。由于信号带宽与信号维数成正比，因此信号维数的增加引起了带宽的增加，参见式(9.7.5)。如果既想获得编码带来的性能提升，同时又不想增加带宽，就必须使用二进制 PSK 以外的其他有效利用带宽的调制方式，即采用多级/多相位的调制以减少带宽。一定信号功率下的多级/多相位调制必定会使得信号星座图看上去更加“拥挤”，从而使信号星座图上的最小欧氏距离减

小，必然会对整个编码调制系统的性能产生负面影响。不过，下面将看到，信号星座图上最小欧氏距离的减少可以通过编码带来的汉明距离的增加得以弥补，这样系统的总体性能可以获得相当的改善。

例如，假设采用码率为 2/3 的编码，信源速率为 R bps，则编码器每秒输出 $3R/2$ 个二进制码元。如果想采用不扩展带宽的信号星座图进行调制，则必须为每个输出二进制码元分配维数 m，使得编码后的维数/秒等于未编码数据的维数(即 R)。因此，必须满足

$$R=\frac{3}{2}Rm \tag{13.7.1}$$

从而有

$$m=\frac{2}{3}\quad \text{维数 / 二进制符号} \tag{13.7.2}$$

这就是说，要设计的信号星座图应该为每 3 个二进制码元分配两个维数，而 3 个二进制码元等于信号星座图上的 8 个点，所以可以利用二维空间上 8 个点的信号星座图来实现目标。8-PSK 调制方案的星座图就是符合要求的调制方式之一。因此，如果将码率为 2/3 的编码与 8-PSK 调制方案相结合，就不会出现带宽的扩展。

下面考察该编码调制方式的编码增益。设未编码信号的可用功率为 P，则有

$$\mathscr{E}_b=\frac{P}{R} \tag{13.7.3}$$

两个未编码序列间的最小欧氏距离平方为 $d^2=(\pm 2\sqrt{\mathscr{E}_b})^2$ 或

$$d^2=\frac{4P}{R} \tag{13.7.4}$$

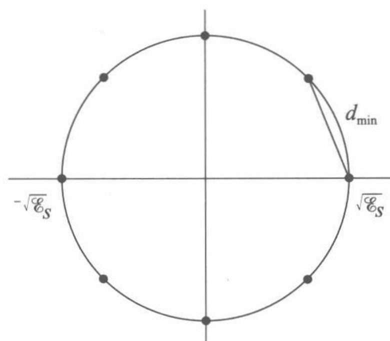


图 13-32　8-PSK 调制的信号星座图

748

如果两个信息位映射为 8-PSK 信号星座图上的一点，则这一点的能量为

$$\mathscr{E}_s=\frac{2P}{R} \tag{13.7.5}$$

因此，可以得出图 13-32 所示的信号星座图上最小欧氏距离的表达式为

$$d_{\min}^2=4\,\frac{2P}{R}\sin^2\frac{\pi}{8}=2(2-\sqrt{2})\,\frac{P}{R} \tag{13.7.6}$$

最小欧氏距离显然减小了。为了观察这种影响，推导使用此星座图所带来的衰减

$$\frac{d^2}{d_{\min}^2}=\frac{2}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}=3.141\sim 5.33\text{dB} \tag{13.7.7}$$

此衰减可以通过编码来弥补。当然，这里采用的 2/3 的码率不但应该补偿这一衰减，还应提供足够的额外增益，以保证对整个编码调制方案的作用。最小距离可达到一定的整体编码增益的任何分组码或卷积码都是可以采用的。例如，若要求整体编码增益达到 3dB，则编码必须能提供 8.33dB 的编码增益以补偿调制时 5.33dB 的衰减，并提供额外的 3dB 编码增益。要达到如此高增益的编码方法是相当复杂的，其编 \ 译码器的结构也很复杂。但是，在 13.7.2 节中将看到，如果把编码和调制作为一个整体来考虑，就可以使用很简单的编码方法获得类似的性能。

13.7.2　网格编码调制

网格编码调制(TCM)，是一种能够达到较好整体性能要求的简单的编码调制实现方式。这种编码调制方案是基于 Ungerboeck(1982)提出的“集合划分映射”的概念而形成的。

749

集合划分映射可以用于集合块编码和卷积码，由于卷积码有一种简单的最优软判决译码算法的存在(维特比算法)，因此这种映射方式多用于卷积码。

集合划分原则。对星座图进行划分的关键点在于找到相似的子集，并且这些子集中的点具有最大的分离度。从原始的星座图开始，首先将其分为两个等价的子集，每个子集中的点具有最大的分离度。接着继续对每一个分区都使用同样的规则。划分停止点取决于所用的码字。下面将简要讨论这一点。

图 13-33 是集合划分的一个例子。例子中的星座是一个 8-PSK 的星座图，并且星座图的功率为$\mathscr{E}_s$。这个星座图的最小距离为

$$d_0 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\,\mathscr{E}_s} \tag{13.7.8}$$

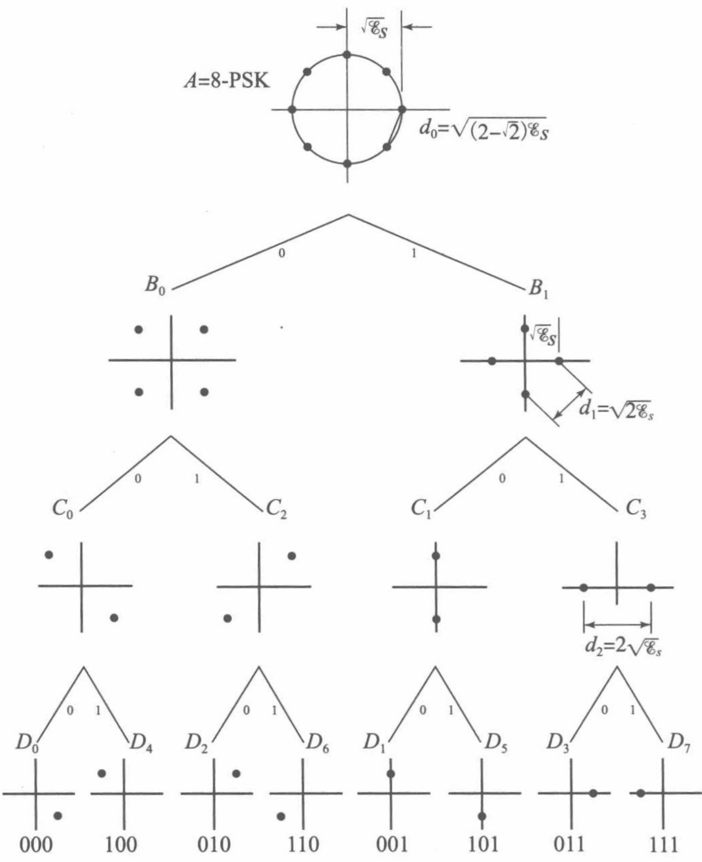


图 13-33 一个 8-PSK 星座图的分区

这个星座图被分为两个子集，分别表示为B_0和B_1。可以看到B_0和B_1是等价的。原始的 8-PSK星座图可以有多种子集划分方式，但是B_0和B_1有最大的分区内距离。容易看到这个距离为

$$d_1 = \sqrt{2\,\mathscr{E}_s} \tag{13.7.9}$$

进一步对B_0和B_1进行划分，可以得到C_0，C_1，C_2和C_3。此时，分区内距离增大至

$$d_2 = 2\,\sqrt{\mathscr{E}_s} \tag{13.7.10}$$

再进行一次划分可以得到八个分区，每一个分区内包含一个点。相应地可以将这八个分区表示为D_0到D_7。另一个例子见图 13-34 给出的 QAM 星座图集合划分。这个划分同样采用前面描述的规则。

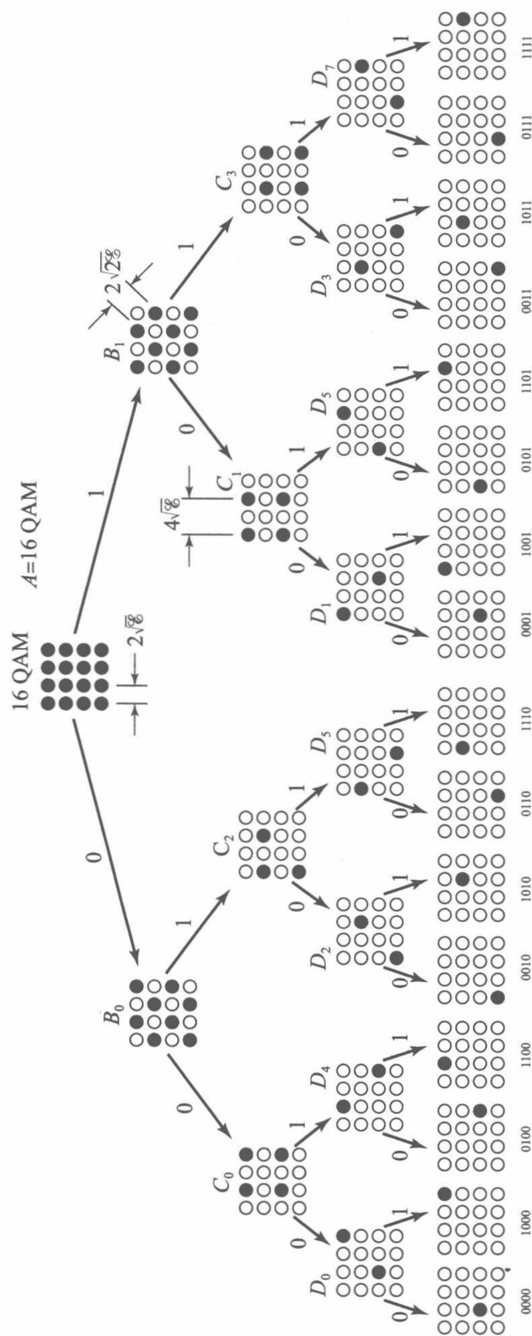


图 13-34　16-QAM 星座图的分区设置

编码调制。图 13-35 给出了一种编码调制方案的功能框图。k 个信息比特的码组分成两个长度分别为k_1和k_2的子码组，$k=k_1+k_2$。第一个k_1比特信息位输入到一个(n_1, k_1)码编码器。此编码器的输出包括n_1个比特。根据这些比特选择星座图划分的2^{n_1}个子集之一。子集被选定之后，根据剩余的k_2个比特选择子集中的一个点。这意味着在每一个子

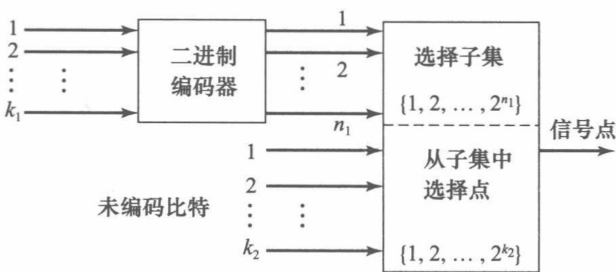


图 13-35　一个编码调制系统的框图

集中存在2^{k_2}个点。因此，所用的星座图有2^{n_1}个子集，每个子集中有2^{k_2}个点。这个过程给出了判断所需星座图有多大以及对此星座图必须采用几步完成划分的规则。

Ungerboeck(1982)已经表明，通过选择$n_1=k_1+1$且$k_2=1$，并且使用简单的卷积码，编码调制可以得到3到6个dB的增益。图13-36给出了一种这样的方案。在这个编码方案中，$k_1=$ 750 1，$n_1=2$，并且$k_2=1$。这个星座图包含$2^{n_1+k_2}=8$个点，这8个点可以分为$2^{n_1}=4$个子集，每个子集包含$2^{k_2}=2$个点。这里选择的星座图是一个8-PSK星座图，其划分如图13-33所示。卷积码可以采用任何码率$\frac{k_1}{n_1}=\frac{1}{2}$的码。这个码的约束长度是一个设计参数，调整这个参数可以提供理想的编码增益。较长的约束长度当然提供更高编码增益，代价是导致编解码复杂度的增加。这个简单的例子选择的约束长度为3。这个码的(一级)网格图如图13-36所示。

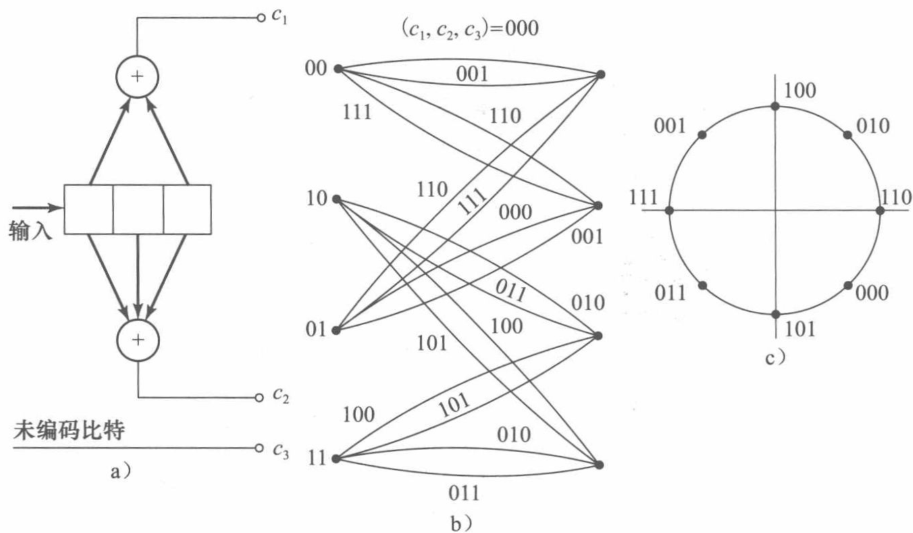


图 13-36 一个简单TCM设计

图13-36所示的码字网格图类似于规则卷积码的网格图。主要区别在于这个网格图包含了平行路径(转移)。这是由于额外的$k_2=1$个比特引起的，根据这个比特选择每个子集中的一个点。两个平行路径连接的两个状态对应一个子集，每个路径对应子集中的一个点。那么一个需要回答的问题是：星座图的点到码网格图的分支的最优分配是什么？根据大量计算机仿真和启发式推理得到以下规则：

751～753

1. 当网格图中包含平行转移时，平行转移对应于最后一级(提供最大欧氏距离的)划分中单个子集内的信号点。在这个例子中，$C_0=\{D_0, D_4\}$，$C_2=\{D_2, D_6\}$，$C_1=\{D_1, D_5\}$和$C_2=\{D_3, D_7\}$都对应平行转移。每个子集中的各点之间具有最大欧氏距离$d_2=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$。

2. 仅含有一个公共端点的转移(即，这些转移起始于同一个端点，或者结束于同一个端点)，对应最后一级划分中的子集，且这些子集在上一级划分中具有同一父子集。在这个例子中，子集$\{C_0, C_2\}$和$\{C_1, C_3\}$在同一个上层的父子集分别是B_0和B_1，在这种情况下，最大距离是$d_1=\sqrt{2\mathscr{E}_s}$。

3. 信号点应该具有同样的频率。

要了解图13-36所示网格编码调制方案的性能，需要找到两条具有同样起点和终点的路径的最小欧氏距离。这个距离称为自由欧氏距离，表示为D_{fed}，是网格编码调制方案的重要特征。替代两条平行路径间D_{fed}的另一个测度是欧氏距离。两条平行路径之间的欧氏距离$d_2=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$。图13-37所示为另一个候选路径。这两条路径间的欧氏距离为$d^2=d_0^2+2d_1^2=4.58\mathscr{E}_s$。显然，这个距离大于两条平行路径之间的距离。容易验证，对于这个码字，

自由欧氏距离是 $D_{fed}=d_2=2\sqrt{\mathscr{E}_s}$。将此结果与未编码方案进行对比，可以发现未编码方案(见式(13.7.4))中

$$d^2_{\text{uncoded}}=4\,\mathscr{E}_b=4\,\frac{P}{R} \tag{13.7.11}$$

而有编码的方案中

$$d^2_{\text{coded}}=4\,\mathscr{E}_s=8\,\mathscr{E}_b \tag{13.7.12}$$

因此，编码增益为

$$G_{\text{coding}}=\frac{d^2_{\text{coded}}}{d^2_{\text{uncoded}}}=2\sim 3\text{dB} \tag{13.7.13}$$

可见这种简单易行的编码方案能够在不增加带宽的同时获得 3dB 的编码增益。当然良好的性能也随之带来了编译码复杂度的增加。

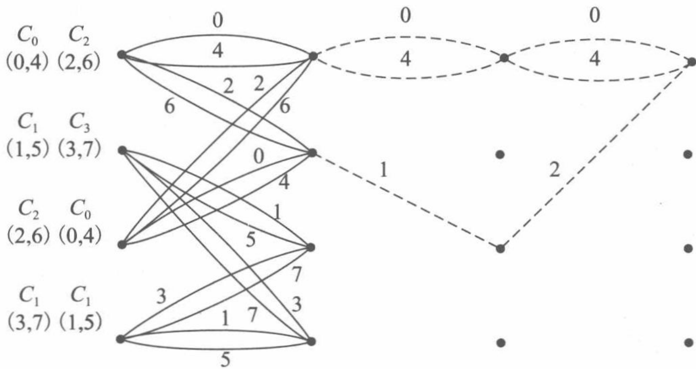


图 13-37　两个候选最小距离路径

754

取代 4 状态的网格图，具有更多状态数的网格图可以产生更高的编码增益。Ungerboeck 通过大量的计算仿真表明，8、16、32、64、128 以及 256 状态的网格图能获得 3.6～5.75dB 的增益。图 13-38 给出了 8 状态的网格图。

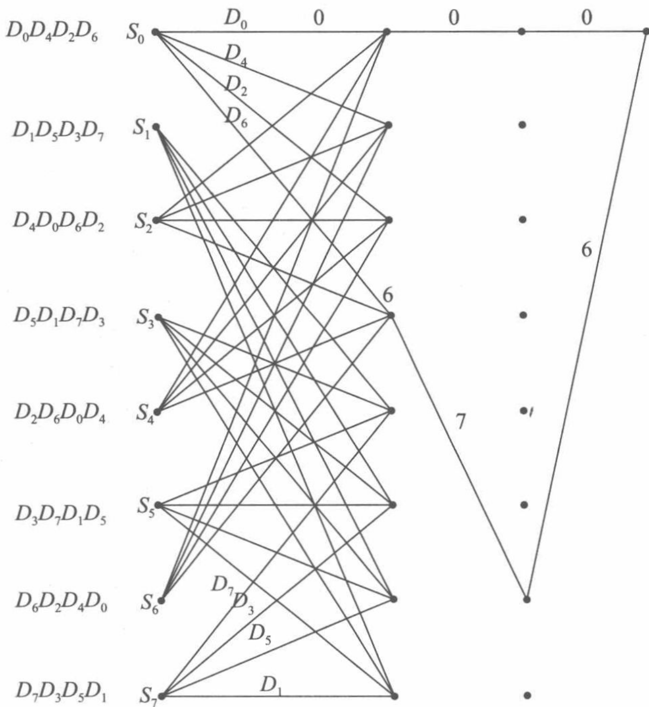


图 13-38　一个 8 状态 Ungerboeck 编码器

网格编码调制码译码。网格编码调制译码主要分为两个步骤。由于网格图的每个状态转移对应信号集的一个子集，而每个子集又对应一组信号点，首先要找到每个子集中上最有可能的信号点。可以通过查找每个划分内与接收点具有最短欧氏距离的信号点而实现。网格编码调制译码的第一步过程被称为子集译码。完成第一步后，对应着每个网格中的信号转移，存在唯一的点(最可能点)，与唯一的欧氏距离(即接收点与最可能点之间的距离)。译码的第二个步骤是利用欧氏距离搜寻网格图上与接收序列具有最短欧氏距离的路径，可以通过维特比算法实现。

13.8 编码的应用实例

在前面几节中，已经了解到编码可以提高有效 SNR，从而改善数字通信系统的性能。前面讨论了分组码、卷积码以及它们的复合形式(级联码和 Turbo 码)常常应用于带宽限制并不严格的通信环境，译码引起的带宽扩展是可以允许的。另一方面，在带宽是关键因素的环境中，例如电话线路上的数字通信，通常可以采用编码调制。通过编码，实际中的数字通信系统的性能增益可以提高到 9dB，这具体取决于应用的实际情况和采用的编码类型。这一节将讨论编码在两种数字通信中的实际应用，即深空通信和电话线调制解调器中的编码。

13.8.1 深空通信中的编码

深空通信信道的特点是信噪比非常低，没有带宽限制。发射器功率通常来源于随身携带的太阳能电池，其值为 20～30W。发射天线的物理尺寸有严格的限制，因此它的增益也是非常有限的。发射器和接收器之间距离遥远且没有中继器，所以接收端信噪比很低。信道噪声是白高斯随机过程，可以建模成 AWGN 信道。由于该信道上带宽没有限制，因此可以使用分组码和卷积码。

在登录火星的海盗号轨道卫星和登陆器上，采用(32，6)分组码(Reed-Muller 码)。在错误概率为 10^{-6}时，与未编码的 PSK 系统相比它能够获得 4dB 的编码增益。后来，在探测外太空星球(火星、木星和土星)的旅行者太空探测任务中，采用了两种维特比译码的卷积码。为了这次计划，在美国的喷气推进实验室(JPL)设计了两种约束长度 $L=7$ 的(2，1)卷积码编码

755～756

$$\boldsymbol{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$
$$\boldsymbol{g}_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

和约束长度 $L=7$ 的(3，1)卷积码

$$\boldsymbol{g}_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$
$$\boldsymbol{g}_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$
$$\boldsymbol{g}_3 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

第一种编码的自由距离 $d_{\text{free}}=10$，第二种编码的自由距离 $d_{\text{free}}=15$。这两种码都采用软判决维特比算法，其输出量化级数 $Q=8$。在错误概率为 10^{-5}时，第一种编码和第二种编码分别能获得 5.1dB 和 5.7dB 的编码增益。两种编码都与香农理论极限相差 4.5dB。

随后 1986 年飞往天王星的 Voyager 探测器采用了级联码，内码为约束长度 $L=7$ 的(2，1)卷积码，外码是(255，223)里德-所罗门码。地球上的接收终端采用维特比译码与里德-所罗门译码器，在错误概率为 10^{-6}的情况下，能够提供 8dB 的编码增益。该系统的传输速率约为 30kbps。

其他适用于卷积码的译码算法在深空通信项目中也有实际应用。美国国家航空航天局(NSNA)的 Pioneer 9 上采用了约束长度 $L=21$ 的(2，1)卷积码生成序列为(8 进制式)

$$\boldsymbol{g}_1 = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$\boldsymbol{g}_2 = [7 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 3 \quad 7]$$

其译码采用了 Fano 算法的软判决译码，输出量化级数为 8。在 Pioneer 10、Pioneer 11 和

Pioneer 12 以及 Helios A、Helios B 德国绕日轨道飞行器中都使用了约束长度 $L=32$ 的(2，1)卷积码，以八进制形式表示的生成序列为

$$\boldsymbol{g}_1=[7\quad 3\quad 3\quad 5\quad 3\quad 3\quad 6\quad 7\quad 6\quad 7\quad 2]$$
$$\boldsymbol{g}_2=[5\quad 3\quad 3\quad 5\quad 3\quad 3\quad 6\quad 7\quad 6\quad 7\quad 2]$$

这种码的自由距离为 $d_{\text{free}}=23$。其译码算法同样采用具有 8 级输出量化的 Fano 算法。在国际通信卫星组织(INTELSAT)的通信卫星上，许多编码方案都采用了大数逻辑的译码算法。例如，某卫星使用 $L=48$ 的(8，7)码以 64kbps 传输，错误概率从10^{-4}降为 5×10^{-8}。伽利略空间计划中采用了(4，1，14)卷积码，频谱比特速率为$\frac{1}{4}$，$\mathscr{E}_b/N_0$ 为 1.75dB，错误概率为 10^{-5}。该码的性能与香农极限相差 2.5dB。以(255，223)里德-所罗门码作为外码，编码增益能得到 0.8dB 的改善。两者构成了级联码，距香农极限仅有 1.7dB。而 Turbo 码工作的频谱比特率为 0.5，距香农极限 0.5dB，性能优于上述所有系统。 757

13.8.2 电话线路调制解调器的编码

电话线路信道的特征是带宽受限，通常在 300～3000Hz 之间，具有极高的信噪比，通常为 28—30dB 甚至更高。因此，在设计电话线路信道时，必须考虑带宽受限的问题。深空通信的情况则截然不同，其主要问题是功率受限。这一点对应图 12.17 中 $r\gg1$ 的情况。由于带宽有限，所以只能采取低维数的信号形式。而功率资源丰富，可以采用多电平调制方法。13.7 节中所提及的网格编码调制适用于这种情况。

历史上，最早的(1960s 之前)电话信道调制解调器采用异步检测的频移键控调制，它可达到 300～1200bps 的比特速率。到了 20 世纪 60 年代早期，第一代的同步调制解调器采用 4PSK 调制，可获得 2400bps 的比特速率。得益于均衡技术的发展，更加复杂的信号星座图可以获得更高的传输速率。其中 8PSK 调制解调器可以达到 4800bps 速率，16 点 QAM 调制解调器能达到 9600bps。在 20 世纪 80 年代初期，使用 64 点 QAM 则可获得高达 14400bps 的速率。这些进步是均衡技术、信号处理技术以及电话线路性能改善共同作用的结果。

网格编码调制技术能够在不增加额外带宽的前提下，设计编码调制系统以及改善系统的整体性能。Wei(1984)提出的网格编码调制方案，是 Ungerboeck 编码的变形之一，并且被国际电报电话咨询委员会(CCITT)采纳成为一个通用标准。该编码是基于线性或非线性的卷积码以保证 180°或 90°的相移。在接收端采用 PLL 进行载波相位检测的情况下，采用此方案可以有效避免不同编码方法导致的相位模糊。此方案与 Ungerboeck 编码在状态数相同时的性能相当，并且能提供所需的稳定相位。图 13-39 中给出了 CCITT V.32 标准采纳的 8 状态网格编码调制系统的差分编码器、非线性卷积码编码器和信号分配图。

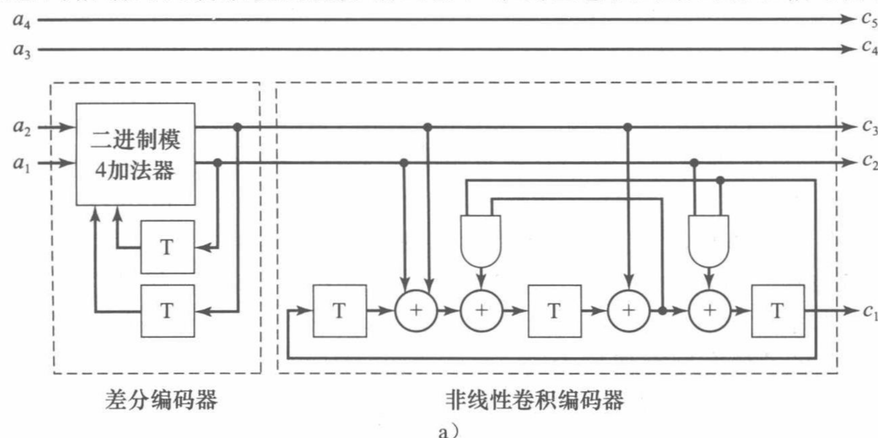
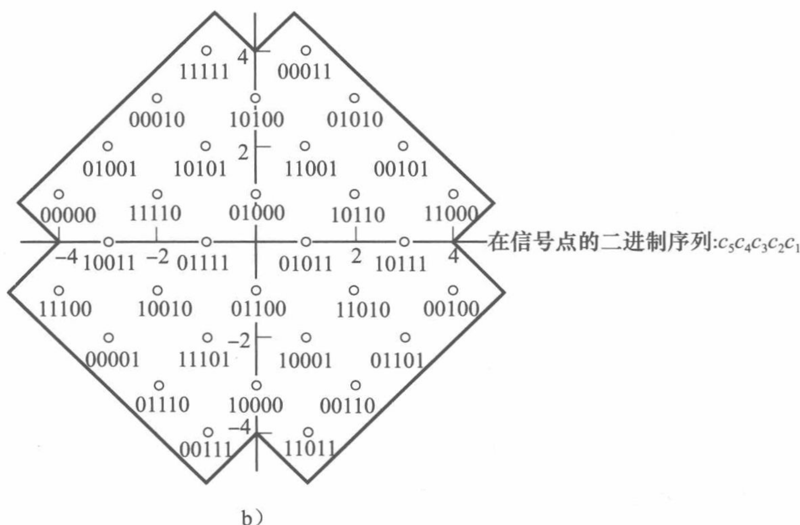


图 13-39 a)差分编码及非线性卷积码编码器；b)V.32 标准采用的信号星座图分布



b)

图 13-39 （续）

13.9 小结及深入阅读

12 章所阐述的香农有噪信道编码理论表明：在有噪信道中，当且仅当传输速率小于信道容量的情况下才有可能实现可靠的信息传输。然而，该理论仅仅只是个存在性的理论却不是一个结构化的理论。虽然理论表明了以任意小于信道容量的传输速率进行可靠通信的存在性，却并没有提供设计这样的码字的结构性方法。受香农理论的启发，过去的 60 年间，大量的研究工作关注于设计这样一个编码方案，使其能够接近香农的理论极限，同时能够使得译码更为简单。在本章中，我们关注于线性分组码和卷积码这两类码字，并介绍其码字结构以及最大似然译码算法。

758～759

我们为线性分组码和卷积码介绍了两种译码方法，分别是软判决和硬判决的译码。软判决译码在性能上相对硬判决译码有 2dB 的译码增益。对分组线性码通常采用硬判决，而对于卷积码则采用维特比算法的软判决译码。

同时我们也介绍了一种方法，即通过两个码字级联成一个新的码字，并根据每种码字的独立的译码算法，使这种级联码具有更为简单的译码复杂度。我们尤其关注了 Turbo 码以及在一次译码过程中的 BCJR 软判决译码。此外，还介绍了 LDPC 码以及它的两种迭代译码算法，即比特翻转算法以及和积算法。

最后，还讨论了编码技术在带宽受限的信道中的实际应用。我们阐述了网格编码调制技术并提及了联合编码调制的概念。介绍了 Ungerboeck 的集划分规则，并表明网格编码调制运用这些规则可以提供 3～6dB 的编码增益。

Golay(1949)、Hamming(1950)、Bose 和 Ray Chaudhuri(1960a，1960b)、Reed 和 Solomon(1960)是分组码发展过程中具有里程碑意义的文献。卷积码最早由 Elias(1955)提出，Wozencraft 和 Reiffen(1961)、Fano(1963)、Zigangirov(1966)、Viterbi(1967)和 Jelinek(1969)提出了卷积码的多种译码方法。网格编码调制由 Ungerboeck(1982)提出，并由 Forney(1988a，b)进一步完善。乘积码由 Elias(1954)提出，级联码由 Forney(1966)提出并进行了分析。Berrou、Glavieux 和 Thitimajshima(1933)介绍了 Turbo 码。Gallager(1962，1963)提出了低密度奇偶校验码。

对编码理论感兴趣的读者可以参考以下文献：Berlekamp(1968)、Peterson 和 Weldon(1972)、MacWilliams 和 Sloane(1977)、Lin 和 Costello(2005)、Blahut(1983)、Wicker(1955)、Johannesson 和 Zigangirov(1999)、Biglieri(1991)，以及 Ryan 和 Lin(2009)的著作。

习题

13.1 在例13.2.1中，求码字的最小距离。哪个码字具有最小权重？

13.2 在例13.2.3中，证明所有码字满足

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{t}=0$$

13.3 列出所有的(7，4)汉明码码字，证明最小距离为3。

13.4 找出系统形式的(15，11)汉明码的奇偶校验矩阵和生成矩阵。

13.5 证明线性分组码的最小汉明距离等于其奇偶校验矩阵中线性相关的最小列数。并利用此结论说明汉明距码的最小汉明距离是3。

13.6 分组长度为n的全0码字$\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{n}$和$\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{n}$构成了一个简单的循环码，求此循环码系统形式的奇偶校验矩阵和生成矩阵。该码的码率和最小距离是多少？

13.7 $\boldsymbol{G}$是一个(6，3)线性码的生成矩阵，在每个码字上附加一个校验位使得码字的汉明重量为偶数。

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

1. 求扩展码的奇偶校验矩阵。
2. 求扩展码的最小距离。
3. 求扩展码的编码增益。

13.8 比较未编码系统和采用(15，11)汉明码系统的分组错误概率。传输速率为$R=10^4$ bps，信道是AWGN信道，接收功率为1μW，噪声功率频谱密度$\frac{N_0}{2}=10^{-11}$ W/Hz。采用二进制PSK调制方案和软判决解码技术。若采用硬判决解码技术，重新进行比较。

13.9 求(7，4)汉明码的标准，并由此对接收序列(1，1，1，0，1，0，0)进行译码。

13.10 在一个编码通信系统中，M个信号(1，2，…，$M=2^k$)用M个基带信号$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_M(t)$传输，每个信号的持续时间为nT，$x_i(t)$的一般形式为

$$x_i(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\psi_{ij}(t-jT)$$

其中$\psi_{ij}(t)$是$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$中的任意一个($t\notin[0,T]$时，$\psi_1(t)=\psi_2(t)\equiv0$)。再假设$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$具有同样的能量$\mathscr{E}$，并且信道是理想的(无衰减)加性高斯白噪声信道，噪声功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$，因此接收的信号$r(t)=x(t)+n(t)$，其中$x(t)$是$x_i(t)$之一，$n(t)$表示噪声。

1. 若$\psi_1(t)=-\psi_2(t)$，证明信号空间的维数N满足$N\leqslant n$。
2. 在一般情况下，证明$N\leqslant 2n$。
3. 对于$M=2$，证明对$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$有
$$P[\text{错误}\mid\text{发送}\ x_1(t)]\leqslant\int\underset{R^N}{\cdots}\int\sqrt{f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_1)f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_2)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
其中$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$是$r(t)$，$x_1(t)$和$x_2(t)$在N维空间中的矢量表示。
4. 利用第3问，证明对任意的M，都有：
$$P[\text{错误}\mid\text{发送}\ x_m(t)]\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant m'\leqslant M\\m'\neq m}}\int\underset{R^N}{\cdots}\int\sqrt{f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_m)f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_{m'})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
5. 证明
$$\int\underset{R^N}{\cdots}\int\sqrt{f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_m)f(\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{x}_{m'})}\,d\boldsymbol{r}=e^{-\frac{|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_{m'}|^2}{4N_0}}$$
因此，
$$P[\text{错误}\mid\text{发送}\ x_m(t)]\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant m'\leqslant M\\m'\neq m}}\mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_{m'}|^2}{4N_0}}$$

13.11 某卷积码如下所示：

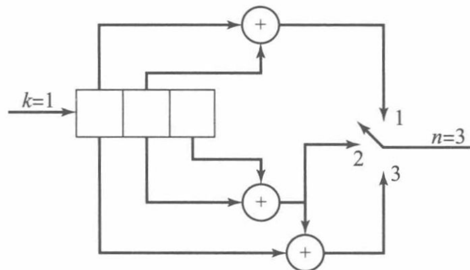
$$\boldsymbol{g}_1=[1\quad 0\quad 0]$$
$$\boldsymbol{g}_2=[1\quad 0\quad 1]$$
$$\boldsymbol{g}_3=[1\quad 1\quad 1]$$

1. 画出卷积码的编码器。
2. 画出该卷积码的状态转移图。
3. 画出该卷积码的网格图。
4. 求其转移函数和自由距离。
5. 检验该卷积码是否会产生灾难性错误。

13.12 试证明在卷积码的网格图上，进入每一条状态的支路数目是2^k条，从每一状态出发的支路数目也是2^k条。

13.13 习题13.13图是某二进制卷积码的框图

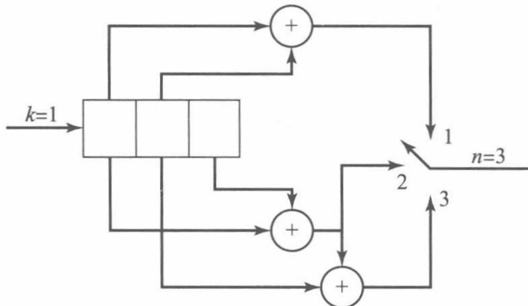
1. 画出其状态图。
2. 求转移函数$T(D)$。
3. 求编码的自由距离d_{free}。
4. 若编码的输出经错误概率$p=10^{-5}$的二进制对称信道传输，如果接收序列为$\boldsymbol{r}$=(110，110，110，111，010，101，101)，使用维特比算法求发送比特序列。
5. 求这种编码在上述二进制对称信道中比特错误率的上限。(可使用一切合理的近似。)



习题 13.13 图

13.14　某(3，1)卷积码的编码框图如习题 13.14 图所示。

1. 画出状态图。
2. 求转移函数 $T(D)$。
3. 求编码的自由距离 d_{free}，并在网格图上画出相应路径(与全 0 码字相距 d_{free} 的路径)。
4. 对 4 信息比特(x_1，x_2，x_3，x_4)和紧接的两比特 0 进行编码，以 0.1 的交叉概率通过二进制对称信道，已知接收序列为(111，111，111，111，111，111)，使用维特比算法求出最大似然数据序列。



习题 13.14 图

13.15　习题 13.11 中卷积码通过一个加性高斯白噪声信道传输，并使用硬判决译码，解调器检测器的输出是(101001011110111…)。使用维特比算法求发送序列。

13.16　使用下式中的编码：

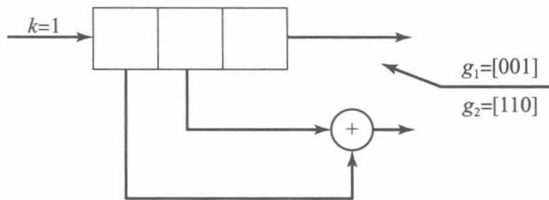
$$g_1 = [1 \quad 1 \quad 0]$$
$$g_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$$
$$g_3 = [1 \quad 1 \quad 1]$$

重做习题 13.13。

13.17　指出例 13.3.3 中所有重量为 6 的码字在网格图上的路径。

13.18　习题 13.18 图是某卷积码的编码器。

1. 求该卷积码形如 $T(N, D)$的转移函数。
2. 求编码的自由距离 d_{free}。
3. 若采用硬判决维特比译码，设信道的交叉概率为 $p=10^{-6}$，利用硬判决极限求该卷积码的平均比特错误概率的上限。



习题 13.18 图

13.19　$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是距离为 d、长度为 n 的两个码字，在交叉概率为 p 的二进制对称信道中传输，码字在传输中的错误概率用 $P_2(d)$表示。

1. 证明：

$$P_2(d) \leqslant \sum_{i=1}^{2^n} \sqrt{p(\boldsymbol{y}_i \mid \boldsymbol{x}_1) p(\boldsymbol{y}_i \mid \boldsymbol{x}_2)}$$

其中，求和运算的对象是所有二进制序列 y_i。

2. 利用上式推导

$$P_2(d) \leqslant [4p(1-p)]^{\frac{d}{2}}$$

3. 利用上式结果，证明式(13.2.36)。

13.20　互补误差函数 erfc(x)定义为

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

1. 将概率积分函数 $Q(x)$用 erfc(x)表示。
2. 利用不等式

$\text{erfc}(\sqrt{x+y}) \leqslant \text{erfc}(\sqrt{x}) \mathrm{e}^{-y}$，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$

证明软判决译码时，卷积码的平均比特错误概率的上限为：

$$p_b \leqslant \frac{1}{2k} \text{erfc}\left(\sqrt{d_{\text{free}} R_c \gamma_b}\right) \mathrm{e}^{d_{\text{free}} R_c \gamma_b} \frac{\partial T(D, N)}{\partial N}\bigg|_{N=1, D=\mathrm{e}^{-R_c \gamma_b}}$$

其中，$\gamma_b = \frac{\mathscr{E}_b}{N_0}$。

13.21　利用一个(n_1，k_1)=(7，4)的系统汉明码和(n_2，k_2)=(6，2)的系统码作为分量码，设计乘积码，生成如下所示的矩阵：

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 确定乘积码的最小距离。
2. 如果乘积码采用最优硬判决译码，它能纠正的最大错误数为多少？
3. 假设长度为 $k=k_1 k_2=8$ 的信息序列由全 1 构成。采用与图 13-20 相似的 $n_2 \times n_1 = 6 \times 7$ 矩阵，求出该序列的所有 $n_1 n_2 - k_1 k_2 = 34$ 个奇偶校验比特。
4. 假设不采用最优硬判决解码，采用一种简单的解码方案，其中硬判决解码首先应用于行，再应用于列。证明采用这种简单的策略，码字可以纠正码重为 3 的所有错误模式，但不能纠正码重为 4 的所有错误模式。

13.22　证明式(13.5.29)。

13.23　一个网格编码调制系统采用由{±1，±3，±5，±7}给出的 8 位 PAM 信号集，4 状态网格编码调制器如图 13-36(a)所示。

1. 采用集划分原则，将信号集划分为 4 个子集。
2. 如果信道是加性高斯白噪声信道，在匹配滤波器的输出观测到了序列(−0.2，1.1，6，4，−3，−4.8，3.3)，传输的最大可能序列是什么？

760～765

上机习题

13.1　重复码的错误概率

二进制对称信道的交叉概率为 $p=0.3$。对于长度为 n 的简单重复分组码，计算并画出错误概率 P_e，其中 n 为奇数，$n=3$，5，…，41。画出 P_e 对 n 的图形。

13.2　线性分组码

(10，4)线性分组码的生成矩阵由下式给出：

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\1&1&0&1&1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

确定所有码字和码字的最小码重。

13.3　汉明码

本题的目的是确定(15，11)汉明码的所有码字。

1. 确定(15，11)汉明码的奇偶校验矩阵，它具有如下形式：

$$H=[\mathbf{P}^t \mid I_k]$$

2. 确定生成矩阵 G，它具有如下形式：

$$G=[I_k \mid P]$$

3. 利用生成矩阵生成并列出码中的所有码字。

13.4　硬判决解码的性能

(15，11)汉明码与堆积信号一同使用，在接收端采用硬判决解码检测码字。任意码字中单个比特的错误概率由下式给出：

$$P_2=Q\left(\sqrt{\frac{2R_c\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$

其中$\mathscr{E}_b/N_0$ 是 SNR/bit，R_c为码率(11/15)。比较并画出作为$\mathscr{E}_b/N_0$ 函数的(上限)码字错误概率。

13.5　软判决解码

(15，11)汉明码与对极信号一同使用，在接收端采用硬判决解码检测码字。利用错误概率上限

$$P_M=(M-1)Q\left(\sqrt{\frac{2d_{\min}R_c\mathscr{E}_b}{N_0}}\right)$$

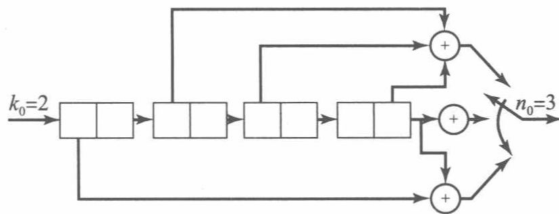
计算并画出作为$\mathscr{E}_b/N_0$ 函数的 P_M。

13.6　卷积编码器

信息序列如下所示

10011100110000111

求上机习题 13.6 图中卷积编码器的输出序列。编码器的初始状态为全零状态。



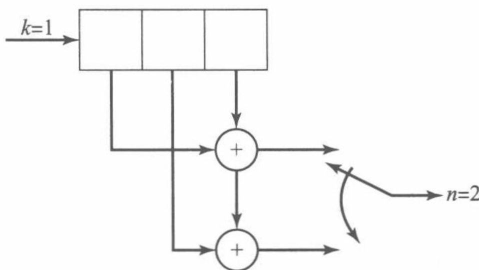
上机习题 13.6 图

13.7　维特比译码

上机习题 13.7 图所示的编码器用来传输 5 个信息比特的序列，随后的两个零用来刷新解码器。(硬判决)量化后输入维特比解码器的接收序列为

$$y=0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1$$

1. 画出卷积码的网格图，并标注支路。
2. 确定维特比译码器输出的具有最大可能性的 5 位信息序列。



上机习题 13.7 图

13.8　如图 13-24 所示，利用 5/7 RSCC 对二进制序列进行编码。利用 MATLAB 编写程序输出对应的校验比特。假设对应的输入序列为

$$u=[0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1]$$

利用程序产生其对应的校验比特。假设编码器的初始状态为全零状态。

13.9　如式(13.5.8)，用 MATLAB 程序完成 BCJR 前向递归算法的计算。

13.10　如式(13.5.11)，用 MATLAB 程序完成 BCJR 后向递归算法的计算。

13.11　如式(13.6.11)至式(13.6.15)，用 MATLAB 程序完成 LDPC 码和积译码算法。

766～768

第14章 衰落多径信道中的数据传输

第 8～10 章描述的信息传输的数字调制和解调方式都是在两种信道下实现的，即加性高斯噪声信道和线性滤波信道。这两种信道模型主要适用于信道物理特性相对稳定的情况，即，时不变信道传输模型。本章讨论的调制解调方法主要适合于无线通信信道，例如无线电通信以及语音通信信道，这一类信道的传输特性是随时间变化的。

14.1 无线信道的物理特性

具有时变传输特性的物理信道可以用时变线性滤波器表征。这种线性滤波器可以表示为时变冲激响应 $c(\tau;\ t)$，$c(\tau;\ t)$是信道在时刻 t 对作用于时刻 $t-\tau$ 的冲激信号的响应；τ 表示“年龄”(持续时间)变量。前文在图 1-10 中给出了具有加性噪声的时变线性滤波信道模型。下面引用的无线通信信道的例子就采用这种方式表示信道模型。

高频电离层中的信号传输。回顾第 1 章所讲的天波传播，如图 1-6 所示，电离层的变化会导致传输信号[高频(HF)频段中]发生弯曲或折射。其中电离层中具有多层带电粒子，且其范围在距地球表面 30～250 米内。由于这些电离层的存在，使得信号通过多种延时不同的传播路径到达接收端。这些信号分量称作*多径分量*。信号的多径分量通常具有不同的载波相位偏移，在叠加时会引起信号的显著畸变，这种现象叫做*信号衰落*。因此，信号的多径传输会引起信号衰落。为了来描述这一信道特征，常采用时变冲激响应模型。

769

蜂窝移动传输系统。在基站和手机之间的蜂窝移动无线传输系统中，信号由基站发出经传输由移动设备接收。在传输过程中，信号往往会受到周边建筑物、山体，以及其他障碍物的影响，在多径传输下会以不同的时延到达接收端。因此接收信号具有与经电离层传播的信号的相似特点。对于从移动设备到基站的传输中该结论也同样适用。此外，由于移动设备(汽车、火车等)的移动速度，也会引起信号的各个频率分量(见习题 14.1)发生频率偏移，这种频率偏移称为*多普勒频移*。

视距微波无线电传输。在信号的视距无线电传输中，为了避免在信号传输路径中出现类似于建筑物和山体等障碍物的影响，通常将发射和接收天线置于高塔上。但是，如图 14-1所示，当传播路径经过存在高障碍物或丘陵的地形时，信号可能会从地面反射到接收端。特别是在恶劣的天气条件下，该问题尤为严重。在这种情况下，除了一个接收信号分量通过直达路径到达接收端以外，还有一组分量受到地面地形反射通过二次路径传输。因此后者到达接收端时存在时延变量，从而构成多径传输。为了减少二次反射的发生，在无线视距传输中通常使用窄带波束天线。不过在实际中经常接收到的是反射波，且这些反射波是时变的，因此常采用时变冲激响应来描述信道特征。

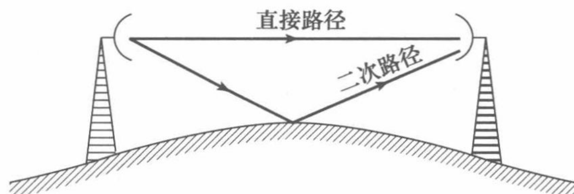


图 14-1　LOS(视距)微波传输中的多经传输示意图

飞机间无线通信。如图 14-2 所示，两架飞机间的无线通信，接收端可能接收到经地面反射的信号分量，尤其当这种通信系统中采用全向天线时更为显著。所有经地面反射后

到达接收端的信号分量，会具有不同的时延和衰落。此外，飞机的运动会造成信号分量的多普勒频移。在很多方面，这种情况与移动蜂窝通信系统中的相类似。

770

水下声音信号的传输。由于浅水域声音信号会受到海面和海底的反射，其信道的特征与多径信道相类似。随着波浪运动，信号的多径分量会在时变传输下承受不同时延，从而导致信号衰落。此外，这里还存在随信号频率平方比例增加的频率相关衰落。

以上简要描述的信道可以直接表示为具有时变冲激响应的线性系统。要确定地描述上述信道中信号传输的微观效应，往往很困难，甚至不可能，因此引入统计方法是合理的。下面就描述这种方法。

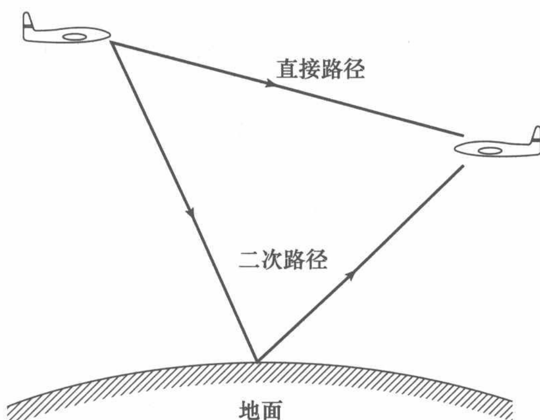


图 14-2　飞机到飞机通信中的多径传输示意图

14.2　时变多径信道模型

通过观察可以发现，上述几种信道具有两个明显的特性。一个特性是传输信号通过多径传播路径到达接收端，每条路径都具有相应的时延。例如，若发送一个极短脉冲，信道中因存在多种散射物(如电离层的带电粒子)，致其响应如图 14-3 所示。由于复杂散射物的存在，信号经过一段时间传播后才在不同的时延情况下到达接收端，因此说信道是时间离散的。

上述信道的第二个特性是传播媒介的构造会引起传输时间的变化。由于这种传输时间的变化，使得信道对于任何传输信号的响应都会产生时间上的变化。因此，如果反复进行短脉冲传输实验，可以观察到由于传播媒介的物理变化造成接收信号的改变。这种变化包括复杂散射物引起的信号相对时延变化。因此，接收信号如图 14-3 所示。也就是说信道冲激响应是随时间变化的。一般对于信道的使用者来说，接收信号的时间变化是不可预测的。因此需要用统计方法来描绘时变多径信道。

771

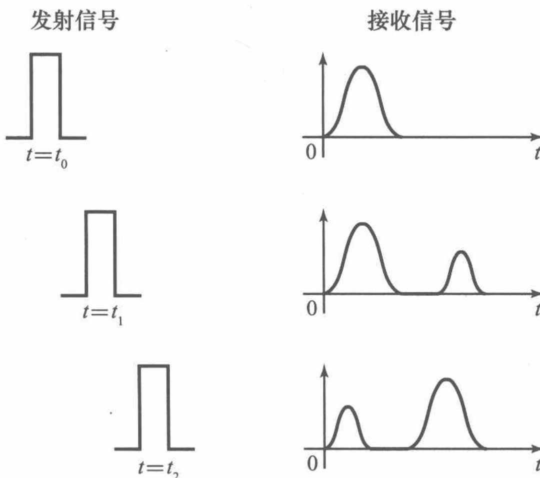


图 14-3　时变信道响应图

为了获得对信道的统计描述，在传输中加入非调制载波

$$s(t) = A\cos 2\pi f_c t \tag{14.2.1}$$

接收信号在无噪声条件下的表达式如下：

$$x(t) = A\sum_n \alpha_n(t)\cos[2\pi f_c(t-\tau_n(t))] = A\ \mathrm{Re}\left[\sum_n \alpha_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c\tau_n(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_c t}\right] \tag{14.2.2}$$

其中 $\alpha_n(t)$是第 n 条路径的时变衰减因子，$\tau_n(t)$是对应的传播延迟。信号的复数表达式如下：

$$c(t) = \sum_n \alpha_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c\tau_n(t)} = \sum_n \alpha_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n(t)} \tag{14.2.3}$$

上式表示信道对复指数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c t}$ 信号的响应。可以发现，尽管输入信道的信号是单频信号，即信号只含有一个频率分量，但是信道输出会包含多个不同的频率分量。这些新增分量的

产生，是信道响应中时间变化的结果。$c(t)$的均方根频谱宽度称为信道的*多普勒频率扩展*，表示为B_d。这个量是用来衡量信号$c(t)$随时间变化快慢程度的测度。如果$c(t)$变化慢，多普勒频率扩展相对较小；如果$c(t)$变化快，则多普勒频率扩展大。

772

可以看到式(14.2.3)中的复数值$c(t)$是一组均具有时变振幅$\alpha_n(t)$及相位$\varphi_n(t)$的矢量之和。一般物理媒介出现很大动态变化会引起$\{\alpha_n(t)\}$的大变化。另一方面，当$\{\tau_n(t)\}$改变$1/f_c$时，相位$\{\varphi_n(t)\}$将会改变2π弧度。但是$1/f_c$其实是一个较小的数值，因此，当媒介特性发生相对较小的变化时，相位$\{\varphi_n(t)\}$会产生2π或更大的弧度。同时也希望不同信号路径下的时延$\{\tau_n(t)\}$能够以不可预测(随机)的方式按照不同的速率进行变化。这意味着，式(14.2.3)中的复数值信号$c(t)$可以视为一个随机过程。存在很多信号传播路径时，可以使用中心极限定理。因此，$c(t)$可以被看作是复数形式的高斯随机过程。

信道的多径传输模型可以用接收信号$x(t)$或式(14.2.3)中的$c(t)$表示，多径传播会引起信号衰落。衰落现象主要是时变相位因子$\{\varphi_n(t)\}$的结果。有时$c(t)$中的复值矢量叠加畸变会严重影响接收信号功率水平。还有些情况下，$c(t)$中的复值矢量有效地叠加能产生很大的接收信号值。由信道的时变多径传输引起的接收信号幅度变化值称为*信号衰落*。

多径扩展和相干带宽。在传输信号中第一个和最后一个多径分量的到达时间的间隔叫做信道的*多径时间扩展*。记此信道参数为T_m。一个与之相关的参数是多径时间扩展的倒数，该参数提供了一种衡量传输信号的频率分量受到信道相似影响程度的带宽测度。定义此信道参数为

$$B_{cb} = \frac{1}{T_m} \tag{14.2.4}$$

并且称之为信道的相干带宽。例如，如果传输信号的所有频率分量均落在相干带宽B_{cb}内，则会产生同时衰落。如果传输信号的带宽$W<B_{cb}$，则称信道具有*非频率选择性*，那么在任一传输时刻所有传输信号的频率分量同时衰落。另一方面，若传输信号的带宽$W>B_{cb}$，则远大于B_{cb}部分的频率分量将会受到信道的不同影响。那么在任意传输时刻中，会有一部分传输信号的频率分量衰落，而另一些分量却没有。这种情况下，称信道具有*频率选择性*。

多普勒扩展和相干时间。另一个信道参数是多普勒频率扩展的倒数，用来衡量信道响应几乎不变的时间间隔。定义这个参数为

773

$$T_{ct} = \frac{1}{B_d} \tag{14.2.5}$$

并且称之为信道的*相干时间*。例如，当一个信号在两个不同的时刻发送，且时间间隔小于T_{ct}时，两个信号将会受到信道的相似影响。因此，如果第一时刻信道中的传输信号具有深衰落，那么在第二时刻传输的信号也会具有深衰落。另一方面，如果传输信号间的时间间隔远大于相干时间T_{ct}，那么信道对于这两个传输信号会产生不同的影响。

例 14.2.1 对于一个短波电离层无线信道，其特性由以下参数表征，多径时间扩展$T_m=5\text{ms}$，多普勒频率扩展$B_d=0.1\text{Hz}$. 求信道相干带宽和相干时间的值。

解：信道的相干带宽为

$$B_{cb} = \frac{1}{T_m} = 200\text{Hz}$$

信道的相干时间为

$$T_{ct} = \frac{1}{B_d} = 10\text{s}$$

◀

信道扩展因子。T_mB_d乘积通常被称为*信道扩展因子*。如果$T_mB_d<1$，则信道被称为*欠扩展*；如果$T_mB_d>1$，则信道被称为*过扩展*。扩展因子往往可以表明接收端是否可以使用相位相干解调。一般而言，如果信道的多径时间扩展或多普勒频率扩展较大而表现为过

扩展，那么在时间间隔 T_m 内信道存在快速时间变化($T_{ct} \ll T_m$)，导致载波相位的评估极其困难。另一方面，如果信道是欠扩展的，那么信道时间变化相对于多径扩展较慢($T_{ct} \gg T_m$)，因此可以精确估计接收信号的载波相位。幸运的是，实际大多数物理时变信道是欠扩展的。表 14-1 列出了几种多径信道中的一些信道参数值。

表 14-1　多种时变多径信道下的多径扩展、多普勒扩展及扩展因子

信道类型	多径持续时间(s)	多普勒扩展(Hz)	扩展因子
短波电离层传播(HF)	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-1} \sim 1$	$10^{-4} \sim 10^{-2}$
极光条件下的电离层传播	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10 \sim 100$	$10^{-2} \sim 1$
电离层前向散射(VHF)	10^{-4}	10	10^{-3}
对流层散射	10^{-6}	10	10^{-5}
移动蜂窝(UHF)	10^{-5}	100	10^{-3}
5GHz 的室内无线局域网	10^{-7}	10^{-2}	10^{-5}

14.2.1　非频率选择性衰落信道

考虑在频率响应为 $C(f;t)$的线性时变信道中传输信号 $s(t)$。若 $S(f)$表示传输信号的频谱，则接收信号在频域可以表示为 $C(f;t)s(f) \equiv R(f)$，在时域则为 $R(f)$的傅里叶逆变换，即

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f;t)S(f)e^{j2\pi ft}\,df \tag{14.2.6}$$

774

假定传输信号 $s(t)$的带宽 W 满足条件 $W \ll B_{cb}$，则信道是非频率选择性的。这个条件表明，在传输信号占用的带宽范围($-W$，W)中，频率响应对于频率变量 f 是连续的，可以表示为

$$C(f;t)\big|_{f=0} = C(0;t) \equiv c(t) \tag{14.2.7}$$

则式(14.2.6)可以简化为

$$r(t) = c(t)\int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft}\,df = c(t)s(t) \tag{14.2.8}$$

因此在非频率选择性信道中，信道通过乘积形式改变传输信号，如图 14-4 所示。

从另一角度观察非选择性信道，带宽为 W 的信号 $s(t)$传输持续时间 $T \approx 1/W$。由于 $W \ll B_{cb} = 1/T_m$，所以 $T \gg T_m$。在这种情况下，由于信道多径，时间扩展会远小于传输信号持续时间 T。这时信道的多径分量是不能被抵消的，其振幅和相位在式(14.2.3)已给出。因此在图 14-4 中，将多径分量视为单个干扰与传输信号$s(t)$进行相乘，并引起衰落。

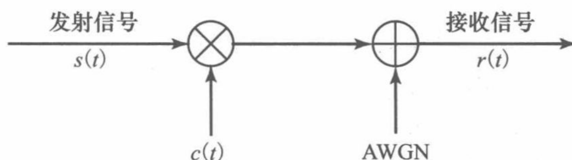


图 14-4　AWGN 非频率选择性时变信道模型

慢衰落非频率选择性信道。当传输信号带宽 W 满足条件 $W \ll B_{cb}$时，运用如图 14-4 所示的非频率选择性信道模型。若信道的相干时间 T_{ct}远大于信号持续时间 T(即，$T_{ct} \gg T$)，可以进一步简化。这种情况下，信道特性 $c(t)$在信号持续时间 T 内为常数，可以表示为如下

775

$$\begin{aligned} c(t) &= \alpha(t)e^{j\varphi(t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ &= \alpha e^{j\varphi}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{aligned} \tag{14.2.9}$$

称这种信道为慢衰落非频率选择性信道。

例 14.2.2　考虑例 14.2.1 中的无线信道，信道中传输信号 $s(t)$，其带宽 $W=50$Hz，持续时间 $T \approx 1/W = 20$ms，该信道是否是非频率选择性信道，是否是慢衰落信道？

解：因为带宽 $W \ll B_{cb} = 200$Hz，所以信道是非频率选择性的，又因为 $T \ll T_{ct} = 10$s，所以信道同时也是慢衰落的。 ◀

频率选择性瑞利衰落信道。如图 14-4 所示信道模型中，复值形式信道增益可以表示为

$$c(t)=c_r(t)+\mathrm{j}c_i(t)=\alpha(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(t)} \tag{14.2.10}$$

其中

$$\alpha(t)=\sqrt{c_r^2(t)+c_i^2(t)},\quad \varphi(t)=\arctan\frac{c_i(t)}{c_r(t)} \tag{14.2.11}$$

$c(t)$如式(14.2.3)所定义，若其包含多个不可抵消的多径分量，且这些分量具有随机的振幅以及均匀分布的相位，则 $c_r(t)$和 $c_i(t)$通常视为互相关为零的零均值高斯随机过程。因此，在信道中若 $\alpha(t)$统计上服从瑞利概率分布，$\varphi(t)$服从$(0, 2\pi)$区间内的均匀分布，则该信道称为瑞利衰落信道。瑞利衰落信号的幅值可以由以下概率密度值(PDF)来表示

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2/\sigma^2},\quad \alpha\geqslant 0 \tag{14.2.12}$$

且 $\alpha<0$ 时 $f(\alpha)=0$。参数 $\sigma^2=E(c_r^2)=E(c_i^2)$。

例 14.2.3　利用上机习题 5.2 中的方法，产生一组 20 000 个统计独立且同分布瑞利随机变量。画出这 20 000 符号的柱状图，并比较其相应的瑞利概率密度函数值。

776

解：利用公式

$$\alpha_i=\sqrt{2\sigma^2\ln\frac{1}{1-u_i}}$$

从瑞利分布中产生 20 000 个抽样值，参数 A 是从(0，1)区间均匀分布中产生的值，σ^2 可任意选取为 1。瑞利分布准确的概率密度已由式(14.2.12)给出。图 14-5 分别呈现了柱状图和瑞利分布准确的概率密度函数。◀

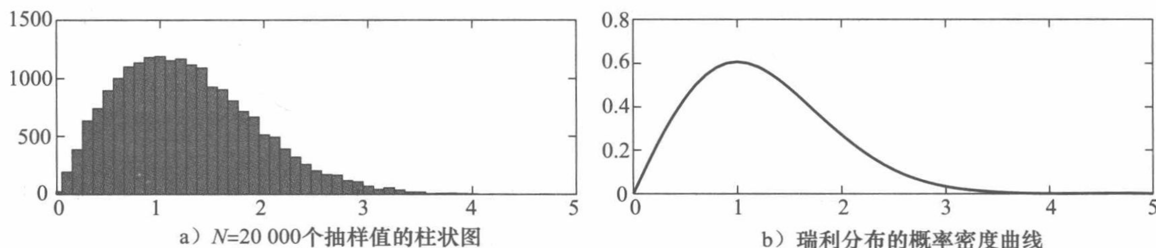


图 14-5　例 14.2.3 中图像

14.2.2　频率选择性衰落信道

当满足传输信号的带宽 $W\ll B_{cb}$时，上述非频率选择性慢衰落信道模型会应用于很多数字通信的物理无线信道中。然而，对于很多通信系统来说，传输信号带宽满足 $W\gg B_{cb}$，这样的信道是频率选择性的。在这种情况下，必须应用更复杂的信道模型。

抽头延迟线信道模型。图 14-6 给出了时变多径信道的一般模型。该信道模型包括一个抽头间隔均匀的抽头延迟线。每相邻两个抽头间的抽头间隔是 $1/W$，W 是信道中传输信号的带宽。因此，$1/W$ 是由传输信号带宽 W 所决定的时间值。抽头系数定义为$\{c_n(t)\equiv a_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n(t)}\}$，该系数通常被表示为复数域的高斯随机过程模型，且系数间相互不相关。延迟线长度对应称为多径时间扩展的多径信道的时间变化数量。多径时间扩展表示为 $T_m=L/W$，L 代表的是可能的多径信号分量的最大数目。

777

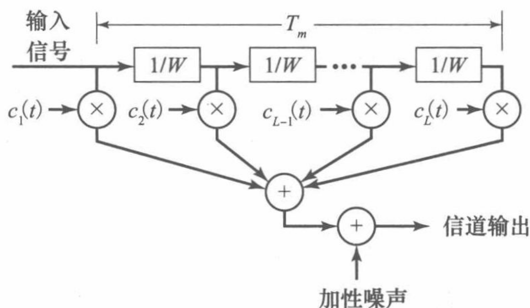


图 14-6　时变多径信道模型

例 14.2.4 定义一个适当的两径电离层传输模型，两条接收信号路径间相对时延为 1ms，传输信道带宽 W 为 10kHz。

解： 10kHz 信号对应的时间分辨率为 $1/W=0.1$ms。因为接收信号两路径间的相对时延为 1ms，所以抽头延迟线模型包括 10 个抽头。在这种情况下，只有第一个和最后一个抽头是非零的。时变系数表示为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$，如图 14-7 所示。因为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 代表来自电离层两个不同区域的大量电离粒子的信号响应，所以可以将 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 表示为复值且不相关的高斯随机过程。抽头系数的变化速率决定了每条路径的多普勒频率扩展值。◀

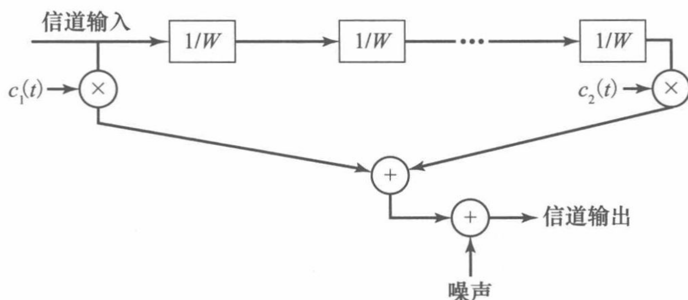


图 14-7　例 14.2.4 中的图

14.2.3　多普勒功率谱模型

当抽头延迟线信道模型中的抽头系数 $\{c_k(t)\}$ 服从高斯随机过程时，将复值高斯白噪声通过带通滤波器就可以很容易地确定这些系数，该低通滤波器的带宽是通过匹配信道多普勒频率扩展特性而确定的。

778

例 14.2.5 将复值高斯白噪声输入到简单的数字 IIR(无限持续时间冲激响应)滤波器中，产生信道抽头权重系数的样本值。具有两个相同极点的低通 IIR 滤波器可以用 z 变换表示为

$$H(z)=\frac{(1-p)^2}{(1-pz^{-1})^2}=\frac{(1-p)^2}{1-2pz^{-1}+p^2z^{-2}} \tag{14.2.13}$$

相应的差分方程为

$$c[n]=2pc[n-1]-p^2c[n-2]+(1-p)^2w[n] \tag{14.2.14}$$

其中 $w[n]=w_r[n]+jw_i[n]$ 是输入的加性高斯白噪声(AWGN)，$c[n]$ 是输出，$0<p<1$ 是极点的范围。极点的位置控制了滤波器的带宽以及 $c[n]$ 的变化速率。当 p 值接近单位圆时，滤波器带宽较窄；而当 p 接近 0 时，带宽较宽。当 $p=0.9$ 和 $p=0.99$ 时生成 $c[n]=c_r[n]+jc_i[n]$ 的 1000 个样本点。画出对应每个 p 值的 $c_r[n]$、$c_i[n]$ 以及 $|c[n]|$。利用习题 5.3 中给出的公式计算并画出两个 p 值下 $c_r[n]$ 的功率谱和自相关函数。

解： 图 14-8 分别表明了当 $p=0.9$ 和 $p=0.99$ 时抽头权重系数的时间变量。图 14-9 表示的是相应 p 值下的自相关系数和功率谱。注意，系数中的时间变化速率和(与数字滤波器带宽相同的)功率谱带宽间的关系。◀

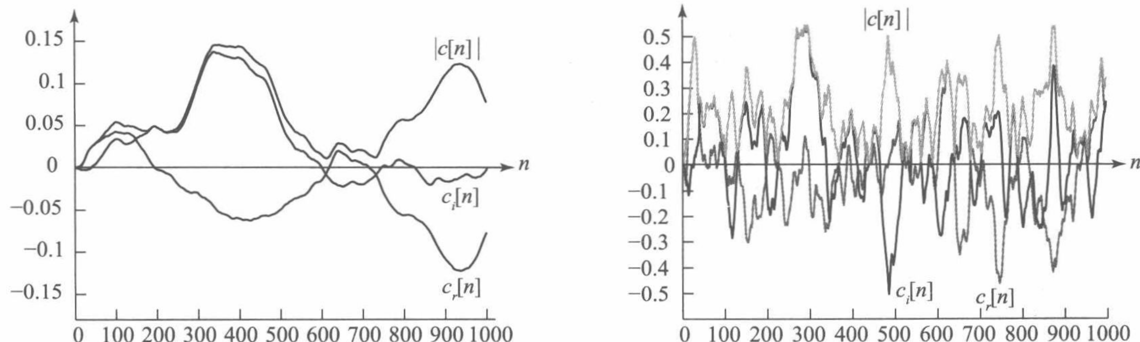


图 14-8　例 14.2.5 中 $p=0.99$(左)和 $p=0.9$(右)下 $c_r[n]$、$c_i[n]$ 以及 $|c[n]|$ 曲线。注意，该图像纵坐标具有不同的尺度

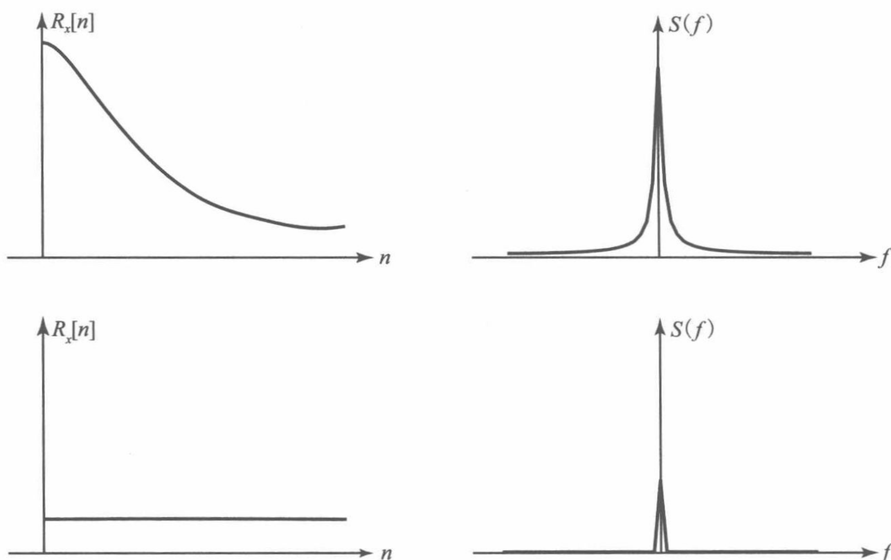


图 14-9　例 14.2.5 中 $p=0.9$（顶部）和 $p=0.99$（底部）下 $R_x[n]$和$\mathcal{S}(f)$的近似值

多普勒功率谱的 Jake 模型。 在移动无线信道中，对于多普勒功率谱而言，一种被广泛应用的模型叫作 Jake 模型。在这个模型中，时变传递函数 $C(f_c;\ t)$的自相关函数已给出

$$E[C*(f_c;t)C(f_c;t+\Delta t)]=J_0(2\pi f_m\Delta t) \tag{14.2.15}$$

其中 $J_0(\cdot)$是第一类零阶贝塞尔函数，该函数在第 3 章中曾用于表示角度调制信号的频率特性。$f_m=vf_c/c$ 是最大的多普勒频率，其中 v 表示的是车辆的速度，其单位是米每秒(m/s)，f_c 是载波的频率，c 是光速(3×10^8 m/s)。式(14.2.15)中自相关函数的傅里叶变换得到多普勒功率谱，即

779~780

$$\mathcal{S}_c(f)=\int_{-\infty}^{\infty}J_0(2\pi f_m\Delta t)e^{-j2\pi f\Delta t}d\Delta t=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi f_m\sqrt{1-(f/f_m)^2}} & |f|\leqslant f_m\\ 0 & |f|>f_m\end{cases} \tag{14.2.16}$$

$\mathcal{S}_c(f)$的图形如图 14-10 所示。

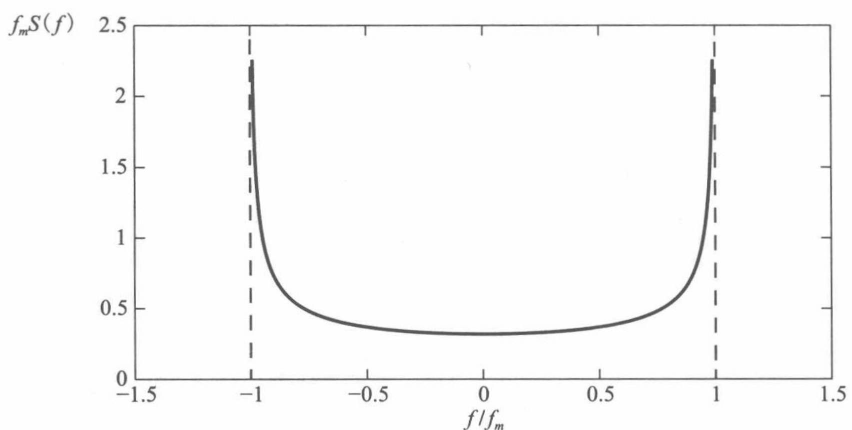


图 14-10　由 Jake 模型得到的多普勒功率谱

例 14.2.6 确定一个以 100km/h 速度前行的汽车中，手机用户经历的衰落过程所产生的多普勒功率谱值。其中手机系统的载波频率为 1GHz。

解： 100km/h 速度下汽车前行速度可以转化为 $v=28$m/s。因此，最大多普勒频率值为

$$f_m=vf_c/c=28\times10^9/3\times10^8=93\text{Hz}$$

多普勒功率谱为

$$\mathcal{S}(f)=\frac{1}{93\pi\sqrt{1-(f/93)^2}},\quad |f|\leqslant f_m$$

当 $|f|>f_m$ 时值为 0。◀

14.2.4 移动无线信道的传输模型

在 14.5 节所描述的链路预算的计算中，自由空间的无线电波传播的路径损耗与 d^2 成反比。d 是发送端和接收端之间的距离。但是在移动无线信道中既不是自由空间传播也不是视距(LOS)传播。移动无线信道中的实际平均路径损耗可以用 d^p 的反比来表示，且 $2\leqslant p\leqslant 4$，d^4 是最差情况下的模型。因此，通常这种信道的路径损耗相比自由空间的更严重。 781

在移动无线通信中，有很多因素会影响到路径损耗。这些因素包括基站天线高度、移动设备天线高度、工作频率、大气环境、有无建筑物和树木等。引入这些因素的各种平均路径损耗模型已经建立。比如，在大城市区域内的城市模型为 Hata 模型，在该模型中，平均路径损耗可以表示为

$$\begin{aligned}\text{损耗(以 dB 为单位)}=&\ 69.55+26.16\log_{10}f-13.82\log_{10}h_t-a(h_r)\\&+(44.9-6.55\log_{10}h_t)\log_{10}d\end{aligned}\tag{14.2.17}$$

其中 f 表示的是以兆赫兹为单位的工作频率($150<f<1500$)，h_t 表示的是以米为单位的发射天线高度($30<h_t<200$)，h_r 表示的是以米为单位的接收天线高度($1<h_r<10$)，d 表示的是以千米为单位的发射端和接收端之间的距离($1<d<20$)，并且

$$a(h_r)=3.2(\log_{10}11.75h_r)^2-4.97,\quad f\geqslant 400\text{MHz}\tag{14.2.18}$$

在移动无线通信中，由于接收端和发射端之间的大型障碍物，如高大的建筑物、树木和丘陵地势等，使接收信号受到信号阴影的影响。阴影通常被描述为乘性缓慢时变随机过程。即，接收信号在数学上可以表示为

$$r(t)=A_0g(t)s(t)\tag{14.2.19}$$

这里 A_0 代表平均路径损耗，$s(t)$是传输信号，$g(t)$是表示阴影效果的随机过程。在任意时刻，阴影过程的建模统计上表示为对数正态分布。对数正态分布函数的概率密度函数为

$$f(g)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,g}\mathrm{e}^{-(\ln g-\mu)^2/2\sigma^2} & (g\geqslant 0)\\ 0 & (g<0)\end{cases}\tag{14.2.20}$$

如果定义新的随机变量 X 为 $X=\ln g$，那么

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\quad -\infty<x<\infty\tag{14.2.21}$$

随机变量 X 的单位是 dB，与路径损耗成比例，μ 是以 dB 为单位的路径损耗的平均值，σ 是以 dB 为单位的路径损耗标准差。对于典型的蜂窝系统环境，σ 的取值范围为5～12dB。 782

14.3 瑞利衰落信道的二进制调制性能

本节讨论信息通过瑞利衰落信道传输的二进制数字通信系统的接收端错误概率。虽然主要考虑二进制调制，但这些基本概念在 M 进制调制下仍然适用。

14.3.1 非频率选择性信道的错误概率

假设信号带宽 W 远小于信道相关带宽 B_{cb}。由于多径分量不能消除，信道是非频率选择性的，因此信道的冲激响应可表示为

$$c(\tau;t)=\alpha(t)\delta(\tau-\tau_0(t))\tag{14.3.1}$$

$\alpha(t)$在任意时刻都服从瑞利分布。

假设 $\alpha(t)$ 和 $\tau_0(t)$ 的时间变化速度相对于符号间隔很缓慢，则在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 内信道冲激响应是连续的。即

$$c(\tau;t)\equiv c(\tau)=\alpha\delta(\tau-\tau_0) \tag{14.3.2}$$

其中幅度 α 服从瑞利分布，即

$$f(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2/2\sigma^2} & \alpha>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{14.3.3}$$

下面假设采用二进制对极信号，如二元 PSK，在信道中传输信息。那么两种可能的信号是

$$\mu_m(t)=\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{T}}\cos(2\pi f_c t+m\pi)+n(t),\quad m=0,1 \tag{14.3.4}$$

接收信号在间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 内为

$$r(t)=\alpha\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{T}}\cos(2\pi f_c t+m\pi+\varphi)+n(t) \tag{14.3.5}$$

其中 φ 是载波相位偏移。假设对于解调器 φ 是已知的，解调器计算 $r(t)$ 与信号

$$\psi(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t+\varphi),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{14.3.6}$$

的互相关。因此，检测器在抽样时刻的输入为

783

$$r=\alpha\sqrt{\mathscr{E}_b}\cos m\pi+n,\quad m=0,1 \tag{14.3.7}$$

对于固定的 α 值，错误概率可以表示为

$$P_b(\alpha)=Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha^2\,\mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{14.3.8}$$

可以将 $P_b(\alpha)$ 视为给定信道衰落值 α 的条件错误概率。为确定对于所有可能的 α 值的平均错误概率，计算积分

$$P_b=\int_0^\infty P_b(\alpha)f(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{14.3.9}$$

$f(\alpha)$ 是式(14.3.3)给出的瑞利分布概率密度。此积分有一个简单的封闭形式表达式

$$P_b=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{\bar{\rho}_b}{1+\bar{\rho}_b}}\right] \tag{14.3.10}$$

其中，根据定义有

$$\bar{\rho}_b=\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}E(\alpha^2) \tag{14.3.11}$$

因此，$\bar{\rho}_b$ 是平均接收信噪比 SNR/bit，$E(\alpha^2)=2\sigma^2$。

如果二进制信号是正交的，如正交 FSK 中，两种可能的传输信号为

$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{N_0}}\cos 2\pi\left(f_c+\frac{m}{2T}\right)t,\quad m=0,1 \tag{14.3.12}$$

接收信号是

$$r(t)=\alpha\sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_b}{N_0}}\cos\left[2\pi\left(f_c+\frac{m}{2T}\right)t+\varphi\right]+n(t) \tag{14.3.13}$$

在这种情况下，接收信号是两个信号的互相关值

$$\begin{aligned}\psi_1(t)&=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t+\varphi)\\ \psi_2(t)&=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left[2\pi\left(f_c+\frac{1}{2T}\right)t+\varphi\right]\end{aligned} \tag{14.3.14}$$

如果 $m=0$，例如，两个相关器输出为

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha \sqrt{\mathscr{E}_b} + n_1 \\ r_2 &= n_2 \end{aligned} \tag{14.3.15}$$

其中，n_1 和 n_2 是两个相关器输出的加性噪声分量。因此错误概率就是 $r_2 > r_1$ 的概率。由于信号是相互正交的，对于固定 α 值的错误概率表示如下

784

$$P_b(\alpha) = Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 \mathscr{E}_b}{N_0}}\right) \tag{14.3.16}$$

正如在对极信号情况下，相对所有 α 值的平均错误概率是根据式(14.3.9)中积分求得的。则可得

$$P_b = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\rho}_b}{2+\bar{\rho}_b}}\right] \tag{14.3.17}$$

其中$\bar{\rho}_b$ 是式(14.3.11)定义的平均信噪比 SNR/bit。

图 14-11 给出了二进制对极信号和正交信号的平均错误概率。这些曲线中最引人注目的方面是，错误概率随 SNR 的增大而慢衰减。实际上，对于大数值的 $\bar{\rho}_b$，二进制信号的错误概率可表示为

$$\begin{aligned} P_b &\approx \frac{1}{4\bar{\rho}_b}, \quad \text{对极信号} \\ P_b &\approx \frac{1}{2\bar{\rho}_b}, \quad \text{正交信号} \end{aligned} \tag{14.3.18}$$

因此，两种情况下的错误概率随 SNR 线性下降。这与 AWGN 信道情况下的指数下降形成对比。另外还可以发现，对极信号(二进制 PSK)和正交信号(二进制 FSK)的 SNR 值相差 3dB。

另外两种信号调制方式为 DPSK 和非相干 FSK。为了完整性，这里也给出其平均错误概率

$$P_b = \frac{1}{2(1+\bar{\rho}_b)}, \quad \text{DPSK} \tag{14.3.19}$$

$$P_b = \frac{1}{2+\bar{\rho}_b}, \quad \text{非相干 FSK} \tag{14.3.20}$$

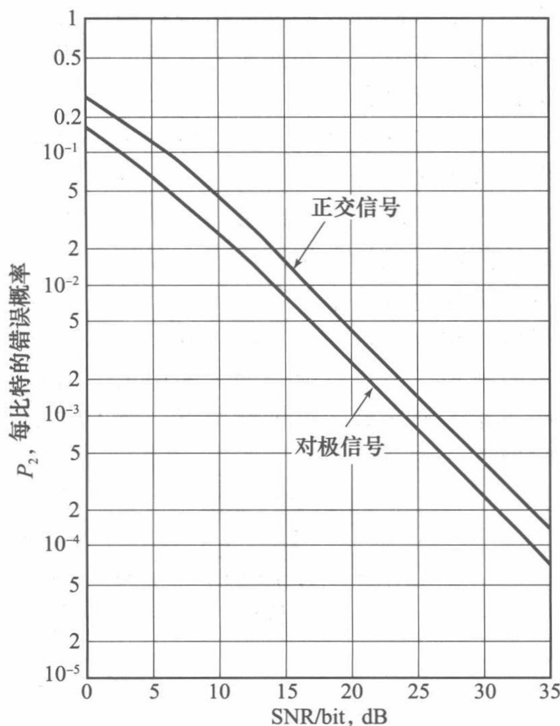


图 14-11　瑞利衰落信道下二进制信号的性能

14.3.2　信号分集带来的性能改善

衰落信道数字通信的基本问题是当信道衰减很大，即信道处于深衰落时，会出现很多的错误。如果可以向接收端提供在独立的衰落信道内传输的两个或多个同一信息信号的副本，则所有信号分量同时衰减的概率会大大减少。若用 p 表示任一信号衰落至某个临界值下的概率，则 p^D 表示的是同一信号的所有 D 个独立衰落的副本衰落至某个临界值下的概率。有几种方式为接收端提供承载同一信息的 D 个独立衰落的信号副本。

一种获得 D 个承载相同信息的独立衰落信号的方法是，在 D 个 FDM 载波频率下传输相同的信息，连续载波间的间隔等于或超过信道的相干带宽 B_{cb}。这种方法叫做频率分集。

第二种获得 D 个承载相同信息的独立衰落信号的方法是，在 D 个不同时隙间传输相同的信息，这里连续传输时隙间的时间间隔等于或超过信道的相干时间 T_{ct}。这种方法叫做时间分集。

另一种得到分集的常见方法是对一个发射天线采用多天线接收。接收天线的空间间隔必须足够远，以使信号多径分量具有不同的传播路径，如图 14-12 所示。通常要求一对天线间有几个波长的间隔，以获得独立衰落的信号。

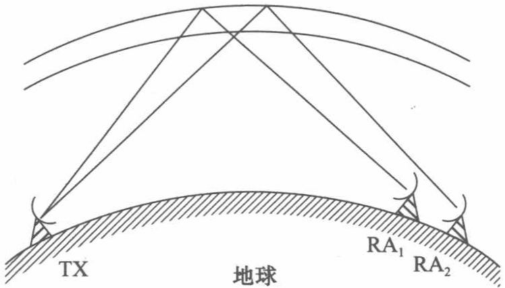


图 14-12 使用两个接收天线下的极化接收

实际中还采用到达角度分集（angle-of-arrival diversity）和极化分集（polarization diversity)等分集传输和接收技术。

785~786

如果通过 D 个独立衰落信道将信息传输到接收端，接收端可以采用多种方法从接收信号中提取传输信息。对于接收端，最简单的方法是监测 D 个接收信号的接收功率，选择最强的信号用于解调和检测。这个方法一般会导致信号的频繁切换。一个简单的改进方案是，当一个信号的接收功率高于预设阈值时就持续使用该信号进行解调和检测。而当信号衰落到阈值以下时，就切换至具有最大接收功率水平的信道进行解调和检测。这种信号选择方法称为选择分集。

为了达到更好的性能，可以采用更复杂的分集接收方法，图 14-13 给出了几种合并独立衰落接收信号的方法。其中一种适合相干解调和检测的方法，要求接收机对解调后的 D 个接收信号的相位偏差进行估计和修正。将相位修正后的 D 个解调器的输出信号叠加并送到检测器。这种类型的信号合并称为等增益合并。对此方法的一种修正是，对 D 个接收信号的接收信号功率值分别进行估计，并且采用与接收信号强度(功率值的平方根)成正比的权重对相位纠正后的解调器输出进行加权求和，然后送至检测器，这种合并器叫做最大比率合并器。另一方面，如果采用正交信号通过 D 个独立衰落信道传输信息，接收端可以采用非相干解调器。这种情况下，将 D 个解调器的输出平方求和后送至检测器。这种合并器叫做平方律合并器。

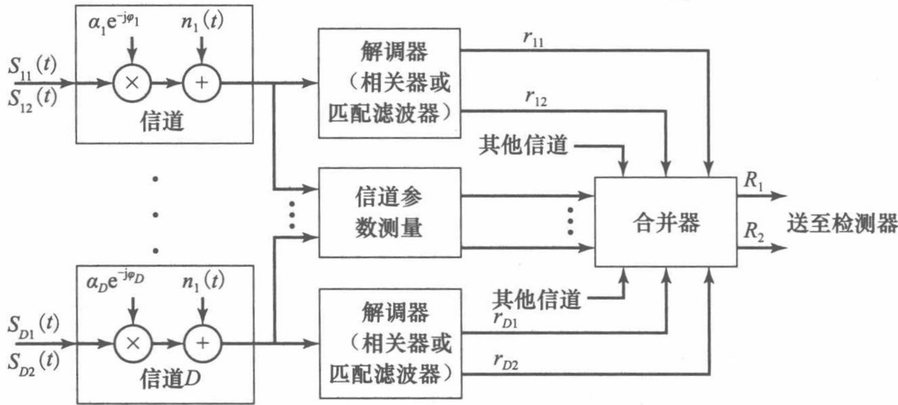


图 14-13 具有 D 阶分集的二进制数字通信系统模型

上述各种合并方式的性能特征都可以表示为错误概率 $K_D/\bar{\rho}^D$，其中 K_D 是取决于 D 的常数，$\bar{\rho}$ 是平均 SNR/分集信道。可见错误概率具有指数衰减特性。这里不做详细推导，仅给出对于采用最大比率合并的对极信号，错误概率的一般形式为

$$P_b \approx \frac{K_D}{(4\bar{\rho})^D}, \quad \bar{\rho} \gg 1 \tag{14.3.21}$$

787

其中 K_D 定义为

$$K_D = \frac{(2D-1)!}{D!(D-1)!} \tag{14.3.22}$$

对于采用平方律合并的二进制正交信号，错误概率的渐近形式为

$$P_b \approx \frac{K_D}{\bar{\rho}^D}, \quad \bar{\rho} \gg 1 \tag{14.3.23}$$

最后，对于采用等增益合并的二进制 DPSK，错误概率的渐近形式为

$$P_b \approx \frac{K_D}{(2\bar{\rho})^D}, \quad \bar{\rho} \gg 1 \tag{14.3.24}$$

图 14-14 给出错误概率与 SNR/bit $\bar{\rho}_b = D\bar{\rho}$ 的关系，其中 $D=1$，2，4。显然，相比没有分集的情况，当 $D=2$（双重分集）时 SNR/bit 显著下降。当分集阶数增大到 $D=4$ 时，SNR 进一步降低，不过从 $D=2$ 到 $D=4$ 的附加增益要小于从 $D=1$ 到 $D=2$ 的。超过 $D=4$，SNR 降低幅度会更小。

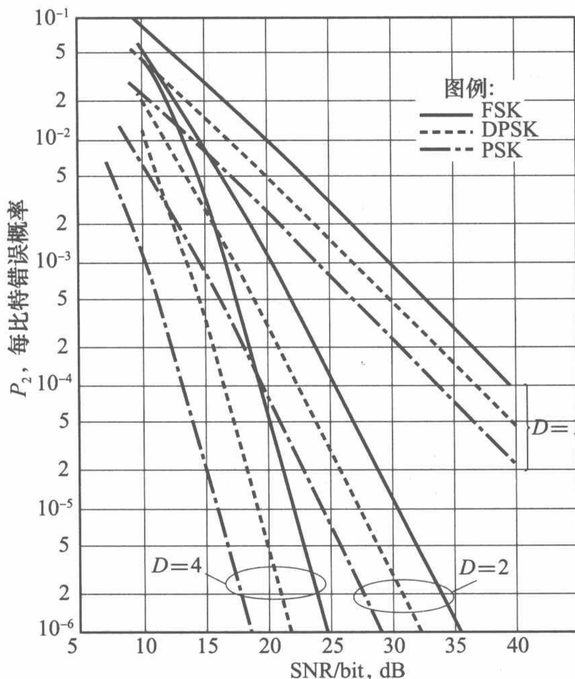


图 14-14　具有分集的二进制信号的性能

上述二进制调制性能分析主要集中在瑞利衰落信号统计特性上。一般而言，瑞利分布适合对发生在电离层传播和移动蜂窝系统中的信号衰落进行建模。不过其他统计模型也用于各种衰落多径信道中。最常见的是 Nakagami 分布和莱斯（Rician）分布。

实现信号分集的编码增益。上述性能结果表明，通过采用某种形式的分集，为接收端提供承载相同信息的多个独立衰落信号，能够有效地利用瑞利衰落信道中的发射功率。我们所描述的（时间或频率）分集类型是一种信道编码方式，称为重复编码，码率为 $1/D$。因此，如果每一个信息比特都在两个间隔较宽的时隙或频段上传输两次，即通过码率为 1/2 的重复码字，即可获得双重分集系统（$D=2$）。但是一般情况下，一个码率为 1/2 的重要码字，如果在传输前先进行第 13 章所述的交织，使码字的每比特衰落都统计独立，则可获得更好的性能。具体来说，一个最小汉明距为 $d_{\min}$ 的二进制线性（n，k）码，其性能可以相当于在软判决译码下 $d_{\min}$ 的分集重复码以及在硬判决下 $d_{\min}/2$ 的码字。因此，对于任何码率 $1/D$，选择一个最小汉明距 $d_{\min}>D$ 的重要码字，相比同等码率重复码，可以提供更高阶数的分集。

788 ~ 789

例 14.3.1 比较两种信号，即双重分集的二进制正交 FSK 信号与码率 1/2 且 $d_{\min}=8$ 的（24，12）扩展高莱（extended Golay）码信号的误码率性能。后者采用二进制正交 FSK 传输每个码元比特。信道是瑞利衰落信道，接收端对两类信号进行平方律合并及检测。

解：假设信号分集通过比特编码交织获得，两种信号的编码比特都具有统计独立的衰落。注意，重复码和 Golay 码（24，12）码都具有 1/2 的码率。对于重复码字，合并在两个信号间隔中的平方律检测 FSK 信号。因此，如果传输一个 0，则在合并器对应输出 0 和输出 1 的测度分别是

$$\begin{aligned} r_0 &= \left|\alpha_1 \sqrt{\mathscr{E}} e^{j\varphi_1} + n_{01}\right|^2 + \left|\alpha_2 \sqrt{\mathscr{E}} e^{j\varphi_2} + n_{02}\right|^2 \\ r_1 &= \left|n_{11}\right|^2 + \left|n_{12}\right|^2 \end{aligned} \tag{14.3.25}$$

其中$\{n_{ij}\}$是统计独立且同分布复数值的零均值高斯随机变量。其错误概率就是$r_2>r_1$的概率，即

$$P_b \approx \frac{K_2}{\bar{\rho}^2} = \frac{3}{(\bar{\rho}_b/2)^2}, \quad \bar{\rho} \gg 1 \tag{14.3.26}$$

其中平均信噪比 SNR/bit 为$\bar{\rho}_b$。对于 Golay 码，有$2^{12}=4096$个码字，所以在平方律合并器的输出中存在4096种测度。为了计算错误概率，假设发送全零码字。对应全零码字的合并器输出测度为

$$r_0 = \sum_{k=1}^{24} \left| \alpha_k \sqrt{\mathscr{E}} e^{j\varphi_k} + n_{0k} \right|^2 \tag{14.3.27}$$

在(24，12)Golay 码中，759个码字与全零码字的最小汉明距为$d_{\min}=8$。这些码字中的任何一个码字，与全零码相比都有8位不同而16位相同，则对于这759个码字中任意一个，其对应的合并器输出在统计上等价于测度

$$r_1 = \sum_{k=1}^{8} |n_{1k}|^2 + \sum_{k=1}^{24} \left| \alpha_k \sqrt{\mathscr{E}} e^{j\varphi_k} + n_{0k} \right|^2 \tag{14.3.28}$$

790

因此，r_0和r_1的差值为

$$r_0 - r_1 = \sum_{k=1}^{8} \left[\left| \alpha_k \sqrt{\mathscr{E}} e^{j\varphi_k} + n_{0k} \right|^2 - |n_{1k}|^2 \right] \tag{14.3.29}$$

可以发现，这个差值是8个独立衰落比特上的接收信号之和的函数，即此码提供了$d_{\min}=8$的分集阶数。这表示 Golay 码的误码率衰减与$\bar{\rho}^8$成反比，即比特错误率为

$$P_2 \approx \frac{K}{\bar{\rho}^8} = \frac{K}{(\bar{\rho}_b/2)^8} \tag{14.3.30}$$

其中K是独立于 SNR 的常量，$\bar{\rho}_b=\bar{\rho}/R_c$是 SNR/bit，$R_c$是码率。图 14-15 给出了两种信号的错误概率。注意，在达到错误概率为10^{-4}时 Golay 码比重复码低 8dB。

791

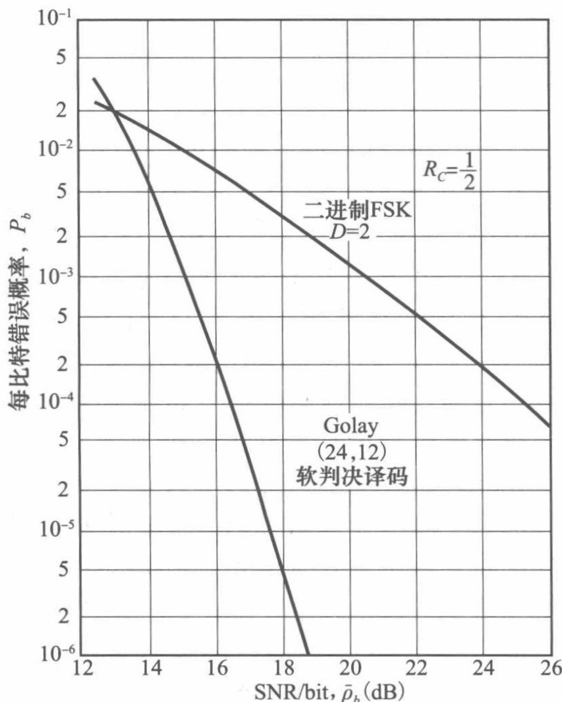


图 14-15　重复码和(24，12) Golay 码性能对比

当错误率较低时，两种码字的差别更大。总而言之，相比相同码率的重复码，一个具有交织的重要码字，可以提供更多的信号分集。◀

14.3.3 RAKE 解调器及其在频率选择性信道下的性能

下面考虑可用信道带宽W超过信道相干带宽B_{cb}的情况。以符号速率$1/T$调制一个载波频率实现数字信息的传输，假设符号间隔T满足条件$T \ll T_{ct}$。这样，信道特性在时间上变化非常缓慢，因此信道是慢衰落的，并且$W \gg B_{cb}$，则信道是频率选择性的。此外，假设$T \gg T_m$，则符号间干扰(ISI)是可以忽略的。

由于W是带通信号的带宽，因此等价的低通信号占用的带宽为$W/2$。因此，采用一个边带受限低通信号$s(t)$。使用图 10.4 中的频率选择性信道模型，接收信号可以表示为

$$r(t) = \sum_{n=1}^{L} c_n(t) s(t - n/W) + n(t) \tag{14.3.31}$$

其中$n(t)$代表 AWGN。这就是说，频率选择性信道最多为接收端提供L个信号副本，每个信号分量与一个相应的信道抽头系数$c_n(t)$相乘，$n=1, 2, \cdots, L$。基于慢衰落假设，信道系数在一个或多个符号间隔上视为常数。

由于在$r(t)$中最多有发送信号$s(t)$的L个副本，接收端以最优方式处理接收信号，可以获得与一个分集数等于(可分辨)接收信号分量数的通信系统相同的性能。

考虑信道中的二进制信号。假设有两个能量相等的信号$s_1(t)$和$s_2(t)$，二者相互正交且持续时间$T \gg T_m$。由于信号符号间干扰可以忽略，因此最佳接收机包括两个相关器或两个匹

配滤波器来匹配接收信号。使用如图 14-16 所示的相关器结构。接收信号通过一个抽头延迟线滤波器，其抽头间隔为 $1/W$，如信道模型所示。根据所有可分辨的发送信号分量数选择抽头数。在每一个抽头处，信号与两个可能的发送信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 分别相乘，对每一个乘法器输出进行相位纠正并乘以加权系数 $c_n^*(t)$，$n=1, 2, \cdots, L$。然后对相位校准和加权的信号分量在符号持续时间间隔 T 下积分。对两个积分器每隔 T 秒周期性地抽样，再将结果发送到检测器中。然后，相对各种可能的信道时延，对接收信号与两个发送信号分别进行互相关计算。注意，每个抽头处信号与相应抽头系数 $c_n^*(t)$ 的相乘，实现了根据信号强度对信号分量的加权。因此，相位校准与加权的信号分量的合并是最大比率合并。 792

为了实现最大比率合并，有必要从接收信号中估计信道抽头系数 $c_n(t)$。由于这些系数是时变的，所以评估应是自适应的，即可以跟踪时间变化。

如图 14-16 所示的解调器结构称为 RAKE 解调器。因为这种解调器具有相同抽头间隔，且抽头系数可以有效地收集接收信号的所有信号分量，因此这种操作被比喻为普通花园耙的作用。

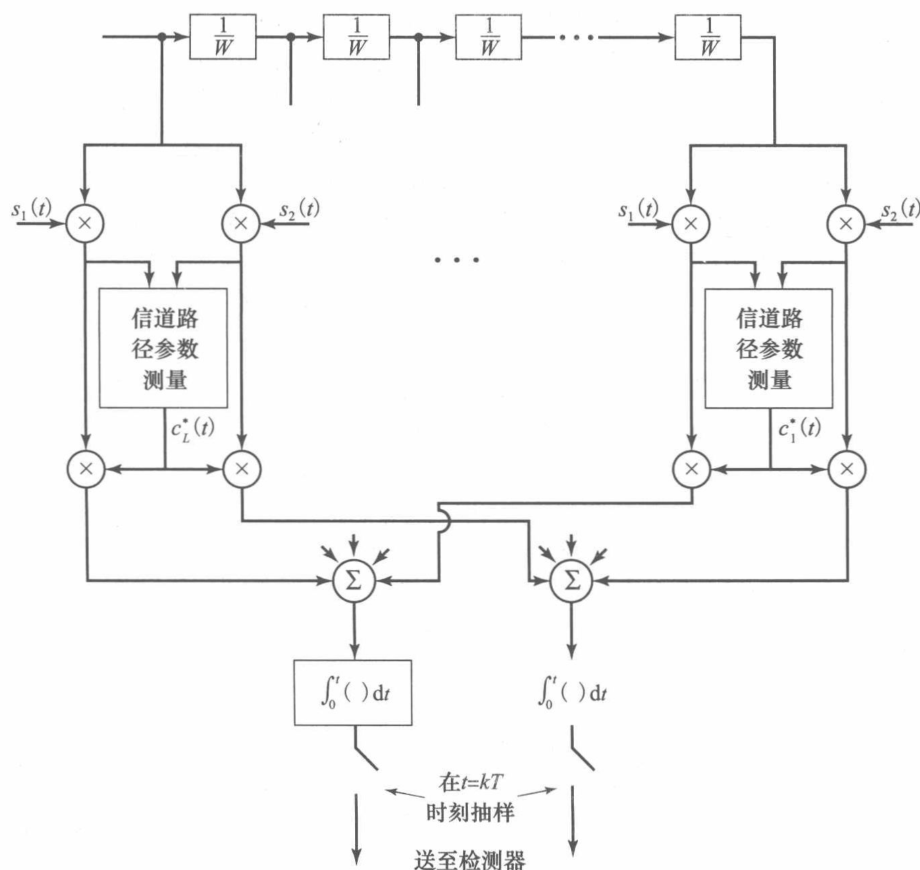


图 14-16 频率选择性信道传输信号的 RAKE 解调器

假设在接收信号中有 L 个信号分量，其信号强度各不相同且为瑞利分布，二进制信号的错误概率被很好地近似为 793

$$P_b = K_L \prod_{k=1}^{L} \frac{1}{[2\bar{\rho}_k(1-\gamma_r)]} \tag{14.3.32}$$

这里 $\bar{\rho}_k$ 是第 k 个信号分量的平均信噪比，即，

$$\bar{\rho}_k = \frac{\mathscr{E}_b}{N_0} E(\alpha_k^2) \tag{14.3.33}$$

其中 $\alpha_k=|c_k|$ 是第 k 个抽头系数的幅度，$\gamma_r=-1$ 是为对极信号定义的常数，$\gamma_r=0$ 则是为正交信号定义的常数，K_L 是式(14.3.22)中定义的常数。在所有信号分量具有相等强度的特殊情况下，式(14.3.32)对极信号的误码率可以简化为 $D=L$ 时式(14.3.21)的表示。

14.3.4 频率选择性信道中 OFDM 信号的传输

从通信系统性能来看，RAKE 解调器是接收频率选择性信道中传输的单载波信号的最佳解调器。需要设计符号间隔满足条件 $T\gg T_m$ 和 $T\ll T_{ct}$，即

$$T_m \ll T \ll T_{ct} \tag{14.3.34}$$

而且，对于频率选择性信道，传输信号的带宽满足条件

$$W \gg B_{cb} \tag{14.3.35}$$

结合式(14.3.34)和式(14.3.35)中的条件，可得 $TW\gg 1$ 或等价于 $W\gg\frac{1}{T}$。已经知道，在信号设计中利用条件 $T\gg T_m$ 可以避免 ISI 的影响，后者会降低系统性能。那么，必须降低数据(符号)率以满足条件 $T\gg T_m$，或者等价于选择传输信号带宽 W 以满足 $WT\gg 1$。

对于频率选择性信道，一个带宽效率更高的调制方法是 OFDM。其信道带宽 W 被细分到 N 个子信道，N 是一个很大的数值，在每个子信道中传输的信号的符号间隔均满足条件 $T\gg T_m$。则每个子信道中的 ISI 可以忽略，而且通过使用间隔 T_m 的时间保护带或循环前缀能够完全消除 ISI。这样，相邻子信道的频率间隔为 $\Delta f=1/T$，子信道数目为 $N=W/\Delta f$，因此每个子信道基本符合非选择特性。这种情况下，为了对抗信号衰落，可以在两个或多个不同频率的子信道内传输相同信息符号，这些子信道的带宽等于或大于信道相干带宽 B_{cb}，从而通过统计独立衰落获得信号分集。通过下面的例题说明 OFDM 信号的设计过程。

794

例 14.3.2 假设一多径信道，带宽为 $W=10\text{kHz}$，多径时间扩展 $T_m=10\text{ms}$，多普勒频率扩展 $B_d=0.1\text{Hz}$。选择 OFDM 系统的参数保证循环前缀引起的带宽损失不超过 10%。

解： 可以选取符号持续时间 $T=100\text{ms}$ 以满足带宽损失约束。则有 $\Delta f=1/T=10\text{Hz}$，因此子信道数 $N=10^4/10=1000$。信道相干时间为 $T_{ct}=1/B_d=10\text{s}$，满足条件 $T\ll T_{ct}$。信道相干带宽为 $B_{cb}=1/T_m=100\text{Hz}$。为了对抗每个子信道中的信号衰落，可以在多个子信道中传输相同的符号，且其频率间隔至少为 100Hz。因此，这个信道在没有分集的情况下，符号吞吐量为 $N/T=10N$ 符号/秒，在 D 阶分集的情况下，信号速率吞吐量为 $R_s=10N/D$ 符号/秒。◀

例 14.3.3 考虑标称带宽为 3200Hz 的 HF 信道，其多径时间扩展 $T_m=1\text{ms}$。设计一个数据速率可达到 4800bps 的多载波 OFDM 信号。

解： 可以选择任何满足条件 $T_{sc}\gg T_m$ 的子载波数 N，T_{sc} 为每个子载波的符号持续时间。然而，解调器的复杂度[快速傅里叶变换(FFT)算法的计算复杂度]为 $N\log_2 N$，且为用户提供信息的解调器时延随着 N(线性)增大。因此 N 的取值应该尽量小。假设选取 N 使得 $T_{sc}=100\text{ms}$。子信道带宽最低[⊖]可以是 $W_{sc}\approx\frac{1}{T_{sc}}=10\text{Hz}$。可以发现，$W_{sc}\ll B_{cb}=1000\text{Hz}$，满足要求。如果每条子信道都采用四相调制(PSK 或 DPSK)，可得每个子信道的比特速率为 20bps。采用 $N=240$ 个子信道，可以得到要求的数据速率 4800bps。◀

14.4 多天线系统

在一个数字通信系统的接收端使用一个或多个天线，是一种获得空间分集，减轻信号衰落影响的常见方法。通常，接收天线必须间隔一个或多个波长来保证接收信号具有统计

⊖ 实际中有必要为每个子信道增加一定的额外带宽。额外带宽的范围可以是 15%～25%。

独立的衰落。接收端的空间分集很有吸引力，因为它可以在不扩展信号传输带宽的条件下获得信号分集。

信号分集也可以通过在发送端使用多天线来实现。下面将举例说明，采用两个发送端天线和一个接收端天线可以实现双重分集。而且，采用多个发射天线还可以形成多个空间信道从而提高数据速率。这种方法称为空间复用。

采用 N_T 个发射天线和 N_R 个接收天线的通信系统称为多输入多输出(MIMO)系统，在这种系统中产生的空间信道叫做MIMO信道。

795

第一种特殊情况，$N_T=N_R=1$，这种系统称为单输入单输出(SISO)系统，相应的信道称为SISO信道。第二种特殊情况，$N_T=1$，$N_R\geqslant 2$，这种系统称为单输入多输出(SIMO)系统，相应的信道称为SIMO信道。第三种特殊情况，$N_T\geqslant 2$，$N_R=1$，这种系统称为多输入单输出(MISO)系统，相应的信道称为MISO信道。

14.4.1 多天线系统的信道模型

在 N_T 个发射天线和 N_R 个接收天线的MIMO系统中，定义第 j 个发射天线和第 i 个接收天线间的冲激响应为 $c_{ij}(\tau;t)$，其中 τ 为线性时变信道的时延变量，t 为其中的时间变量。则随机时变信道可以用 $N_R\times N_T$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}(\tau;t)$ 表示为

$$\boldsymbol{C}(\tau;t)=\begin{bmatrix} c_{11}(\tau;t) & c_{12}(\tau;t) & \cdots & c_{1N_T}(\tau;t) \\ c_{21}(\tau;t) & c_{22}(\tau;t) & \cdots & c_{2N_T}(\tau;t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N_R1}(\tau;t) & c_{N_R2}(\tau;t) & & c_{N_RN_T}(\tau;t) \end{bmatrix} \tag{14.4.1}$$

对于非频率选择性信道，信道矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可表示为

$$\boldsymbol{C}(t)=\begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1N_T}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2N_T}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N_R1}(t) & c_{N_R2}(t) & & c_{N_RN_T}(t) \end{bmatrix} \tag{14.4.2}$$

假设第 j 个发射天线传输的信号为 $s_j(t)$，$j=1, 2, \cdots, N_T$。则在第 i 个天线上接收的信号可以表示为

$$r_i(t)=\sum_{j=1}^{N_T} c_{ij}(t)s_j(t), \quad i=1,2,\cdots,N_R \tag{14.4.3}$$

在矩阵形式下，接收信号向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{s}(t) \tag{14.4.4}$$

$\boldsymbol{s}(t)$ 是一个 $N_T\times 1$ 的向量，$\boldsymbol{r}(t)$ 是一个 $N_R\times 1$ 的向量。而且，若信道冲激响应的时间变量在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 内变化缓慢，其中 T 可以是符号间隔或某种通用的时间间隔，式(14.4.4)可以简化为

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{14.4.5}$$

$\boldsymbol{C}$ 是时间间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 内的常量。

796

式(14.4.5)中的缓慢时变频率非选择信道模型是一个最简单的MIMO信道信号传输模型。本节采用这个模型来说明MIMO系统的性能特性。

14.4.2 慢衰落频率非选择MIMO信道的信号传输

考虑采用多个发射天线和多个接收天线的无线通信系统，如图14-17所示。假设有 N_T 个发射天线和 N_R 个接收天线，一组 N_T 个符号从串行变换为并行，每一个符号送至

N_T 个相同调制器之一，每一个调制器与一个空间分离的天线相连接。这样，N_T 个符号并行发射，并由 N_R 个空间分离接收天线所接收。本节假设 N_T 个符号未编码。

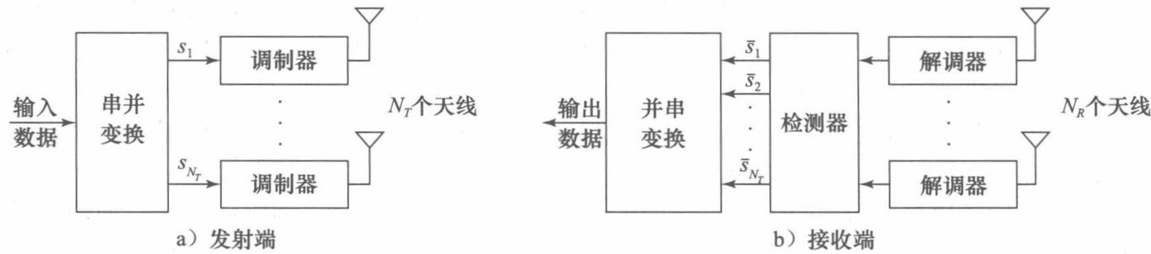


图 14-17　具有多个发射天线和多个接收天线的通信系统

假设每个从发射天线到接收天线的信号经历非频率选择性瑞利衰落。同时假设相对于符号持续时间 T，从 N_T 个发射天线到 N_R 个接收天线的传播时间差别很小，实际上可以认为信号从 N_T 个发射天线到任意接收天线都是同步的。因此，对于一个信号间隔内的接收天线中的接收信号可以表示为

797

$$r_m(t)=\sum_{n=1}^{N_T}s_nc_{mn}g_T(t)+z_m(t),0\leqslant t\leqslant T,\quad m=1,2,\cdots,N_R \tag{14.4.6}$$

其中 $g_T(t)$是调制滤波器的脉冲波形（冲激响应），c_{mn} 是从第 n 个发射天线到第 m 个接收天线的复数值零均值高斯信道增益，s_n 是第 n 个天线上发送的符号，$z_m(t)$是 AWGN 噪声过程的样本函数。各个信道的信道增益$\{c_{mn}\}$在统计上独立同分布。假设高斯样本函数$\{z_m(t)\}$在统计上独立同分布，且均值为零，双边功率谱密度为 $N_0/2$。信息符号$\{s_n\}$取自二进制或 M 进制 PSK 或 QAM 信号星座图。

N_R 个接收天线中每个天线的信号解调器都有一个匹配脉冲 $g_T(t)$的匹配滤波器，每个符号间隔结束时对其输出进行抽样。第 m 个接收天线的解调器输出可表示为

$$y_m=\sum_{n=1}^{N_T}s_nc_{mn}+\eta_m,\quad m=1,2,\cdots,N_R \tag{14.4.7}$$

其中信号脉冲 $g_T(t)$的能量归一化为单位 1，η_m 是加性高斯白噪声分量。解调器的 N_R 个软输出送至信号检测器。为了便于数学描述，式(14.4.7)可以表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cs}+\boldsymbol{\eta} \tag{14.4.8}$$

其中 $\boldsymbol{y}=[y_1, y_2, \cdots, y_{N_R}]^t$，$\boldsymbol{s}=[s_1, s_2, \cdots, s_{N_T}]^t$，$\boldsymbol{\eta}=[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N_R}]^t$，$\boldsymbol{C}$ 是由信道得到的 $N_R\times N_T$ 矩阵。图 14-18 给出了每个信号间隔内的多个发射机和接收机信号的离散时间模型。

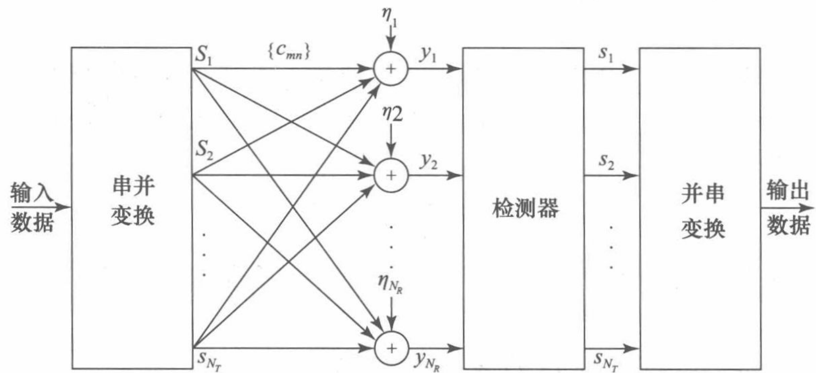


图 14-18　频率非选择慢衰落信道中具有多发射天线和多接收天线的通信系统离散时间模型

从上述 MIMO 系统构成的描述中可以看到，N_T 个发射天线中的发送符号在时间和频率上是完全重叠的。因此，在空间信道接收到的信号$\{y_m,\ 1\leqslant m\leqslant N_R\}$之间存在信道间干扰。下一节将讨论 MIMO 系统中三种不同的恢复发送数据符号的检测器。

798

例 14.4.1 假设 $N_T=N_R=2$。确定瑞利衰落加性高斯白噪声信道的信道矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素，以及两个接收天线检测器相应的输入信号。

解： $\boldsymbol{C}$ 中的元素为 c_{11}，c_{12}，c_{21}，c_{22}。信道为瑞利衰落信道时，这些参数是均值为零、方差为 σ_c^2 的统计独立的随机高斯变量的复数。因此，两个天线的检测器输入信号为

$$y_1 = c_{11}s_1 + c_{12}s_2 + \eta_1$$
$$y_2 = c_{21}s_1 + c_{22}s_2 + \eta_2$$

其中 s_1 与 s_2 为两个发射天线发出的符号，η_1 与 η_2 为统计独立的复加性高斯噪声，均值为零，方差为 σ_n^2。◀

14.4.3 MIMO 系统的数据符号检测

基于 14.4.2 节描述的频率非选择性 MIMO 信道模型，考虑三种不同的瑞利衰落加性高斯白噪声下恢复传输数据符号的检测器，并评价其性能。在整个推导过程中，假设检测器已知信道矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素。实际中可采用信道探测信号估计 $\boldsymbol{C}$ 的元素。

最大似然检测器。 最大似然检测器(MLD)是可使错误率最小的最佳检测器。由于接收天线 N_R 处的加性噪声项是独立同分布的零均值高斯白噪声，其联合条件概率密度分布 $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{s})$服从高斯分布。因此，最大似然检测器选择符号向量$\hat{\boldsymbol{s}}$，使欧式距离最小

$$\mu(\boldsymbol{s}) = \sum_{m=1}^{N_R}\left|y_m - \sum_{n=1}^{N_T}c_{mn}s_n\right|^2 \tag{14.4.9}$$

最小均方差检测器。 最小均方差(MMSE)检测器将接收到的信号$\{y_m,\ 1\leqslant m\leqslant N_R\}$线性组合，形成发送符号$\{s_n,\ 1\leqslant n\leqslant N_T\}$的估计值。线性组合可以表示为以下矩阵形式

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{y} \tag{14.4.10}$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 为 $N_R\times N_T$ 的加权矩阵，其元素选择准则是最小化均方误差

$$J(\boldsymbol{W}) = E[\|\boldsymbol{e}\|^2] = E[\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{y}\|^2] \tag{14.4.11}$$

799

将 $J(\boldsymbol{W})$最小化可获得最佳权重向量 $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，…，$\boldsymbol{w}_{N_T}$，其中

$$\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{R}_{yy}^{-1}\boldsymbol{r}_{s_n y},\quad n=1,2,\cdots,N_T \tag{14.4.12}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{yy}=E[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^H]=\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{C}^H+N_0\boldsymbol{I}$ 是接收信号矢量 $\boldsymbol{y}$ 的$(N_R\times N_R)$自相关矩阵，$\boldsymbol{R}_{ss}=E[\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^H]$，$\boldsymbol{r}_{s_n}\boldsymbol{y}=E[\boldsymbol{s}_n^*\boldsymbol{y}]$，$E[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^H]=N_0\boldsymbol{I}$。当信号矢量有零均值不相关的分量时，$\boldsymbol{R}_{ss}$ 为一个对角矩阵。估计矢量$\hat{\boldsymbol{s}}$的每个分量则被量化至最接近的发送符号值。

逆信道检测器。 逆信道检测器(ICD)也是将接收信号$\{y_m,\ 1\leqslant m\leqslant N_R\}$的线性组合作为 $\boldsymbol{s}$ 的估计值。但是，这种情况下，设 $N_T=N_R$，选择加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 使信道间干扰完全消除，也就是说 $\boldsymbol{W}^H=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\eta} \tag{14.4.13}$$

然后将$\hat{\boldsymbol{s}}$的每个元素量化至最接近的发送符号值。可以发现，逆信道检测器估计的$\hat{\boldsymbol{s}}$值不受信道间干扰的影响。但这也意味着逆信道检测器不利用接收信号中固有的信号分集，这一点在后面的讨论中可以看到。

当 $N_R>N_T$ 时，可以选取信道矩阵的伪逆矩阵作为加权矩阵 $\boldsymbol{W}$，即

$$\boldsymbol{W}^H = (\boldsymbol{C}^H C)^{-1}\boldsymbol{C}^H \tag{14.4.14}$$

在上机习题 14.9 中将讨论这三种检测器的 MATLAB 实现。

14.4.4 检测器的误码率特性

瑞利衰落信道中三种检测器的误码率特性评估，采用蒙特卡洛法计算机仿真最易实现。

例 14.4.2 采用蒙特卡洛仿真，评估瑞利衰落加性高斯白噪声信道中 MIMO 系统的误码率特性。调制方式为 BPSK(或 BPAM)。

解： 图 14-19 与图 14-20 分别给出在$(N_T, N_R)=(2, 2)$与$(N_T, N_R)=(2, 3)$条件下，采用 BPSK 调制方式的误码率(BER)曲线。在这两种情况下，信道增益的方差相同，且其和为归一化单位 1，即

$$\sum_{n,m} E[|c_{mn}|^2] = 1 \tag{14.4.15}$$

图中给出了 BPSK 调制的 BER 曲线与每比特平均 SNR 的函数关系。采用式(14.4.15)给出的信道增益$\{c_{mn}\}$归一化方差，平均接收信号能量即为每符号发送信号能量。

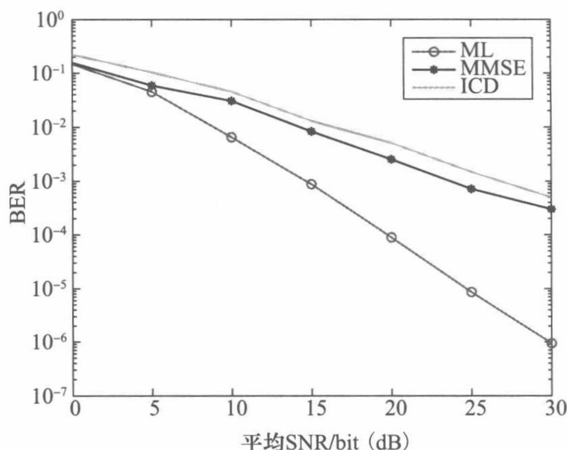


图 14-19　$N_R=2$ 时三种检测器(MLD，MMSE，ICD)的误码特性

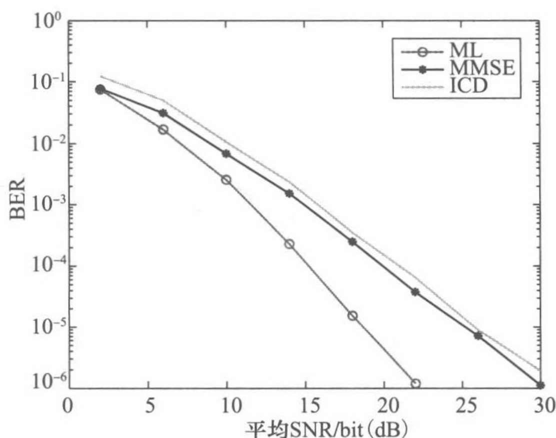


图 14-20　$N_R=3$ 时三种检测器(MLD，MMSE，ICD)的误码特性

800 ~ 801

从图 14-19 与图 14-20 的性能结果中可以看出，最大似然检测器充分利用了接收信号中 N_R 阶分集，因此其性能可以与 N_R 接收信号的最大比率合并的性能媲美，且无信道间干扰，即$(N_T, N_R)=(1, N_R)$。另外两个线性检测器，即最小均方差检测器与逆信道检测器，在发送天线数 $N_T=2$ 时，其 BER 与 SNR 成反比，即为其(N_R-1)次幂。因此 $N_R=2$ 时，这两个线性检测器无分集，当 $N_R=3$ 时，这两个线性检测器实现双分集。还可以发现，虽然两个检测器的分集数是一样的，MMSE 的检测性能优于 ICD。一般情况下，在 $N_R \geqslant N_T$ 时，由于空间复用，MLD 检测器实现阶数 N_R 的分集，而其他两种线性检测器实现 N_T-N_R+1 阶分集。实际上，在 N_T 个发射天线独立发送数据流且有 N_R 个接收天线的情况下，线性检测器具有 N_R 个自由度。在检测一个数据流且存在 N_T-1 个来自其他发射天线的干扰信号的情况下，线性检测器可以利用 N_T-1 个自由度来消除这 N_T-1 个干扰信号。因此，线性检测器的有效分集阶数为 $N_R-(N_T-1)=N_R-N_T+1$。 ◀

有趣的是，比较三种检测器的计算复杂度，可以发现 MLD 的计算复杂度呈指数增长，即 M^{N_T}，其中 M 为信号星座图的点数。而线性检测器的计算复杂度随 N_T 与 N_R 线性增长。因此，MLD 的计算复杂度在 M 与 N_T 值较大时要远远高于线性检测器。但是当发射天线数以及信号星座图点数较小时(如 $N_T \leqslant 4$，$M=4$ 时)，MLD 的计算复杂度还是合理的。

14.4.5 MIMO 系统的空时码

下面考虑图 14-21 所示的 MIMO 系统。在发射机中，信息比特序列被送到符号映射器，符号映射器的作用是映射比特的块到信号星座选择的点，如 PAM，PSK 或 QAM，其包含 $M=2^b$ 个信号点。这些信号点将作为块被馈送到一个空时编码器，空时编码器将信息码元映射到一组相同的并行调制器中，并行调制器将信号点映射成相应的波形并经 N_T 个天线同时发出。下面描述两种类型的空时码：分组码和网格码。

空时分组码(STBC)。 空时分组码由生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 定义，其具有 N 行 N_T 列，形式如下

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N_T} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N_T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{N3} & g_{N2} & \cdots & g_{NN_T} \end{bmatrix} \tag{14.4.16}$$

其中元素$\{g_{ij}\}$是信号点，根据信息比特到对应二元或M元信号星座图的信号点映射所得。通过采用N_T个发射天线，G中的每一行都包含N_T个不同的信号点，这些信号点在一个时隙通过N_T个发射天线发出。因此，G中第一行的符号是在第一个时隙由N_T个发射天线发出的，第二行的符号在第二个时隙由N_T个发射天线发出，第N行的符号在第N个时隙由N_T个发射天线发出。所以需要N个时隙发送生成矩阵G中的N行符号。不同的发送符号数与时隙数之比称为空间编码率R_s。

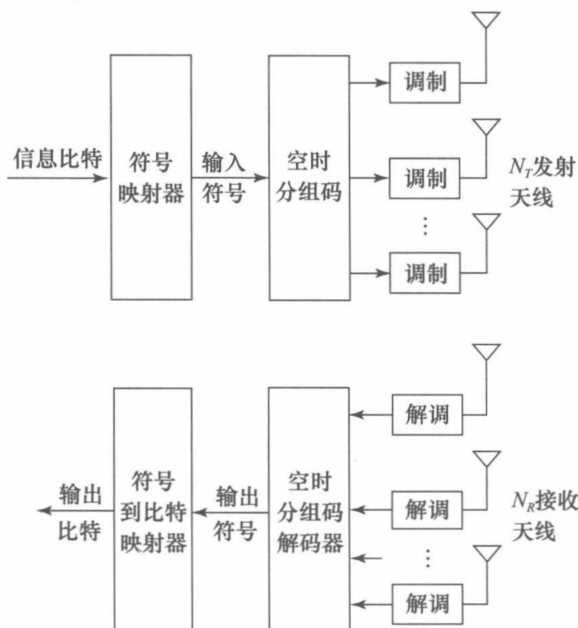


图 14-21　空时分组编码 MIMO 系统

802

对于 STBC 的生成矩阵的设计，应该关注 3 个主要的设计目标：(*a*)达到尽可能高的速率(吞吐率)，(*b*)分集数N_TN_R尽可能高，(*c*)最小化 MLD 的计算复杂度。下面将针对这三个目标进行分析。

Alamouti 空时分组码。 Alamouti(1998)设计了一种适用于$N_T=2$个发送天线与$N_R=1$个接收天线的空时分组码。Alamouti 码的生成矩阵如下所示

$$G = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{bmatrix} \tag{14.4.17}$$

其中s_1与s_2是从M元 PAM(PSK，QAM)星座图的$M=2^b$个信号点中提取的两个信号点。因此$2b$个数据比特在M元星座图中映射到两个信号点s_1与s_2上。符号s_1与s_2将在第一个时隙从两个天线发出，符号$-s_2^*$与s_1^*将在第二个时隙从两个天线发出。因此，s_1与s_2这两个符号在两个时隙完成传输。所以，Alamouti 码的空间编码率$R_s=1$。这是(正交)STBC 所能达到的最高空间编码率。

803

假设s_1与s_2这两个符号是 QAM 信号星座图中的信号点。这些信号点的调制正交载波为$\cos 2\pi f_c t$与$\sin 2\pi f_c t$。调制器在第一个时间间隔$0<t\leqslant T$送至两个天线的输出信号为

$$\begin{aligned} u_{m1}^{(1)}(t) &= A_{mc1}g_T(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms1}g_T(t)\sin 2\pi f_c t \\ u_{m2}^{(1)}(t) &= A_{mc2}g_T(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms2}g_T(t)\sin 2\pi f_c t \end{aligned} \tag{14.4.18}$$

其中$s_i=(\sqrt{\mathscr{E}_s}A_{mci}\ \sqrt{\mathscr{E}_s}A_{msi})$，$i=1, 2$，$g_T(t)$为矩形脉冲，其定义为

$$g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{T}} & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{14.4.19}$$

$u_{m1}(t)$与$u_{m2}(t)$的上标表明该信号在第一个时间间隔传输。在第二个时间间隔$T<t\leqslant 2T$，待传输的符号为$-s_2^*$与s_1^*。这时两根天线上待传输的信号为

$$\begin{aligned} u_{m1}^{(2)}(t) &= -A_{mc1}g_T(t-T)\cos 2\pi f_c(t-T) - A_{ms1}g_T(t-T)\sin 2\pi f_c(t-T) \\ u_{m2}^{(2)}(t) &= A_{mc2}g_T(t-T)\cos 2\pi f_c(t-T) + A_{ms2}g_T(t-T)\sin 2\pi f_c(t-T) \end{aligned} \tag{14.4.20}$$

基于非频率选择性模型，$N_T=2$，$N_R=1$ 信道的 MISO 信道矩阵为

$$\boldsymbol{C}=[c_{11} \quad c_{12}] \tag{14.4.21}$$

在 STBC 解码过程中，假设 $\boldsymbol{C}$ 在两个时隙中保持不变，且接收机已知 $\boldsymbol{C}$。则在第一个时间间隔接收到的信号为

$$r^{(1)}(t)=c_{11}u_{m1}^{(1)}(t)+c_{12}u_{m2}^{(1)}(t)+n^{(1)}(t) \tag{14.4.22}$$

在第二个时间间隔接收到的信号为

$$r^{(2)}(t)=c_{11}u_{m1}^{(2)}(t)+c_{12}u_{m2}^{(2)}(t)+n^{(2)}(t) \tag{14.4.23}$$

其中 $n^{(1)}(t)$ 与 $n^{(2)}(t)$ 为加性高斯白噪声项。

在接收端，$r^{(1)}(t)$ 与基函数 $\psi_1(t)$ 与 $\psi_2(t)$ 进行互相关计算

804

$$\begin{aligned}\psi_1(t)&=g_T(t)\cos 2\pi f_c t\\ \psi_2(t)&=-g_T(t)\sin 2\pi f_c t\end{aligned} \tag{14.2.24}$$

$r^{(2)}(t)$ 与基函数 $\psi_1(t-T)$ 和 $\psi_2(t-T)$ 进行互相关计算。因此相关器在抽样时刻 $t=T$ 与 $t=2T$ 的输出为

$$\begin{aligned}y_1&=c_{11}s_1+c_{12}s_2+\eta_1\\ y_2&=-c_{11}s_2^*+c_{12}s_1^*+\eta_2\end{aligned} \tag{14.4.25}$$

其中 η_1 与 η_2 为循环对称不相关的复高斯随机变量，均值为 0，方差为 σ_η^2。

式(14.4.25)中相关器的输出 y_1 与 y_2 送至检测器，检测器计算出符号 s_1 与 s_2 的估计值

$$\begin{aligned}\hat{s}_1&=y_1c_{11}^*+y_2^*c_{12}\\ \hat{s}_2&=y_1c_{12}^*-y_2^*c_{11}\end{aligned} \tag{14.4.26}$$

并且选择与估计值 $\hat{s}_1$ 和 $\hat{s}_2$ 欧氏距离最近的两个符号 $\tilde{s}_1$ 与 $\tilde{s}_2$。将式(14.4.25)中的 y_1 与 y_2 代入式(14.4.26)进行乘法运算，可得

$$\begin{aligned}\hat{s}_1&=[|c_{11}|^2+|c_{12}|^2]s_1+c_{11}^*\eta_1+c_{12}\eta_2^*\\ \hat{s}_2&=[|c_{11}|^2+|c_{12}|^2]s_2+c_{12}^*\eta_1-c_{11}\eta_2^*\end{aligned} \tag{14.4.27}$$

对 Alamouti 空时分组码的观察如下。首先，可以发现此码实现了双分集，这是在两个发射天线及一个接收天线的系统中所能实现的最大传输效率；其次，计算式(14.4.26)的 MLD 容易实现。这两个理想特性源自 Alamouti 码生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的正交性，$\boldsymbol{G}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} g_1 & g_2\\ -g_2^* & g_1^*\end{bmatrix} \tag{14.4.28}$$

可以发现列向量 $\boldsymbol{v}_1=(g_1,\ -g_2^*)^t$ 与 $\boldsymbol{v}_2=(g_2,\ g_1^*)^t$ 为正交向量(即 $v_1\cdot v_2^H=0$)，而且

$$\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{G}=[|g_1|^2+|g_2|^2]\boldsymbol{I}_2 \tag{14.4.29}$$

其中 $\boldsymbol{I}_2$ 为一个 2×2 的单位矩阵，根据此正交性，可将式(14.4.25)的接收信号表示如下

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{12}^* & -c_{11}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2^*\end{bmatrix}$$

或

805

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta} \tag{14.4.30}$$

并且可以由式(14.4.30)中 $\boldsymbol{y}$ 得到式(14.4.26)中的估计值 $\hat{s}_1$ 与 $\hat{s}_2$，

$$\begin{bmatrix}\hat{s}_1\\ \hat{s}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}\\ c_{12}^* & -c_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2^*\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_{21}^H\boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{C}_{21}^H\boldsymbol{\eta}=[|c_{11}|^2+|c_{12}|^2]\boldsymbol{s}+\boldsymbol{C}_{21}^H\boldsymbol{\eta} \tag{14.4.31}$$

则有

$$\boldsymbol{C}_{21}^H\boldsymbol{C}_{21}=[|c_{11}|^2+|c_{12}|^2]\boldsymbol{I}_2 \tag{14.4.32}$$

因此，依据式(14.4.29)描述的 $\boldsymbol{G}$ 的性质，完全分集与低译码复杂度可同时获得。

例 14.4.3 采用蒙特卡洛仿真估计多天线系统的误码率性能，该系统采用 Alamouti STBC 编码，$N_T=2, N_R=1$。从 QPSK 星座图中选择信号点，根据式(14.4.25)生成检测器的输入。c_{11} 与 c_{12} 为零均值、单位方差的统计独立的复值高斯变量，η_1 与 η_2 为零均值统计独立的复值高斯变量，方差为 σ^2。检测器通过计算式(14.4.26)中的估计值，选择与 $\hat{s}_1$ 和 $\hat{s}_2$ 欧式距离最近的信号点。进行 $N=10\ 000$ 次迭代运算，对任意给定 σ^2 值完成上述计算。每一次迭代中独立选择信道系数(c_{11}，c_{12})、信号点(s_1，s_2)及加性噪声项(η_1，η_2)。绘制测量误符号率与 $\text{SNR}=10\log(\mathscr{E}_b/2\sigma^2)$ 的关系曲线，其中 $\mathscr{E}_b=\mathscr{E}_s/2$ 为每比特携带的能量，为方便进行计算，将其进行归一化处理。

解： 图 14-22 为估计错误率与 SNR 的关系曲线。可以看到，错误率与 SNR 的平方成反比，即，$(N_T, N_R)=(2, 1)$ 时 Alamouti 码产生双重分集。◀

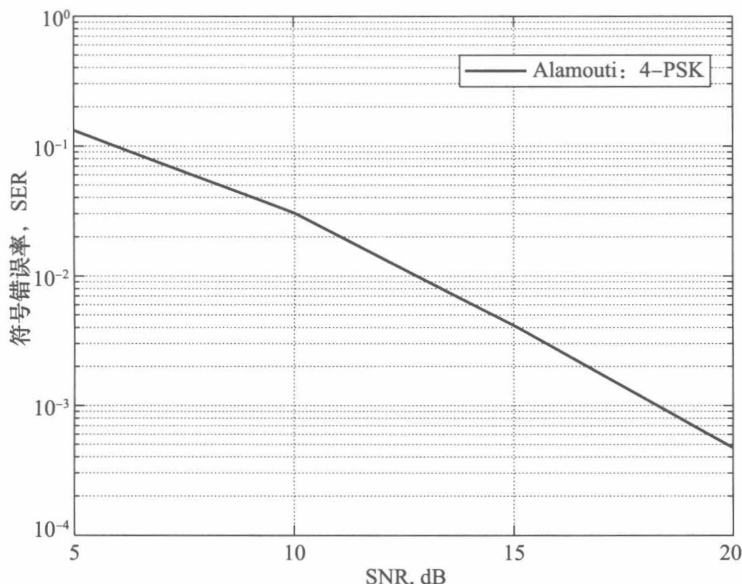


图 14-22 例 14.4.3 的对应图

Alamouti 码是 $N_T=2$ 时正交复矩阵设计的一个例子。文献中已经证明当 $N_T>2$ 时不存在 $R_s=1$ 的正交复矩阵设计[参见 Jafarkhani(2005)与 Tarokh 等(1999)]。但是去掉生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为方阵这一限制条件，就能够对一维或二维的信号星座图进行正交设计。例如，$N_T=4$ 个发射天线传输四个复值符号(PSK 或 QAM)的 STBC 码，正交生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ -s_2 & s_1 & -s_4 & s_3 \\ -s_3 & s_4 & s_1 & -s_2 \\ -s_4 & -s_3 & s_2 & s_1 \\ s_1^* & s_2^* & s_3^* & s_4^* \\ -s_2^* & s_1^* & -s_4^* & s_3^* \\ -s_3^* & s_4^* & s_1^* & -s_2^* \\ -s_4^* & -s_3^* & s_2^* & s_1^* \end{bmatrix} \tag{14.4.33}$$

806

对于此码生成器，4 个复值符号在 8 个连续的时隙中发送。因此此码的空间速率是 $R_s=1/2$。还可以发现

$$\boldsymbol{G}^H\boldsymbol{G}=\sum_{i=1}^{4}[\,|s_i|^2\,]\boldsymbol{I}_4 \tag{14.4.34}$$

这样，此码在 1 个接收天线下提供 4 阶分集，也就是 N_R 个接收天线提供 $4N_R$ 分集。

对于任意数量的发送天线都存在 $R_s=1/2$ 的复正交矩阵。但是 Wang 和 Xia(2003)已

经发现 $R_s>3/4$ 的复正交矩阵是不存在的。$R_s=3/4$ 的复正交矩阵是存在的。在 $N_T=3$ 个发送天线上用 4 个时隙传输 s_1，s_2 和 s_3 3 个符号的 $R_s=3/4$ 的复正交矩阵设计如下，分集阶数由 STBC 确定。

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 \\ s_3^* & 0 & -s_1^* \\ 0 & s_3^* & -s_2^* \end{bmatrix} \tag{14.4.35}$$

例 14.4.4 已知生成矩阵如式(14.4.35)所示，速率 $R_s=3/4$，求检波器的输入，并给出检波器所计

807

算的估计值 $\hat{s}_1$，$\hat{s}_2$ 和 $\hat{s}_3$ 的表达式。假定在 4 个时隙中信道系数 c_{11}，c_{12} 和 c_{13} 是时不变的，求 STBC 所达到的分集阶数。

解： 检波器的输入就是 4 个时隙接收信号在相关器的输出，即

$$y_1=c_{11}s_1+c_{12}s_2+c_{13}s_3+\eta_1$$
$$y_2=-c_{11}s_2^*+c_{12}s_1^*+\eta_2$$
$$y_3=c_{11}s_3^*-c_{13}s_1^*+\eta_3$$
$$y_3=c_{12}s_3^*-c_{13}s_2^*+\eta_4$$

等效于

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12}^* & -c_{11}^* & 0 \\ -c_{13}^* & 0 & c_{11}^* \\ 0 & -c_{13}^* & c_{12}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_{31}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta}$$

容易证明符号估计值可以由以下 y_1，y_2，y_3，y_4 的线性组合得到

$$\hat{s}_1=c_{11}^*y_1+c_{12}^*y_2^*-c_{13}^*y_3^*$$
$$\hat{s}_1=c_{12}^*y_1-c_{11}y_2^*-c_{13}y_4^*$$
$$\hat{s}_1=c_{13}^*y_1+c_{11}y_3^*+c_{12}y_4^*$$

或者表示为矩阵形式

$$\hat{\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{C}_{31}^H\boldsymbol{y}$$

通过带入上式中的 $\boldsymbol{y}$，能够得到：

$$\hat{\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{C}_{31}^H\boldsymbol{C}_{31}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{C}_{31}^H\boldsymbol{\eta}=[|c_{11}|^2+|c_{12}|^2+|c_{13}|^2]\boldsymbol{s}+\boldsymbol{C}_{31}^H\boldsymbol{\eta}$$

因此，此 STBC 可达到 3 阶分集。 ◀

空时网格码。 空时网格码(STTC)与网格编码调制(TCM)中的网格码相似，都是将网格码与适当选择的信号星座图结合形成的，目的是实现编码增益。时空码的主要目的是在最高码率下达到尽可能大的空间分集。STTC 设计可以按照一些规则手工或借助计算机完成，这些规则类似于 TCM 中网格码设计的规则。

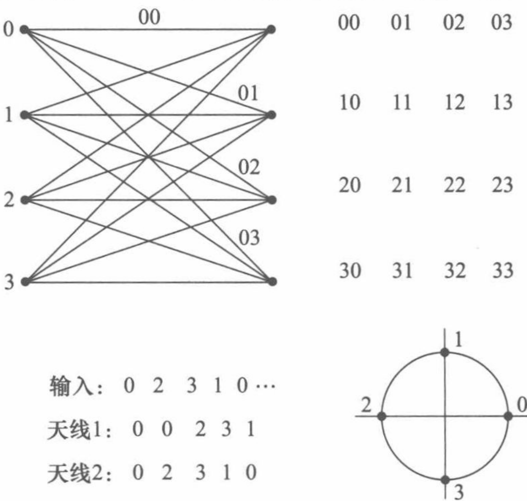


图 14-23 4-PSK，4 状态，空时网格码

图 14-23 给出一个 STTC 的例子，这是针对两个发送天线的 QPSK 调制而设计的 4 状态网格码。这些状态表示为 $S_t=0$，1，2，3。编码器的输入是比特对(00，01，10，11)，分别映射到编号为(0，1，2，3)的相应相位上。序号 0，1，2，3 对应 4 个相位，称为符号。编码器起始状态为 $S_t=0$。每对输入比特映射到相应的符号，编码器产生一对相应的符号。第一个符号在第一个天线上发射，第二个符号在

808

第二个天线上发射。举个例子，当编码器的状态是 $S_t=0$ 且输入比特是 11，对应的符号是 3。STTC 的输出是一对符号(0，3)，分别对应 0 相和 $3\pi/2$ 相。0 相信号在第一个天线上发射，$3\pi/2$ 相信号在第二个天线上发射。此时编码器处于状态 $S_t=3$。如果下面两个比特是 01，编码器的输出就是(3，1)，它们同样将在两个天线上发射。然后编码器转移至状态 $S_t=1$，并继续此过程。在输入比特组即数据帧的结束位置插入若干 0 比特，以使编码器回到状态 $S_t=0$。这样，STTC 的带宽利用率为 2bps/Hz。可以看到，此码满足上述两个设计规则且达到 $N_T=2$ 的满秩。

在 STTC 解码中，最大似然序列检测(MLSD)准则具有最佳性能。MLSD 通过维特比算法保证效率。对于两个发射天线，分支测度可以表示为

$$\mu_b(s_1,s_2)=\sum_{j=1}^{N_R}\left|y_j-c_{1j}s_1-c_{2j}s_2\right|^2 \tag{14.4.36}$$

其中$\{y_j，1\leqslant j\leqslant N_R\}$是 N_R 个接收天线的匹配滤波器输出，$\{c_{1j}，1\leqslant j\leqslant N_R\}$和$\{c_{2j}，1\leqslant j\leqslant N_R\}$是非频率选择性信道的信道系数，$(s_1，s_2)$是在两个天线上传输的信号。采用维特比算法中的分支测度形成网格有效路径的路径测度，可以找到最小测度路径，并确定对应具有最小路径测度的路径所对应的传输符号序列。

809

14.5　无线信道的链路预算分析

在设计通过 LOS 微波卫星信道传输信息的无线通信系统时，必须考虑天线特性对于确定接收端 SNR 的影响，以达到预期的性能。系统设计流程如下。

假设天线在自由空间的辐射是各向同性的，发射功率为 P_T 瓦，如图 14-24 所示。天线功率密度在距离 d 处是 $P_T/4\pi d^2\,\mathrm{W/m^2}$。若发射天线在某个方向上具有方向性，且天线增益为 G_T，那么距离 d 处的天线功率密度为 $P_TG_T/4\pi d^2\,\mathrm{W/m^2}$。乘积 P_TG_T 称为有效全向辐射功率(EIRP)，对应 $G_T=1$ 的全向天线辐射功率。

指向辐射功率方向的接收天线接收到的能量与截面积成正比。因此，接收天线接收到的功率可以表示为

$$P_R=\frac{P_TG_TA_R}{4\pi d^2} \tag{14.5.1}$$

其中 A_R 是天线能够影响的区域。由基础电磁场理论可得天线增益 G_T 与天线影响区域的关系为

$$A_R=\frac{G_R\lambda^2}{4\pi},m^2 \tag{14.5.2}$$

其中 λ 是发送信号的波长。

810

如果将式(14.5.2)中的 A_R 代入式(14.5.1)，可得接收功率的表达式

$$P_R=\frac{P_TG_TG_R}{(4\pi d/\lambda)^2} \tag{14.5.3}$$

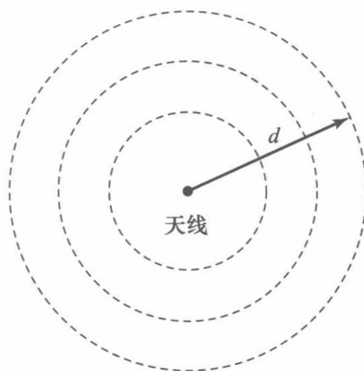


图 14-24　自由空间下的各向同性辐射的天线

$(4\pi d/\lambda)^2=\mathscr{L}_s$ 是自由空间的路径损耗。信号传输中可能遇到的其他损耗，比如大气损耗，可以用一个额外的变量$\mathscr{L}_a$ 表示。因此，接收功率可以表示为

$$P_R=\frac{P_TG_TG_R}{\mathscr{L}_s\mathscr{L}_a} \tag{14.5.4}$$

等效为

$$P_R\,|_{\mathrm{dBW}}=P_T\,|_{\mathrm{dBW}}+G_T\,|_{\mathrm{dB}}+G_R\,|_{\mathrm{dB}}-\mathscr{L}_s\,|_{\mathrm{dB}}-\mathscr{L}_a\,|_{\mathrm{dB}} \tag{14.5.5}$$

天线的有效面积取决于波长 λ 和天线的物理尺寸。举例来说，直径为 D 的天线的有效面积为

$$A_R = \frac{\pi D^2}{4}\eta \tag{14.5.6}$$

其中 $\pi D^2/4$ 是天线的物理面积，η 是天线的照射效率因子，取值范围为 $0.5 \leqslant \eta \leqslant 0.6$，因此直径为 D 的抛物面天线的天线增益为

$$G_R = \eta\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2 \tag{14.5.7}$$

第二个例子，照射效率因子为 0.8 的喇叭天线，物理面积为 A，有效面积为 $A_R = 0.8A$，则喇叭天线的增益为

$$G_R = \frac{10A}{\lambda^2} \tag{14.5.8}$$

与天线增益(方向性)有关的另一个参数是波束宽度，记为 Θ_B，如图 14-25 所示。波束宽度通常采用天线方向图的 -3dB 宽度衡量。例如抛物面天线的 -3dB 波束宽度约为

$$\Theta_B \approx 70\lambda/D \text{ 度}$$

可见 G_T 与 Θ_B^2 成反比。因此，直径加倍导致的波束宽度减半，可以使天线增益增长到原来的 4 倍(6dB)。

811



图 14-25 窄波束天线及其辐射模型

例 14.5.1 地球同步轨道(距地表 36 000 公里)上的卫星，发射功率为 100W。发射天线的增益为 18dB，EIRP=38dBW。地面站采用 3m 抛物面接收天线，下行发射频率为 4GHz，求接收功率。

解：波长为 $\lambda = 0.075$m。因此自由空间路径损耗为

$$L_s\big|_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 195.6\mathrm{dB}$$

假设 $\eta = 0.5$，天线增益为 39dB。如果没有其他损耗，则接收功率为

$$P_R\big|_{\mathrm{dBW}} = 20 + 18 + 39 - 195.6 = -118.6\mathrm{dBW}$$

等效为

$$P_R = 1.38 \times 10^{-12} W$$

进一步计算达到特定 P_R 所需 $\mathscr{E}_b/N_0$，由于

812

$$\frac{\mathscr{E}_b}{N_0} = \frac{T_b P_R}{N_0} = \frac{1}{R_b}\frac{P_R}{N_0} \tag{14.5.9}$$

则有

$$\frac{P_R}{N_0} = R_b\left(\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}\right)_{\mathrm{req}} \tag{14.5.10}$$

其中 $(\mathscr{E}_b/N_0)_{\mathrm{req}}$ 是完成预期性能需要的信噪比。根据式(14.5.10)可得比特速率 R_b 为

$$10\log_{10} R_b = \left(\frac{P_R}{N_0}\right)_{\mathrm{dB}} - 10\log_{10}\left(\frac{\mathscr{E}_b}{N_0}\right)_{\mathrm{req}} \tag{14.5.11}$$ ◀

例 14.5.2 如果 $(\mathscr{E}_b/N_0)_{\mathrm{req}} = 10$dB，求例 14.5.1 中的卫星通信系统的比特率。假设接收机的前端的噪声温度为 300K，这是 4GHz 频率范围接收机的典型噪声温度。

解：由于 $T_0 = 290$K 且 $T_e = 10$K，则有

$$N_0 = kT = 4.1 \times 10^{-21}\,\text{W/Hz}$$

等效于－203.9dBW/Hz，那么

$$\left(\frac{P_R}{N_0}\right)_{\text{dB}} = -118.6 + 203.9$$

因此，由式(14.5.11)可得

$$10\log_{10} R_b = 85.3 - 10 = 75.3$$

或者

$$R_b = 33.9 \times 10^6\,\text{bps}$$

因此，卫星信道能够支持 33.9Mbps 的比特速率。◀

14.6 小结及深入阅读

本章讨论了多径衰落信道中的数字信号传输，介绍了物理无线信道的特性，构造了频率选择性和非频率选择性衰落信道的数学模型，并且给出了反映多普勒效应的模型。多普勒效应指在物理信道或者移动通信接收机等移动平台中，由于运动引起的接收信号频率扩展现象。此外，还描述了考虑路径损耗和阴影的无线移动信道的传播模型。

14.3 节估计了加性高斯白噪声(AWGN)非频率选择性瑞利衰落信道中二进制调制方案的误差概率。发现在这样的信道中误差概率与信噪比(SNR)成反比，即要到达小误差概率需要较大的 SNR。另一方面，分析表明采用信号分集可以使所需的 SNR 大大降低。信号分集是在独立的多径衰落信道上传输相同的信号。我们还证明了采用编码同时对编码符号在时域、频域或两个域进行交织使其衰落独立，可以提高信号分集的带宽效率。本章还介绍了用于频率选择性信道的 RAKE 解调器，该解调器在收集和汇总接收信号中可分辨的多径信号分量上具有最佳性能。因此，RAKE 解调器通过处理可分辨的接收信号的信号分量可以实现信号分集。本节还指出在频率选择性信道中可以采用 OFDM 代替单载波传输。采用 OFDM 替代单载波的主要目标是，OFDM 每个子载波都很窄，足以视为非频率选择性的。为了抵抗每个子载波上的信号衰落，在两个或者更多的子载波上传输相同信号。这样也实现了信号分集。

813

对衰落信道二进制调制技术的误码率性能评估主要采用瑞利衰落信道模型。虽然其他一些信道模型，如莱斯和 Nakagami 衰落模型可能更适合刻画某些真实信道的衰落，但是基于信号分集的设计可靠数字通信的一般方法依然适用。

14.4 节介绍了多收发天线系统，这种无线通信系统利用空间复用提高了传输速率并实现了信号分集。这一节具体给出了多天线系统的检测方法，并且评估了其在瑞利衰落信道中的性能。本节还介绍了将数字信号映射到多个发射天线的方法，包括空时分组码，比如 Alamouti 编码，网格编码等。

本章最后讨论了无线信道数字通信的链路预算分析。这种链路预算分析方法适用于自由空间视距信道、特别是视距微波无线通信信道及卫星通信系统。相比自由空间传播，地面非视距信道中无线传播因地形特征而更加多变，信号衰减更加显著。Rappaport(1996)的书中就给出了蜂窝无线通信的路径损耗模型。

关于多径衰落信道更多深入的讨论可参考 Schwartz(1966)、Proakis 和 Salahi(2008)的著作。Price(1954，1956)完成了关于多径衰落信道及这些信道的数字通信接收机设计上的先驱工作。在此工作之后，Price 和 Green(1958，1960)，Kailath(1960，1961)和 Green(1962)做出了显著的贡献。在各种信道条件下的分集传输和分集组合技术参见 Piece(1958)，Brennan(1959)，Turin(1961，1962)，Piece 和 Stein(1960)，Barrow(1963)，Bello 和 Nellin(1962a，1962b，1963)，Price(1962a，1962b)和 Lindsey(1964)的文献。

814

习题

14.1 移动车辆间的信号发射与接收中，发射信号频率与车辆速度成正比。当车载台相对于固定发射机的运动速度为 v 时，接收信号的多普勒频移由下式给定

$$f_D = \pm \frac{v}{\lambda}$$

其中 λ 是波长，上式符号取决于车辆相对于发射端的行驶方向(靠近或远离)。在一个移动蜂窝通信系统中，假设一辆车以相对于基站 100km/h 的速度行驶。信号是在 1GHz 载波上传输的窄带信号。

1. 求多普勒频移。
2. 对于行驶速度达到 100km/h 的车辆，如果设计环路跟踪多普勒频移，那么该多普勒频率跟踪环路的带宽应该为多少?
3. 假设发射信号带宽范围为 1MHz，中心频率为 1GHz。求信号低频和高频间的多普勒频率扩展。

14.2 多径衰落信道的多径时间扩展 $T_m=1\text{s}$，多普勒频率扩展 $B_d=0.01\text{Hz}$。信号传输可用的带通信道总带宽为 $W=5\text{Hz}$。为了降低符号间干扰的影响，信号设计选择脉冲间隔为 $T=10\text{s}$

1. 求相干带宽和相干时间
2. 该信道是频率选择性的吗? 给出解释。
3. 该信道是慢衰落还是快衰落? 给出解释。
4. 假设信道在频率分集下利用(对极)相干检测 PSK 传输二进制数据。解释如何使用可用信道带宽来获得频率分集，并求可用的分集阶数。
5. 对于(4)中的情况，要保证 10^{-6} 的错误概率，近似的 SNR/分集是多少?

14.3 确定适用于飞机间通信线路的信道模型。已知该线路中存在直接信号传播路径和周边地面地形引起信号散射所导致的二次传播。二次路径相对于直接路径传播，存在 $\tau_0=10\mu\text{s}$ 的传播时延。信号带宽 $W=100\text{kHz}$。

14.4 确定适用于飞机间通信线路的信道模型。通信线路描述见习题 14.3，不同的是假设发射信号带宽改为 10kHz。

14.5 AWGN 信道非相干检测二进制 DPSK 和二进制 FSK 的误码率为

$$P_b = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c\rho_b}$$

其中对于 DPSK，$c=1$，对于 FSK，$c=\frac{1}{2}$，$\rho_b=\frac{\alpha^2 \mathscr{E}_b}{N_0}$，$\alpha$ 是衰减因子。在式(14.3.9)给出的瑞利分布变量 α 上对 P_b 求平均，确定瑞利衰落信道下 DPSK 和 FSK 的误码率表达式。

14.6 通信系统采用双天线分集和二进制正交 FSK 调制器。两个天线的接收信号分别为

$$r_1(t) = \alpha_1 s(t) + n_1(t)$$
$$r_2(t) = \alpha_2 s(t) + n_2(t)$$

其中 α_1 和 α_2 是统计独立同分布的瑞利随机变量，$n_1(t)$和 $n_2(t)$是统计独立零均值白色高斯随机过程，且功率谱密度为 $N_0/2\text{W/Hz}$。这两路信号经解调、平方后在检测前合并(相加)。

1. 画出整个接收机的功能框图，其中包含解调器，合并器和检测器。
2. 画出检测器的误码率曲线，并与无分集情况的结果进行对比。

14.7 二进制通信系统在两个分集信道下传输相同信息。两个接收信号分别为

$$r_1 = \pm \sqrt{\mathscr{E}_b} + n_1,$$
$$r_2 = \pm \sqrt{\mathscr{E}_b} + n_2,$$

其中 $E(n_1)=E(n_2)=0$，$E(n_1^2)=\sigma_1^2$ 且 $E(n_2^2)=\sigma_2^2$，n_1 和 n_2 是统计无关高斯变量。检测器进行判决的基准是 r_1 和 r_2 的线性组合

$$r = r_1 + kr_2$$

1. 求使误码率最小化的 k 值。
2. 画出 $\sigma_1^2=1$，$\sigma_2^2=3$，且 $k=1$ 或 k 是第 1 问确定的最佳取值时的错误概率曲线。比较结果。

14.8 假设在衰落信道中传输二进制对极信号 $\pm s(t)$,接收信号为

$$r(t) = \pm \alpha s(t) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

其中 $n(t)$是零均值高斯白噪声，自相关函数为 $\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$。发射信号的能量 $\mathscr{E} = \int_0^T |s(t)|^2 \mathrm{d}t$。信道增益 α 由概率分布函数$p(\alpha)=0.1\delta(\alpha)+0.9\delta(\alpha-2)$指定。

1. 解调器采用与 $s(t)$相匹配的滤波器时，求解调器的平均错误概率 P_e。
2. 在$\frac{\mathscr{E}}{N_0}$接近无穷大时 P_e 的近似值是多少?
3. 假设在两个统计独立的衰落信道中传输相同的信号，信道增益分别为 α_1 和 α_2，其中 $p(\alpha_k)=0.1\delta(\alpha_k)+0.9\delta(\alpha_k-2)$，$k=1,2$ 两个信道中的噪声是统计独立同分布。每个信道的解调器均采用一个匹配滤波器，并将滤波器输出相加构成判决变量。求 P_e 的平均值。
4. 在(3)情况下$\frac{\mathscr{E}}{N_0}$接近无穷大时 P_e 的近似值是多少?

14.9 考虑图 14-4 中的非频率选择性信道模型。

在此信道上采用二进制正交信号 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 传输信息。符号持续时间 $T_b \ll T_{ct}$，因此可以假设在时间间隔(时间窗口)NT_b 中信道恒定不变，其中 N 是一个正整数。样本间隔内的匹配滤波器的输出为

$$y_{1k} = c\sqrt{\mathscr{E}_b} + n_{1k}$$

或

$$y_{2k} = n_{2k}$$

当 u_{1k} 是发射信号时或

$$y_{1k} = n_{1k}$$
$$y_{2k} = c\sqrt{\mathscr{E}_b} + n_{2k}$$

当 $u_2(t)$ 是发射信号时。$c=\alpha e^{j\varphi}$ 是复数值的信道系数，且假设在时间窗 $0 \leqslant t \leqslant NT_b$ 下为恒定常量。

为了在时间窗中进行信号相干检测，通过对 $1 \leqslant k \leqslant N$ 时匹配滤波器的输出进行平均来估计信道系数 c。因此，估计值为

$$\hat{c} = \frac{1}{N\sqrt{\mathscr{E}_b}}\sum_{k=1}^{N}(y_{1k} + y_{2k})$$
$$= \frac{1}{N\sqrt{\mathscr{E}_b}}\sum_{k=1}^{N}\left[c\sqrt{\mathscr{E}_b} + n_{1k} + n_{2k}\right]$$

假设噪声项是统计独立零均值高斯随机变量，方差 $\sigma^2 = N_0/2$，(*a*)证明 $\hat{c}$ 的均值是实际信道系数 c。(*b*)证明估计方差随 N 值增大而减少。(*c*)如果 σ_c^2 定义为估计方差，$1/\sigma_c^2$ 定义为 SNR 估计值，确定 $1/\sigma_c^2$ 的表达式，并且说明 SNR 随 N 和 $\mathscr{E}_b$ 线性增加。

14.10 在标称带宽为 3200Hz 的高频信道中以(1) 4800bps 或(2)20bps 的速率传输数字信息。信道多径时间扩展 $T_m = 5\text{ms}$。确定一个调制方法，获得期望的数据速率，并说明接收端是否必须设置均衡器来克服符号间干扰。

14.11 在火车运行速度为 200km/h，载波频率为 1GHz 的情况下，重做例 14.2.6。

14.12 在信道具有带宽 $W = 800\text{kHz}$，多径时间扩展 $T_m = 10\mu\text{s}$，多普勒频率扩展 $B_d = 10\text{Hz}$ 的情况下，重做例 14.3.2。

14.13 说明在(14.3.34)和(14.3.35)中的条件下，时间带宽的乘积满足 $TW \gg 1$。

14.14 具有$(N_T, N_R) = (4, 1)$天线的 MISO 系统中的生成矩阵给定为

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 & s_3 \\ s_3^* & 0 & -s_1^* & s_2 \\ 0 & s_3^* & -s_2^* & -s_1 \end{bmatrix}$$

则此 STBC 的空间速率 $R_s = 3/4$。系统的信道矩阵包括元素 c_{11}，c_{12}，c_{13} 和 c_{14}。证明此生成矩阵是正交的，并且在衰落信道中可实现 4 阶分集。

14.15 无线发射器在频率10^9 Hz(1GHz)的输出功率为 $P_T = 1\text{W}$。发射和接收天线为抛物线型，其直径 $D = 3\text{m}$。

1. 求天线增益。
2. 求发射端的 EIRP。
3. 自由空间下的发射端和接收端天线距离为 20km。求接收天线输出信号功率 dBm 值。

14.16 无线通信系统在 1GHz 的发射功率为 0.1W。发射和接收天线是抛物线型，且直径为 1m。接收端距离发射端 30km。

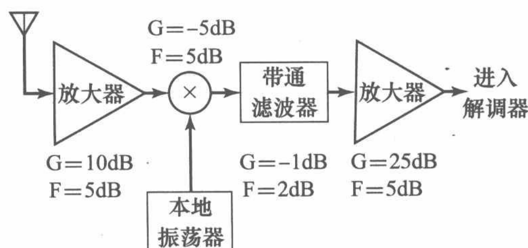
1. 求发射天线和接收天线增益。
2. 求发射信号的 EIRP。
3. 求接收天线的信号功率。

14.17 在同步轨道上使用卫星与距离 4×10^7 m 的地球站通信。卫星有 1 个天线，增益为 15dB，发射功率为 3W。地球站使用一个 10m 抛物线天线，其效率为 0.6。频率带宽为 $f = 10\text{GHz}$。求接收天线输出的接收功率值。

14.18 宇宙飞船距地球10^8 m，以 Rbps 的速率发送数据。频带的中心频率为 2GHz，发射功率为 10W。地球站使用直径为 50m 的抛物线型天线。宇宙飞船的天线增益为 10dB。接收机前端的噪声温度为 $T = 300°\text{K}$。

1. 求接收功率电平。
2. 如果要求$\mathscr{E}_b/N_0 = 10\text{dB}$，求宇宙飞船能够发送的最大比特速率。

14.19 考虑如习题 14.19 图所示的接收机前端框架图。一级放大器输入的接收信号功率为-113dBm，接收噪声功率谱密度为-175dBm/Hz。带通滤波器带宽为 10MHz，增益和噪声如图所示。求解调器输入的信号噪声比 P_s/P_n。



习题 14.19 图

14.20 采用地球同步轨道上的卫星作为数字通信系统的再生中继器。考虑卫星到地球链路，卫星天线增益为 6dB，地球站天线增益为 50dB。下行链路中心频率为 4GHz，信号带宽为 1MHz。如果可靠通信要求的 $\mathscr{E}_b/N_0$ 值为 15dB，求卫星通信下行链路发射功率。假设 $N_0 = 4.1\times10^{-21}$ W/Hz。

14.21 环绕水星运行的 Mariner 宇宙飞船对相距

815～819

1.6×10¹¹ m的地球发射数据。发射天线增益为27dB，运行频率为 $f=2.3\text{GHz}$。发送功率为17W。地球基站采用抛物线型天线，直径为64m，效率为0.55。接收端的有效噪声温度 $T_e=15\text{K}$。如果要求SNR/bit（$\mathscr{E}_b/N_0$）为6dB，求该通信链路能够支持的数据速率。

上机习题

14.1 两径瑞利衰落信道仿真

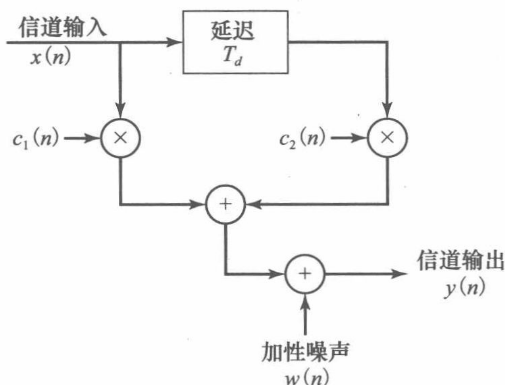
上机习题14.1图给出了一个两径信道模型，其两径间时延为 T_d。抽头权重 $c_1[n]$ 和 $c_2[n]$ 是统计独立零均值的复数高斯随机变量。因此，信道是瑞利衰落信道。加性噪声是零均值复数高斯白噪声序列 $w[n]=w_r[n]+\mathrm{j}w_i[n]$，其中实分量和虚分量是统计独立的。根据以下条件使用MATLAB仿真信道模型。

1. 抽头权重序列 $c_1[n]$ 和 $c_2[n]$ 是两个相同低通滤波器的输出，且由以下差分方程描述
$$c_k[n]=0.9c_k[n-1]+z_k[n],\ k=1,2$$
其中 $z_k[n]=z_{kr}[n]+\mathrm{j}z_{ki}[n]$，且 $z_k[n]$ 的实部和虚部是统计独立零均值单位方差的高斯白噪声序列。
2. 加性高斯白噪声序列，均值为零，方差为 σ_w^2。
3. 时延 T_d 是一个正整数，并且是可变的。

仿真一个适用于两径电离层传播信道的信道模型，且两个接收信号路径间的相对时延为1ms，传输信号带宽 $W=10\text{kHz}$。注意10kHz信号提供 $1/W=0.1\text{ms}$ 的时间分辨率，因此时延 $T_d=10$ 中的信号样值对应1ms时延。

生成并分别画出 $1\leqslant n\leqslant 1000$ 下的 $\{c_1[n]\}$ 和 $\{c_2[n]\}$ 曲线。对于每个 $\sigma_w^2=0,0.5,1$，计算并画出在 $1\leqslant n\leqslant 1000$ 下输入序列为 $x[n]=1$ 的信道输出 $\{y[n]\}$ 曲线。

当信号带宽降低到5kHz时，重做这个仿真。



上机习题14.1图

14.2 瑞利衰落信道对极信号仿真

实现蒙特卡洛仿真，估计并画出二进制对极信号在非频率选择性瑞利衰落下的通信系统误码率曲线。仿真式(14.3.7)给出的检测器输入信号，其中加性噪声是零均值单位方差的高斯分布，α 服从瑞利分布且 σ^2 为单位1。在仿真中变化平均 $\text{SNR}\bar{\rho}_b$，画出误码率估计值，其理论值如式(14.3.10)所示。选择仿真中的样值数为 $N=10\,000$。

14.3 双重分集瑞利衰落信道中正交信号仿真

在非频率选择性瑞利衰落AWGN信道中传输信息的数字通信系统，采用双重分集在两个载波频率上传输信息比特，且两个载波频率间的间隔超过信道相干带宽。所以，两个信号衰落独立。在每个载波频率上传输的信号是相互正交的。因此，当传输信息比特为1时，正交信号的相关器输出为

$$r_{11}=\alpha_1\sqrt{\mathscr{E}_b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}+n_{11}$$
$$r_{12}=n_{12}$$

并且

$$r_{21}=\alpha_2\sqrt{\mathscr{E}_b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}+n_{21}$$
$$r_{22}=n_{22}$$

其中 α_1 和 α_2 是统计独立的瑞利分布随机变量，$\{n_{ij},\ i=1,2,\ j=1,2\}$ 是相互统计独立复值高斯随机变量，且具有零均值和单位方差。相关器将两个信号的平方相结合，即

$$R_1=|r_{11}|^2+|r_{21}|^2$$
$$R_2=|r_{12}|^2+|r_{22}|^2$$

将 R_1 和 R_2 发送到检测器，检测器判决选择对应 (R_1,R_2) 中的较大值的比特。进行蒙特卡洛仿真估计并画出双重分集系统中差错概率与以dB为单位的SNR/bit的关系曲线。仿真样本数为 $N=100\,000$。为了对比，同时画出大SNR值下式(14.3.23)误码率的理论值，$\bar{\rho}_b\geqslant 15\text{dB}$。注意 $\bar{\rho}_b=D\bar{\rho}$，其中 D 是分集阶数。

14.4 瑞利分布随机变量仿真

当瑞利分布参数取值为 $\sigma^2=1,5,10$ 时，分别重做例14.2.3。

14.5 两径信道中的RAKE解调器

进行蒙特卡洛仿真，估计并画出二进制对极信号通信系统的误码率曲线，信道特性为两个可解析瑞利衰落信号路径。因此，对于慢衰落信道，间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 中接收信号为

$$r(t)=\pm c_1 s(t)\pm c_2 s(t-1/W)+n(t)$$

其中 c_1 和 c_2 是统计无关的零均值、单位方差的复数高斯随机变量，$n(t)$ 是复数AWGN过

程。接收信号 r(t)在 RAKE 解调器中与 $s(t)$和 $s(t-1/W)$进行互相关计算。相关器的输出可以表示为

$$r_1 = c_1 \sqrt{\mathscr{E}_b}\cos m\pi + n_1, \quad m = 0,1,$$

$$r_2 = c_2 \sqrt{\mathscr{E}_b}\cos m\pi + n_2, \quad m = 0,1$$

其中噪声序列 n_1 和 n_2 是统计无关零均值、单位方差的复值高斯随机变量。假设接收端能完美估计 c_1 和 c_2，其检测器输入的判决变量为

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{Re}[c_1^* r_1 + c_2^* r_2] \\ &= \pm \sqrt{\mathscr{E}_b}[|c_1|^2 + |c_2|^2]\cos m\pi \\ &\quad + \mathrm{Re}[c_1^* n_1 + c_2^* n_2] \\ &= (\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)\sqrt{\mathscr{E}_b}\cos m\pi + n, \quad m = 0,1 \end{aligned}$$

因此，通过在检测器输入端生成判决变量 R，可以实现蒙特卡洛仿真，其中 α_1 和 α_2 是两个统计独立同分布的瑞利随机变量，n 是零均值单位方差的实数高斯随机变量。注意在每个符号传输中独立选择$\{c_i\}$。比较从蒙特卡洛仿真中得到的误码率估计值与式(14.3.32)所给出的理论值结果。对 $N=100\ 000$ 个样本进行仿真。

14.6　MIMO 系统信道矩阵的生成

编写 MATLAB 代码，生成 MIMO 系统下的信道矩阵 $\boldsymbol{C}$，该系统采用 N_T 个发射天线和 N_R 个接收天线，其中信道是非选择频率性慢衰落的，$\boldsymbol{C}$ 中元素是零均值单位方差的复数高斯变量。

14.7　信道矩阵和检测器输入的生成

假设 $N_T=N_R=2$。为瑞利衰落 AWGN 信道生成信道矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素以及两个接收天线相应的检测器输入。

14.8　MIMO 检测器的实现

在 MATLAB 中实现 14.4.3 节描述的三种检测器。

14.9　$N_T=2$，$N_R=1$ 且采用 Alamouti 码的 MISO 系统仿真

实现蒙特卡洛仿真，估计多天线系统的误码速率性能。已知 $N_T=2$，$N_R=1$ 且采用 Alamouti STBC。根据式(14.4.25)生成检测器的输入，其中信号点选自 QPSK 星座图；c_{11} 和 c_{12} 是统计独立的零均值单位方差的复数高斯随机变量；η_1 和 η_2 也是统计独立的复数高斯随机变量，均值为零，方差为 σ^2。使用检测器计算式(14.4.26)中的估计值，并判断哪个符号欧氏距离更接近$\hat{s}_1$ 和$\hat{s}_2$。迭代次数 $N=10\ 000$，对于任意给定值 σ^2 进行上述计算。在每次迭代中独立选择信道系数(c_{11}，c_{12})，信号点(s_1，s_2)和加性噪声序列(η_1，η_2)。画出测量符号误码率与 $\mathrm{SNR}=10\log_1(\mathscr{E}_b/2\sigma^2)$的关系曲线，其中$\mathscr{E}_b=\mathscr{E}_s/2$ 是每比特的能量，且为了方便归一化为单位 1。

14.10　MIMO 系统仿真

假设在上机问题 14.9 的系统中加入第二个接收天线，并采用 Alamouti 码。第二个天线的接收信号信道系数是 c_{21} 和 c_{22}。仿真并画出(N_T，N_R)=(2，2)的 MIMO 系统在瑞利衰落 AWGN 信道下误码率与 SNR/bit 的关系曲线。说明该 MIMO 系统可以实现 $N_T N_R=4$ 阶的分集。

14.11　时空网格码仿真

编写 MATLAB 代码实现如图 14-23 所示的 4PSK，4-状态网格码编码器。

820～824

第15章

扩频通信系统

在加性高斯白噪声信道上设计数字通信信号时，最主要的目的是有效利用发送功率和信道带宽。正如第13章中所介绍的，信道编码是通过编码冗余增大发送信号带宽来降低发送功率的，这样就可以在发送功率和信道带宽间进行折中。具体来说，记R为发射机输入端的信息速率，W表示信道带宽。定义比值W/R为信道编码发送信号的带宽扩展因子，记为B_e。因子B_e表示通过信道编码引入的冗余量的大小。因此，通过增大B_e，可以降低发送信号的功率，达到要求的性能水平。大部分实际通信系统中，B_e的范围为$2\leqslant B_e\leqslant 5$。这是加性高斯白噪声信道中数字通信系统设计的基本方法。

实际上，有效数字通信系统设计的影响因素还有很多。例如，在多址通信中，当两个或者多个发射机共用相同的信道传输信息时，信道使用者间产生的干扰会限制系统所能达到的性能。设计一个有效的数字通信系统，必须考虑这种干扰。

即使在这个复杂的设计问题中，基本的系统参数仍然是发送功率和信道带宽。为了克服干扰导致的系统性能下降，可以进一步增大发送信号的带宽，使带宽扩展因子$B_e=W/R$大于单位1。这是扩频信号的一个特征。扩频信号的另一个重要特征是通过与信息序列不相关的一个码字，对调制器上的信息信号进行带宽扩展。这种码具有伪随机特性，即对于除目的接收机以外的接收机表现出随机性，这其中运用了用码字解调信号的知识。这也是扩频通信系统区别于传统通信系统的利用信道编码冗余的方式(参见第13章)来扩展发送信号带宽的不同特征。但是，在设计一个有效的扩频通信系统时，信道编码仍是一个重要因素。

825

数字通信中的扩频信号最初是为军事通信而开发的，用于抵抗扰码(抗扰保护)，或者通过低功率发送信号来隐藏信号，使得非目标监听者很难从噪声中检测到发送信号(降低窃听可能性)。但现在扩频信号也为很多商业所用，包括数字蜂窝通信，无绳电话，局间无线通信。

本章将介绍扩频信号的基本特征，并对其错误概率性能进行评估。主要讨论扩展信号带宽的两种方法，即直接序列调制和跳频。这两种方法都需要使用伪随机码序列，其产生方法也将得到介绍。另外还将列举扩频信号的几种应用。

15.1 扩频数字通信系统模型

如图15-1所示为一个扩频数字通信系统的基本组成单元。其中信道编码器、信道解码器、调制器和解调器是传统数字通信系统的基本构成单元。在扩频通信系统中除了这些单元外，还应用了两个相同的伪随机序列发生器，一个与发送端的调制器相连接，另一个与接收端的解调器相连接。这两个序列发生器产生的伪随机(PN)二值序列，在调制端用于扩展发送信号，在解调端用于解扩该扩频信号。



图15-1 扩频数字通信系统模型

为了正确解扩接收到的扩频信号，要求接收机产生的 PN 序列与接收信号中所含的 PN 序列同步。在实际通信系统中，在传输信息之前就要实现同步。可以通过发送一个固定的伪随机图样来获得同步，伪随机图样的设计要便于接收端在干扰存在的情况下以较高的概率检测到该图样。当两端的伪随机序列发生器的时间同步建立之后，可以开始信息传输。在数据模式中，通信系统通常会跟踪即将到来的接收信号的定时来保持伪随机序列发生器的同步。

826

干扰是扩频信号在信道中传输时引入的。干扰的特点在很大程度上取决于它的来源。根据干扰的带宽与承载信息的信号带宽的大小关系，通常可以将干扰分为宽带干扰和窄带(限带)干扰两类，还可以分为时间连续干扰和时间离散干扰。例如，在承载信息的信号所占的带宽内，干扰信号可能会包含一个高功率的正弦波信号，这样的干扰信号就是一个窄带干扰信号。另一个例子是，多址信道中其他用户产生的干扰取决于用户在传输信息时所使用的扩频信号的类型。如果所有的用户都使用宽带扩频信号，那么产生的干扰可能是相同的宽带干扰。如果用户都使用跳频来产生扩频信号，那么来自其他用户的干扰可能是窄带干扰。

本章讨论的重点是存在宽带和窄带干扰时数字通信扩频信号的性能。同时也考虑了两种数字调制方式，即相移键控(PSK)和频移键控(FSK)。当发送信号和接收信号可以在几个符号(比特)时间间隔内保持相位相干，采用 PSK 调制方式更合适。当通信信道的传输特性随时间变化导致载波相干性不能保持时，采用 FSK 调制更合适。例如，两个高速飞机之间或者是一个高速飞机与一个地面终端间的通信链路。

调制器端产生的 PN 序列与 PSK 调制方式结合，可以改变 PSK 信号的相位，使其按照 PN 序列的规律变化，PN 序列的码率是信息速率的整数倍。产生的调制信号即为*直接序列(DS)扩频信号*。当 PN 序列与二进制或者 M 进制 FSK 调制方式结合时，可以选择发送信号的频率使其按照 PN 序列变化。产生的信号即为*跳频(FH)扩频信号*。尽管还能得到其他类型的扩频信号，但是本章重点讨论在实际中经常应用的 DS 和 FH 扩频通信系统。

15.2　直接序列扩频系统

考虑二进制信息序列以二进制 PSK 方式传输。信息率为 R 比特每秒，比特间隔 $T_b=1/R$ 秒。可利用的信道带宽为 B_c Hz，其中 $B_c \gg R$。在调制器端，通过改变载波的相位使其按照 PN 序列发生器的图案改变，每秒变化 W 次，可以将信息信号的带宽扩展到 $W=B_c$ Hz。实现扩频最基本的方法如图 15-2 所示。

将承载信息的基带信号记为 $v(t)$，其表达式为

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT_b) \tag{15.2.1}$$

827

其中$\{a_n=\pm 1,\ -\infty<n<\infty\}$，$g_T(t)$是脉宽为 T_b 的矩形脉冲。基带信号再乘以 PN 序列发生器产生的信号，其表达式为

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n p(t-nT_c) \tag{15.2.2}$$

其中$\{c_n\}$表示取值为± 1 的二值 PN 码序列，$p(t)$是脉宽为 T_c 的矩形脉冲函数，如图 15-2 所示。两者相乘将承载信息的信号带宽(带宽近似为 RHz)扩展的更宽，等于 PN 序列发生器产生的信号 $c(t)$(带宽近似为 $1/T_c$)占用的带宽。频谱扩展过程如图 15-3 所示，用简单的矩形谱来表示两个频谱的卷积过程，窄频谱与承载信息的信号相对应，宽频谱与 PN 序列发生器产生的信号相对应。

用乘积信号 $v(t)c(t)$的幅度调制载波 $A_c\cos 2\pi f_c t$，生成双边带抑制载波(DSB-SC)信号

$$u(t)=A_c v(t)c(t)\cos 2\pi f_c t \tag{15.2.3}$$

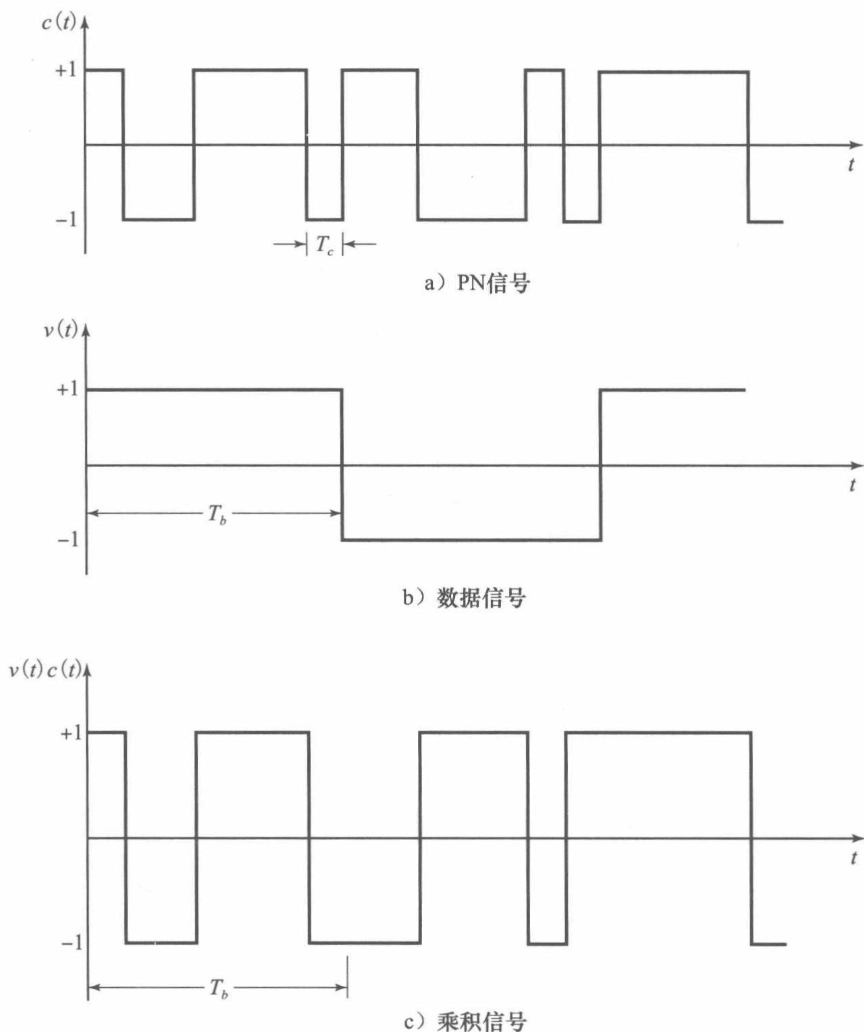


图 15-2　DS 扩频信号的生成

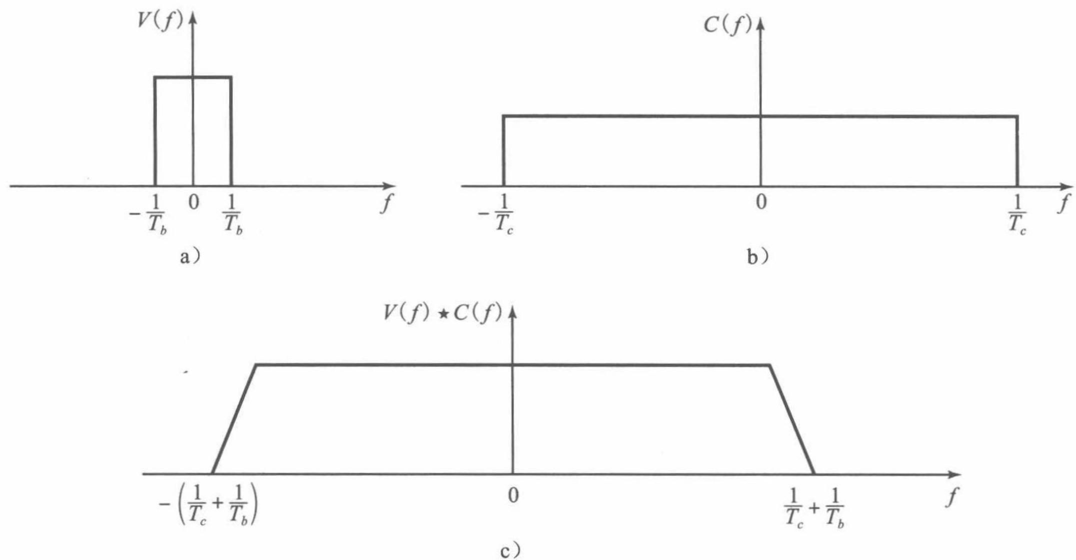


图 15-3　a)数据信号和 b)PN 码信号的频谱卷积

对任意的 t，$v(t)c(t)=\pm 1$，因此载波调制发送信号也可以表达为

$$u(t)=A_c\cos[2\pi f_c t+\theta(t)] \tag{15.2.4}$$

828 ~ 829

当 $v(t)c(t)=1$ 时，$\theta(t)=0$；当 $v(t)c(t)=-1$ 时，$\theta(t)=\pi$。因此，发送信号是一个二进制 PSK 信号。

通常将矩形脉冲 $p(t)$ 称为**码片**，其持续时间 T_c 叫做**码片间隔**。持续时间的倒数 $1/T_c$ 叫做**码片速率**，它与发送信号的带宽 W(近似)对应。在实际扩频通信系统中，选择码片间隔 T_c，使其与比特间隔 T_b 的比值为一个整数。定义他们的比值为

$$L_c=\frac{T_b}{T_c} \tag{15.2.5}$$

因此，L_c 是每信息比特包含的 PN 码序列的码片数。L_c 的另一种含义是在比特间隔 T_b 内，发送信号发生 180°相变的最大可能次数。

信号的解调过程如图 15-4 所示，接收信号首先要和波形 $c(t)$ 的复制信号相乘，该复制信号是由接收端的 PN 码序列发生器产生的，并且与接收信号中的 PN 码同步。在接收端接收信号乘以载波 $c(t)$ 的效果等同于在发送端没有进行扩频操作，所以这一过程叫做(频谱)解扩。由此可得

$$A_c v(t)c^2(t)\cos 2\pi f_c t=A_c v(t)\cos 2\pi f_c t \tag{15.2.6}$$

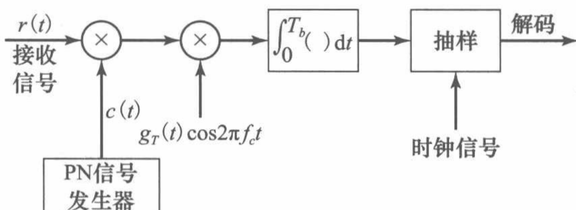


图 15-4　DS 扩频信号解调

对任意的 t，$c^2(t)=1$。得到的信号 $A_c v(t)\cos 2\pi f_c t$ 所占的带宽(近似)为 RHz，即承载信息的信号带宽。因此，解扩信号的解调器就是第 8 章中介绍的传统的互相关器或者匹配滤波器。由于解调器与解扩信号有相同的带宽，所以只有落在接收信号带宽之内的加性噪声才对解调器端的信号造成干扰。

15.2.1　解扩对窄带干扰的影响

考察干扰信号对解调承载信息信号的影响是很有意义的。假设接收信号为

$$r(t)=A_c v(t)c(t)\cos 2\pi f_c t+i(t) \tag{15.2.7}$$

830

其中，$i(t)$ 表示干扰。在接收端经过解扩后得到

$$r(t)c(t)=A_c v(t)\cos 2\pi f_c t+i(t)c(t) \tag{15.2.8}$$

干扰 $i(t)$ 与 $c(t)$ 相乘的效果是将 $i(t)$ 的带宽扩展到 WHz。

例如，考虑一个正弦波干扰信号

$$i(t)=A_I\cos 2\pi f_I t \tag{15.2.9}$$

其中，f_I 是发送信号带宽内的频率。干扰信号与 $c(t)$ 相乘，使得干扰信号的带宽被展宽，功率谱密度变成 $I_0=P_I/W$，其中 $P_I=A_I^2/2$ 是干扰信号的平均功率。由于所需信号在带宽为 R 的匹配滤波器(或者互相关器)得到解调，解调器输出端干扰信号的总功率为

$$I_0 R_b=P_I R/W=\frac{P_I}{W/R}=\frac{P_I}{T_b/T_c}=\frac{P_I}{L_c} \tag{15.2.10}$$

可见干扰信号功率的降低倍数等于带宽扩展因子 W/R。这个因子 $W/R=T_b/T_c=L_c$ 称为**扩频系统的处理增益**。在有干扰的信道中使用扩频信号传输数字信息的一个主要原因是干扰信号的功率会降低。

总之，在发送端需要利用 PN 码序列将携带信息的基带信号扩展成宽带信号，以便在信道上传输。在接收端，接收的信号与 PN 码的同步复本信号相乘，得到解扩的窄带信号，与此同时所有干扰信号的带宽被展宽。这一过程的效果是干扰信号的功率降低 W/R 倍，即扩频系统的处理增益。

假设仅目标接收机知道 PN 码序列$\{c_n\}$，其他不知道 PN 码序列信息的接收机不能解调信号。那么使用 PN 码序列可以保证一定程度的隐秘性(安全性)，这是传统调制方式无法实现的。这种安全性和抗干扰性能增益的主要代价是信道带宽和通信系统复杂性的增加。

15.2.2　检测器端的错误概率

为了推导出直接序列扩频系统的错误概率，假设信息通过二进制 PSK 方式传输。在比特间隔 $0\leqslant t\leqslant T_b$ 内，发送信号为

831

$$s(t)=a_0 g_T(t)c(t)\cos 2\pi f_c t,0\leqslant t\leqslant T_b \tag{15.2.11}$$

其中，$a_0=\pm 1$ 是信息符号，脉冲 $g_T(t)$定义为

$$g_T(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_b}{T_b}} & 0\leqslant t\leqslant T_b\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{15.2.12}$$

且 $c(t)$为 PN 序列发生器的输出，在一个比特间隔内，可以表达为

$$c(t)=\sum_{n=0}^{L_c-1}c_n p(t-nT_c) \tag{15.2.13}$$

其中 L_c 是每比特码片数，T_c 是码片间隔，$\{c_n\}$表示 PN 码序列。码片序列$\{c_n\}$是互不相关的(白色特性)，即

$$E[c_n c_m]=E[c_n]E[c_m],\quad n\neq m \tag{15.2.14}$$

每个码片等概率的取$+1$ 或者-1。根据这些条件可得 $E[c_n]=0$，$E[c_c^2]=1$。

假设接收信号中包含加性干扰信号 $i(t)$。那么

$$r(t)=a_0 g_T(t-t_d)c(t-t_d)\cos(2\pi f_c t+\varphi)+i(t) \tag{15.2.15}$$

其中 t_d 表示通过信道的传播时延，φ 表示载波相移。接收信号 $r(t)$是接收机端的理想带通滤波器的输出，因此干扰信号 $i(t)$也是一个带通信号，可以表达为

$$i(t)=i_c(t)\cos 2\pi f_c t-i_s(t)\sin 2\pi f_c t \tag{15.2.16}$$

其中 $i_c(t)$和 $i_s(t)$是两个正交分量。

为了方便起见，假设接收机与接收信号完全同步，可以设 $t_d=0$。再假设载波相位由锁相环(PLL)精确估计。那么，信号 $r(t)$先乘以 $c(t)$解扩，再解调，然后再与 $g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi)$进行互相关操作，如图 15-5 所示。在抽样时刻 $t=T_b$，相关器的输出为

$$y(T_b)=\mathscr{E}_b+y_i(T_b) \tag{15.2.17}$$

其中 $y_i(T_b)$表示干扰分量，其表达式为

$$y_i(T_b)=\int_0^{T_b}c(t)i(t)g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{L_c-1}c_n\int_0^{T_b}p(t-nT_c)i(t)g_T(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi)\mathrm{d}t$$

832

$$=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{T_b}}\sum_{n=0}^{L_c-1}c_n c_m \tag{15.2.18}$$

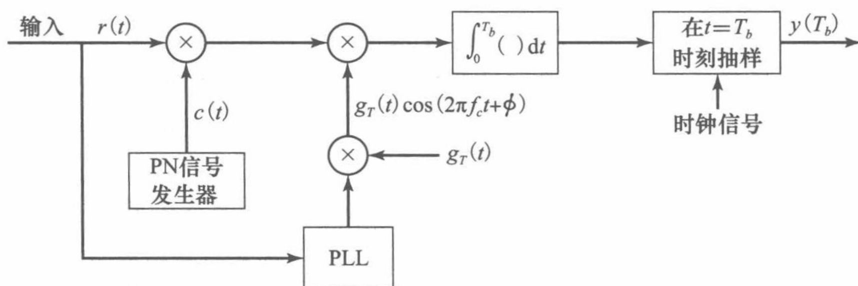


图 15-5　DS 扩频信号解调器

其中根据定义有

$$v_n = \int_{nT_c}^{(n+1)T_c} i(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi)\mathrm{d}t \tag{15.2.19}$$

错误概率的大小取决于干扰分量的统计特征。显然，干扰分量的平均值为

$$E[y_i(T_b)] = 0 \tag{15.2.20}$$

方差为

$$E[y_i^2(T_b)] = \frac{2\,\mathscr{E}_b}{T_b}\sum_{n=0}^{L_c-1}\sum_{m=0}^{L_c-1}E[c_n c_m]E[v_n v_m]$$

但是 $E[c_n c_m]=\delta_{mn}$。因此，

$$\begin{aligned} E[y_i^2(T_b)] &= \frac{2\,\mathscr{E}_b}{T_b}\sum_{n=0}^{L_c-1}E[v_n^2] \\ &= \frac{2\,\mathscr{E}_b}{T_b}L_c E[v^2] \end{aligned} \tag{15.2.21}$$

其中 $v=v_n$ 如式(15.2.19)给出。为了确定 v 的方差，必须确定干扰的形式。

首先，假设干扰信号是一个正弦波信号，假设干扰与载波同频，其表达式为

$$i(t) = \sqrt{2P_I}\cos(2\pi f_c t + \Theta_I) \tag{15.2.22}$$

833

其中 P_I 是平均功率，Θ_I 是干扰的相移，假设相移是随机的且在$(0,2\pi)$内均匀分布。用上式替换式(15.2.19)中的 $i(t)$，可得

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{nT_c}^{(n+1)T_c} \sqrt{2P_I}\cos(2\pi f_c t + \Theta_I)\cos(2\pi f_c t + \varphi)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2P_I}\int_{nT_c}^{(n+1)T_c}\cos(\Theta_I - \varphi)\mathrm{d}t = \frac{T_c}{2}\sqrt{2P_I}\cos(\Theta_I - \varphi) \end{aligned} \tag{15.2.23}$$

因为 Θ_I 是随机变量，所以 v_n 也是随机的。其均值为 0。即

$$E[v_n] = \frac{T_c}{2}\sqrt{2P_I}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\Theta_I - \varphi)\mathrm{d}\Theta_I = 0 \tag{15.2.24}$$

其均方值为

$$E[v_n^2] = \frac{T_c P_I}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\Theta_I - \varphi)\mathrm{d}\Theta_I = \frac{T_c^2 P_I}{4} \tag{15.2.25}$$

把 $E[v^2]$带入式(15.2.21)，可得

$$E[y_i^2(T_b)] = \frac{\mathscr{E}_b P_I T_c}{2} \tag{15.2.26}$$

$\{E[y(T_b)]\}^2$ 与 $E[y_i^2(T_b)]$的比值即为检测器端的信噪比(SNR)。在这种情况下，有

$$(\mathrm{SNR})_D = \frac{\mathscr{E}_b^2}{\mathscr{E}_b P_I T_c/2} = \frac{2\,\mathscr{E}_b}{P_I T_c} \tag{15.2.27}$$

为了看到扩频信号的效果，将发送信号的能量$\mathscr{E}_b$ 表达为

$$\mathscr{E}_b = P_S T_b \tag{15.2.28}$$

其中 P_S 是平均信号功率。用上式代替式(15.2.27)中的$\mathscr{E}_b$，可得

$$(\mathrm{SNR})_D = \frac{2P_S T_b}{P_I T_c} = \frac{2P_S}{P_I/L_c} \tag{15.2.29}$$

其中，$L_c=T_b/T_c$ 是传输增益。因此，扩频信号将干扰信号的功率降低了 L_c 倍。

如果将式(15.2.29)中的 $P_I T_c$ 表达为功率谱密度的形式，扩频信号对正弦干扰的效果还可以有另一种解释。因为 $T_c \approx 1/W$，有

$$P_I T_c = P_I/W \equiv I_0 \tag{15.2.30}$$

834

其中 I_0 是带宽为 W 的等效干扰的功率谱密度。实际上，扩频信号将正弦干扰的频谱扩展到大于 W，生成了一个在频谱上等效的平坦噪声，其功率谱密度为 I_0。因此

$$(\mathrm{SNR})_D = \frac{2\mathscr{E}_b}{I_0} \tag{15.2.31}$$

如果假设样本 $y_i(T_b)$的概率分布，那么采用二进制 PSK 调制方式的直接序列扩频系统的错误概率很容易从检测器端的 SNR 值得到。根据式(15.2.18)，注意到 $y_i(T_b)$由 L_c 个不相关随机变量$\{c_n v_n, 0 \leqslant n \leqslant L_c - 1\}$之和构成，这些变量都是同分布的。在所有的实际系统中，处理增益 L_c 通常会很大，可以用中心极限定理来证明 $y_i(T_b)$符合高斯概率分布。在这个假设下，正弦干扰的错误概率为

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_b}{I_0}}\right) \tag{15.2.32}$$

I_0 为等效宽带干扰的功率谱密度。当在扩频信号带宽 W 内的干扰 $i(t)$是均值为 0 的宽带随机过程而且其功率谱密度为一个常数时，那么可以得到一个与上式相似的错误概率表达式。

例 15.2.1 在 DS 扩频通信系统中，要达到可靠通信检测器端的 SNR 值至少为 13dB。如果接收端干扰信号和扩频信号的功率比为 20dB，试求达到可靠通信所需的处理增益。

解： 给定$(P_I/P_S)_{\mathrm{dB}} = 20\mathrm{dB}$，即 $P_I/P_S = 100$。还给定$(\mathrm{SNR})_D = 13\mathrm{dB}$，即$(\mathrm{SNR})_D = 20$。根据式(15.2.29)可以得到 L_c。因此

$$L_c = \frac{1}{2}\left(\frac{P_I}{P_S}\right)(\mathrm{SNR})_D = 1000$$

因此，要求处理增益为 1000，或者是 30dB。 ◀

干扰余量。 将式(15.2.32)中 Q 函数中的$\mathscr{E}_b/I_0$ 表示为

$$\frac{\mathscr{E}_b}{I_0} = \frac{P_S T_b}{P_I/W} = \frac{P_S/R}{P_I/W} = \frac{W/R}{P_I/P_S} \tag{15.2.33}$$

假设为了达到一定的性能水平，设定$\mathscr{E}_b/I_0$ 的值。那么用对数形式表达式(15.2.33)为

$$10\log\frac{P_I}{P_S} = 10\log\frac{W}{R} - 10\log\left(\frac{\mathscr{E}_b}{I_0}\right)$$

835

$$\left(\frac{P_I}{P_S}\right)_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{W}{R}\right)_{\mathrm{dB}} - \left(\frac{\mathscr{E}_b}{I_0}\right)_{\mathrm{dB}} \tag{15.2.34}$$

比值$(P_I/P_S)_{\mathrm{dB}}$称为干扰余量。这是在不中断通信系统中干扰具有的相对功率优势。

例 15.2.2 假设为了达到可靠通信，要求$(\mathscr{E}_b/I_0)\mathrm{dB} = 10\mathrm{dB}$。若干扰余量为 20dB，那么所需的处理增益应为多少？

解： 显然，如果 $W/R = 1000$，即 $W/R = 30\mathrm{dB}$，干扰余量$(P_I/P_S)_{\mathrm{dB}} = 20\mathrm{dB}$。这就意味着当接收端平均干扰功率是所需信号功率 P_S 的 100 倍时，仍能实现可靠通信。 ◀

15.2.3 编码扩频信号的性能

如第 13 章中所介绍，当传输信息经过二进制线性(分组或者卷积)码编码后，编码增益会导致软判决解码器输出端的 SNR 值增大，编码增益定义为

$$\text{编码增益} = R_c d_{\min}^H \tag{15.2.35}$$

R_c 是码率，$d_{\min}^H$是码的最小汉明距离。因此，编码的效果是通过编码增益增加干扰余量。式(15.2.34)可以改为

$$\left(\frac{P_I}{P_S}\right)_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{W}{R}\right)_{\mathrm{dB}} + (CG)_{\mathrm{dB}} - \left(\frac{\mathscr{E}_b}{I_0}\right)_{\mathrm{dB}} \tag{15.2.36}$$

$(CG)_{\mathrm{dB}}$记为 dB 形式的编码增益。

15.3 直接序列扩频信号的应用

在这一节中，将简要地介绍直接序列(DS)扩频信号的四个应用。首先，在第 1 种应用

中发射信号功率很低，监听者很难检测到信号存在。第2种应用是指在多址接入无线通信中的应用。第3种应用中利用直接序列扩频信号解决时间弥散无线信道的多径问题。第4种是DS扩频信号在无线局域网中的应用。

15.3.1　低可探测信号传输

在这个应用中，承载信息的信号以很低的功率传输，此功率相对于接收端产生的背景信道噪声和热噪声来说非常低。若DS扩频信号占用的带宽为W，加性噪声的功率谱密度为N_0W/Hz，带宽W内的噪声平均功率为$P_N=WN_0$。

836

目标接收机的接收信号平均功率为P_R。如果想要对目标接收机附近的接收机隐藏信号，信号应以$P_R/P_N\ll 1$的功率值传输。目标接收机可以利用处理增益和编码增益从背景噪声中恢复信息信号。而其他接收机由于预先不知道PN码序列，就不能利用处理增益和编码增益。这样就很难检测到信息信号。称这样的发送信号具有低截获率(LPI)，这样的信号称为LPI信号。

在15.2.2节中介绍的错误率也适用于目标接收机LPI信号的解调和解码。

例15.3.1　设计某一DS扩频信号，其在目标接收机的功率比P_R/P_N为10^{-2}。如果$\mathcal{E}_b/N_0=10$为可接受的性能，试确定处理增益的最小值。

解：将$\mathcal{E}_b/N_0$写为

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}=\frac{P_R T_b}{N_0}=\frac{P_R L_c T_c}{N_0}=\left(\frac{P_R}{WN_0}\right)L_c=\left(\frac{P_R}{P_N}\right)L_c$$

由于$\mathcal{E}_b/N_0=10$，$P_R/P_N=10^{-2}$，因此所需的处理增益为$L_c=1000$。◀

15.3.2　码分多址接入

通过处理增益和编码增益可以提高DS扩频信号的性能，如果每个信号都有自己的伪随机(特征)序列，则多个直接序列扩频信号可以共享同一信道带宽。因此，多个用户可以在同一信道带宽内同时传输信息。每个发送-接收用户对具有各自明显的特征码，能够在同一信道带宽内传输，这种类型的数字通信称为*码分多址接入*(CDMA)。

在每个DS扩频信号的解调过程中，来自相同信道中的其他用户信号表现为加性干扰。干扰的强弱随着特定时间内信道中用户数的变化而变化。CDMA的一个主要优势是：如果每个用户仅在短时间内传输信息，则可以容纳大量的用户。在这样的多址系统中，无需重新配置系统就可以相对容易地增加或者减少用户数。

下面定义CDMA系统可以同时容纳的信号数。为简单起见，假设所有的信号有相同的平均功率。在许多实际系统中，中心站点监测每一用户接收信号的功率值，通过一个控制信道对所有的同步用户进行功率控制，指导用户要增大或减小他们的功率值。在这种功率控制下，如果有N_u个同时通信的用户，那么接收机的信号与干扰噪声功率比为

837

$$\frac{P_S}{P_N}=\frac{P_S}{(N_u-1)P_S}=\frac{1}{N_u-1}\tag{15.3.1}$$

根据以上关系式，定义系统可以同时容纳的用户数。例15.3.2给出了计算示例。

例15.3.2　在CDMA系统中，要达到错误率10^{-6}的用户性能，要求$\mathcal{E}_b/I_0=20$(13dB)。如果带宽比特率之比为1000，编码增益为$R_c d_{\min}^H=4$(6dB)，试确定CDMA系统可以同时容纳的最大用户数。

解：从式(15.2.36)和式(15.3.1)中的关系可得

$$\frac{\mathcal{E}_b}{I_0}=\frac{W/R}{N_u-1}R_c d_{\min}^H=20$$

解得N_u为

$$N_u=\frac{W/R}{20}R_c d_{\min}^H+1$$

由于$W/R=1000$，$R_c d_{\min}^H=4$，得到结果$N_u=201$。◀

在确定信道可以同时容纳的最大用户数时，隐含地假设了不同用户使用的伪随机码序列是不相关的，而且来自其他用户的干扰只是增加基本功率。然而，N_u 个用户使用的伪随机序列的正交性一般是很难满足的，特别是当 N_u 很大时。实际上，设计一个大的具有优良相关特性的伪随机序列组合是一个很重要的问题，在技术文献中得到了广泛关注。在15.4节中将简要的讨论这个问题。

CDMA是为移动用户提供数字蜂窝电话服务的一个可行方案。15.7.2节将描述采用CDMA的北美数字蜂窝系统的基本特征。

15.3.3 多路径信道通信

第14章描述了多径衰落信道的特征，设计了能在这样的信道中进行有效通信的信号。多径衰落信道的一个例子是在HF频带内(3～30Hz)电离层的传输，其中电离层充当信号反射器。另一个例子是在移动无线通信系统中，多径传播是由收发两端之间存在的建筑物、树木和其他障碍物的反射造成的。

14章中讨论的信号设计主要集中在频率选择性信道上，信号带宽 W 大于信道相干带宽 B_{cb}。如果 $W > B_{cb}$，那么考虑信号设计的两种方式。一种方式是使用正交频分复用(OFDM)，将可用带宽 W 分成 N 个子信道，每个信道带宽 $\frac{W}{N} < B_{cb}$。这种方式每个子信道采用的都是非频率选择性的，每个子信道中的信号满足信号间隔 $T \gg T_m$，其中 T_m 是信道的多径传播。这样可以避免符号间干扰。另一种方式是设计一个信号利用全部信号带宽并且用单载波进行传输。在这种情况下，信道是频率选择性的，具有差分延迟$\left(\frac{1}{W}\text{或者更大}\right)$的多径分量是可分辨的。

838

DS扩频生成的宽带信号用来分解多径信号分量特别有效。通过分离多径信号，可以降低衰落影响。假如在视距通信系统中，含有一个直接路径和一个由于信号被建筑物或者是周围的地形反射造成的二次传播路径，接收端解调器与直接信号分量同步，则可忽略多径分量的存在。在这种情况下，多径分量成为对子序列发送信号解调的一种干扰[符号间干扰(ISI)]。

如果降低符号速率 $\frac{1}{T}$ 使 $T \gg T_m$，则可以消除ISI。在这种情况下，采用带宽为 W 的DS扩频信号可以解决多径问题。这样信道是频率选择性的，合适的信道模型是带时间变化系数的抽头延迟线模型，如图14-6所示。这种信道的最佳解调器是与抽头延迟线模型匹配的滤波器，称为RAKE解调器，如14.3.3节所述。

15.3.4 无线局域网

扩频信号已用于IEEE的无线LAN标准802.11和802.11b中，工作在2.4GHz ISM(工业、科学、医疗)未分配频段。可用带宽被分为14个22MHz信道，各个国家并没有用尽所有信道。在美国，只利用了信道1和信道11。

在802.11标准中，11码片的Barker序列以码片速率11MHz进行调制和传输。码片间隔为0.909μs。11码片的Barker序列是{1，−1，1，1，−1，1，1，1，−1，−1，−1}。下节将介绍的，这一序列自相关的旁瓣值小于或者等于1，与自相关峰值11相比非常小，因此是理想的。可以采用BPSK或者QPSK对Barker序列进行调制。采用BPSK调制时，每比特11码片，数据率达到1Mbps。当使用QPSK调制时，每符号(2比特)11码片，数据率达到2Mbps。

DS扩频也可以用于高速(第二代)802.11b无线LAN标准中，仍然工作在2.4GHz ISM频段。在802.11b中，可以保持11MHz的码片速率，但是Barker序列被8个码片的

波形序列所替代，称为补码键控(CCK)，可以视为多个扩频序列的直接序列扩频调制。使用 CCK 调制，数据率为 11Mbps。 839

15.4 PN 序列的生成

伪随机序列是由 1 和 0 构成的码序列，其自相关函数与白噪声有相同的性质。本节简要描述 PN 序列的结构、自相关性和互相关性。

最常见的二进制 PN 码序列是最大长度移位寄存器序列。最大长度移位寄存器序列或者简称 m 序列，长度为 $L=2^m-1$ 位，由带有线性反馈的 m 状态移位寄存器生成。如图 15-6 所示。该序列是周期性的，周期为 L。每个周期包含 2^{m-1} 个 1 和 $2^{m-1}-1$ 个 0。表 15-1 列出生成最大长度序列的移位寄存器的连接。

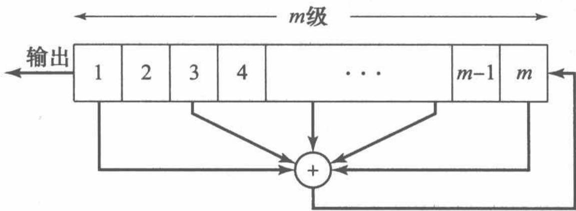


图 15-6　带有线性反馈的移位寄存器序列

表 15-1　生成最大长度序列的移位寄存器连接

m	连至模 2 加法器的寄存器	m	连至模 2 加法器的寄存器	m	连至模 2 加法器的寄存器
2	1，2	13	1，10，11，13	24	1，18，23，24
3	1，3	14	1，5，9，14	25	1，23
4	1，4	15	1，15	26	1，21，25，26
5	1，4	16	1，5，14，16	27	1，23，26，27
6	1，6	17	1，15	28	1，26
7	1，7	18	1，12	29	1，28
8	1，5，6，7	19	1，15，18，19	30	1，8，29，30
9	1，6	20	1，18	31	1，29
10	1，8	21	1，20	32	1，11，31，32
11	1，10	22	1，22	33	1，21
12	1，7，9，12	23	1，19	34	1，8，33，34

在 DS 扩频的应用中，将含有元素{0，1}的二进制序列映射为对应的二进制序列{−1，1}。将含元素{−1，1}的等价序列$\{c_n\}$称为*双极性序列*。 840

周期 PN 序列的一个重要特征是它的自相关函数，通常可以用双极性序列$\{c_n\}$表示为

$$R_c[m]=\sum_{n=1}^{L}c_nc_{n+m},\quad 0\leqslant m\leqslant L-1 \tag{15.4.1}$$

其中 L 是序列的周期。由于序列$\{c_n\}$是周期为 L 的周期序列，其自相关序列$\{R_c[m]\}$也是周期为 L 的周期序列。

理想情况下，PN 序列的自相关函数的卷积性质与白噪声相同。因为理想$\{c_n\}$的自相关序列为：$R_c[0]=L$ 和 $R_c[m]=0$(对于 $1\leqslant m\leqslant L-1$)。对于 m 序列，自相关序列为

$$R_c[m]=\begin{cases}L, & m=0\\ -1, & 1\leqslant m\leqslant L-1\end{cases} \tag{15.4.2}$$

对于长 m 序列，相对于峰值 $R_c[0]$，$R_c[m]$非峰值很小，即比值 $R_c[m]/R_c[0]=-1/L$ 很小，从实际的角度看，非峰值是无关紧要的。因此从自相关函数的角度看，m 序列非常接近于理想的 PN 序列。

在一些应用中，PN 序列的互相关函数与自相关性质是同等重要的。例如，CDMA 系

统为每个用户分配一个特定的 PN 序列。理想情况下，用户间的 PN 序列是不相关的，保证某一用户受到其他传输用户的干扰只是基本功率的增加。但是实际中，不同用户的 PN 序列会有一定相关性。

具体来说，考虑 m 序列的类型。一对具有相同周期的 m 序列间的周期互相关函数有相对较大的峰值。表 15-2 列出了 $3\leqslant m\leqslant 12$ 时，一对 m 序列间的互相关函数的峰值幅度 $R_{\max}$。也列出了 $3\leqslant m\leqslant 12$ 时，长度为 $L=2^m-1$ 的 m 序列的数量。由此表可以看出，长度为 L 的 m 序列的数量随着 m 的增大迅速增大。对于大多数的序列来说，互相关函数的峰值幅度 $R_{\max}$ 与自相关函数峰值之比是一个很大的百分比值。因此，m 序列不适合用于 CDMA 通信系统。尽管可以选择互相关函数峰值相对于 $R_{\max}$ 很低的一个 m 序列的小子集，但是这个子集中的序列数量非常少，不能用于 CDMA 通信。

表 15-2　m 序列互相关的峰值和 Gold 序列

		m 序列				
m	$L=2^m-1$	数量	互相关峰值 $R_{\max}$	$R_{\max}/R(0)$	Gold $R_{\max}$	序列 $R_{\min}/R$
3	7	2	5	0.71	5	0.71
4	15	2	9	0.60	9	0.60
5	31	6	11	0.35	9	0.29
6	63	6	23	0.36	17	0.27
7	127	18	41	0.32	17	0.13
8	255	16	95	0.37	33	0.13
9	511	48	113	0.22	33	0.06
10	1023	60	383	0.37	65	0.06
11	2047	176	287	0.14	65	0.03
12	4095	144	1407	0.34	129	0.03

Gold(1967，1968)和 Kasami(1966)提出了比 m 序列的周期互相关函数性能更好的 PN 序列的生成方法。构造 Gold 序列，要选定一对特定的 m 序列，称为*优选 m 序列*，一个序列对另一个序列进行 L 次循环移位，再计算两个序列的模 2 和。长度为 L 的 Gold 序列的生成如图 15-7 所示。当 m 为奇数时，对于任意一对 Gold 序列，其互相关函数的最大值为 $R_{\max}=\sqrt{2L}$。当 m 为偶数时，$R_{\max}=\sqrt{L}$。

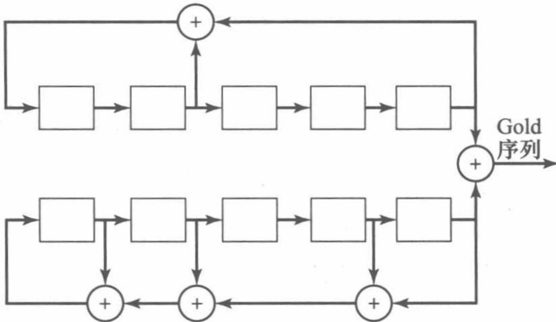


图 15-7　长度为 31 的 Gold 序列的生成

Kasami(1966)描述了一种通过抽取 m 序列构造 PN 序列的方法。在 Kasami 的构造方法中，m 序列中的 $2^{m/2}+1$ 位都是选择得到的。这种构造方法能产生一个比 Gold 序列更小的 PN 序列集，但是它们的最大互相关值为 $R_{\max}=\sqrt{L}$。

比较 Gold 序列和 Kasami 序列互相关函数的峰值大小是很有意义的，两个序列中任何一对长度为 L 的二进制序列的最大互相关都有一个下界。给定周期为 L 的 N 序列集合，其最大互相关的下界为

$$R_{\max}\geqslant L\sqrt{\frac{N-1}{NL-1}} \tag{15.4.3}$$

841 ~ 842

当 L 和 N 取值很大时，上式近似为 $R_{\max}\geqslant\sqrt{L}$。因此，Kasami 序列满足这个下界，是理想的。另一方面，当 m 为奇数时，Gold 序列 $R_{\max}=\sqrt{2L}$，因此是次优的。

15.5 跳频扩频

在跳频(FH)扩频中，可用信道带宽 W 被分成大量的互不重叠的频率时隙。在任何一个信号间隔内，发送信号占用一个或者多个可用频率时隙。每个信号间隔中频率时隙的选择随 PN 序列发生器的变化而变化。

FH 扩频系统发射端和接收端的方框图如图 15-8 所示。调制方式为二进制或者 M 进制 FSK(MFSK)。例如，如果使用二进制 FSK，对应传输 0 或 1，调制器选择两个频率如 f_0 或 f_1 中的一个。二进制 FSK 信号的频移量取决于 PN 序列发生器的输出序列，其作用为选择一个由频率合成器合成的频率 f_c。这个频率与 FSK 调制器的输出混合，再经过信道传输。例如，从 PN 序列发生器中取 m 位，那么可以指定 2^m-1 种可能的载波频率。图 15-9 列出了 FH 信号模式。

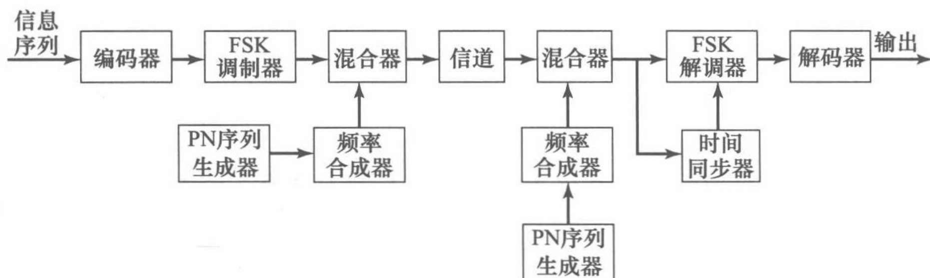


图 15-8 FH 扩频系统方框图

在接收端有一个与接收信号同步的并与发送端完全相同的 PN 序列发生器，用于控制频率合成器的输出。因此，接收端将接收信号与同步器输出相混合，可以消除发射机引入的伪随机频移。得到的信号再经过 FSK 解调器的解调。从接收信号中提取出 PN 序列发生器与 FH 接收信号的同步信号。

通常二进制 PSK 调制比二进制 FSK 调制的性能更好。但是，由于信号在较宽的带宽内从一个频率跳变到另一个频率，在跳频的频率合成时，以及在信道中发送信号时，很难维持相位相干。因此，在 FH 扩频系统中通常会采用 FSK 调制的非相干解调。

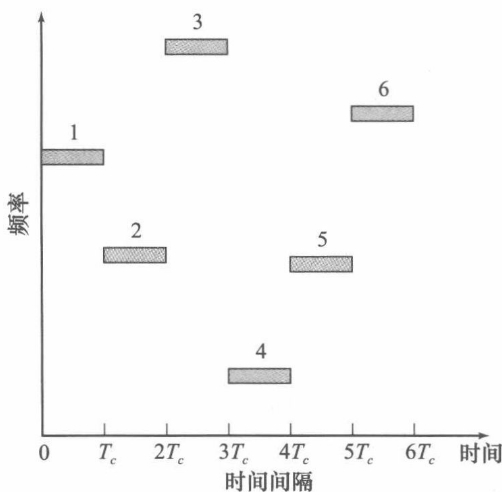


图 15-9 FH 模式的例子

频率跳变率记为 R_h，可能等于、小于或者高于符号率。如果 R_h 等于或者小于符号率，FH 系统称为慢跳频系统。如果 R_h 高于符号率，即每个符号有多次跳变，这样的 FH 系统称为快调频系统。然而，将一个信息符号分成几个跳频单元会导致不利因素，因为这些分开单元的能量会以非相干方式合并。

843

FH 跳频信号可以用于多用户共享同一信道的 CDMA 系统。由于 DS 扩频信号固有的严格同步需求，在某些情况下 FH 信号会更合适。特别是在 DS 系统中，必须在码片间隔 $T_c=1/W$ 的部分时间内建立定时和同步。而在 FH 系统中，码片间隔 T_c 是在带宽 $B\ll W$ 的特定的频率时隙内传输一个信号所花费的时间。其间隔近似为 $1/B$，远远大于 $1/W$。因此，FH 系统的时序需求不像 DS 系统那样严格。

下面在慢跳频系统下评估 FH 扩频系统的性能。

15.5.1 慢跳频系统和部分频段干扰

考虑慢跳频系统，跳变率为每比特 $R_h=1$ 跳。假设信道干扰是宽带干扰，与功率谱密度为 I_0 的 AWGN 具有相同的特征。在这种条件下，二进制 FSK 非相干解调的误检测率为

$$P_2 = \frac{1}{2}e^{-\rho_b/2} \tag{15.5.1}$$

844 其中，$\rho_b=\mathscr{E}_b/I_0$ 是每比特 SNR 值。

在 DS 扩频系统中，$\mathscr{E}_b$ 是每比特的能量，可以表达为 $\mathscr{E}_b=P_ST_b=P_S/R$，其中，$P_S$ 是平均发送功率，R 是比特率。类似地，$I_0=P_I/W$，P_I 是宽带干扰的平均功率，W 是可用信道带宽。因此，SNRρ_b 可以被表示为

$$\rho_b = \frac{\mathscr{E}_b}{I_0} = \frac{W/R}{P_I/P_S} \tag{15.5.2}$$

其中，W/R 是处理增益，P_I/P_S 是 FH 扩频系统的干扰余量。注意到 FH 扩频信号中的式(15.5.2)与 DS 扩频信号中的式(15.2.33)相同。因此，跳频与直接序列扩频基本上提供了相同的增益。

慢 FH 扩频系统很容易受部分频段干扰的影响，这在 FH CDMA 系统中很可能发生。特别地，假设部分频段干扰是一个均值为 0 的高斯随机过程，在整个带宽 W 内有平坦的功率谱密度，在频带的其他部分功率谱密度为 0。在功率谱密度不为 0 的区域内，其值为 $S_I(f)=I_0/\beta$，其中 $0<\beta\leqslant 1$。换句话说，就是假设干扰的平均功率 P_I 为常数。

考虑部分频段干扰最差的情况，也就是选择一个 β 值使得错误率最大。在一个使用二进制 FSK 调制方式和非相干检测的未编码的慢跳频系统中，选择在频带 W 内有均匀的概率发送频率。因此，干扰会以概率 β 破坏接收信号。当存在干扰时，错误概率为 $\frac{1}{2}e^{-\beta\rho_b/2}$，当不存在干扰时，假设信号的检测没有错误。那么平均错误概率为

$$P_b(\beta) = \frac{\beta}{2}e^{-\beta\rho_b/2} = \frac{\beta}{2}\exp\left(-\frac{\beta W/R}{2P_I/P_S}\right) \tag{15.5.3}$$

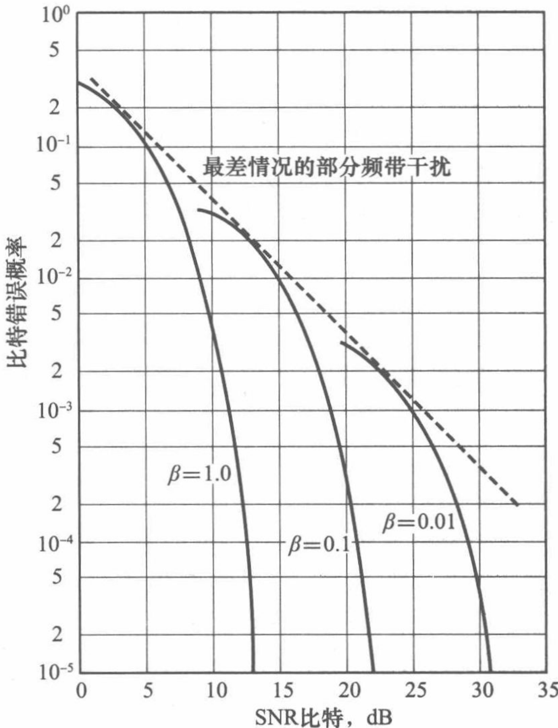


图 15-10 部分频带干扰下二进制 FSK 的性能

图 15-10 说明了当 β 取定几个值时，错误率是 ρ_b 的函数。通过对 $P_b(\beta)$ 求导，可以解得使 $P_b(\beta)$ 最大的 β 值。则有

$$\beta^* = \begin{cases} 2/\rho_b, & \rho_b \geqslant 2 \\ 1, & \rho_b < 2 \end{cases} \tag{15.5.4}$$

在最坏的部分频带干扰情况下，对应的错误概率为

$$P_b = \begin{cases} e^{-1}/\rho_b, & \rho_b \geqslant 2 \\ \frac{1}{2}e^{-\rho_b/2}, & \rho_b < 2 \end{cases} \tag{15.5.5}$$

图 15-10 也给出了对应的错误概率。尽管错误概率会随着全频带干扰以指数形式下降，如式(15.5.1)所示，但是最差部分频带干扰的错误概率只随着 $\mathscr{E}_b/I_0$ 增大而减小。这个结果与在瑞利衰落信道中使用二进制 FSK 调制方式的错误概率相同。 845

在 14 章中讨论的通过衰落信道进行有效、可靠通信的信号设计时，发现相对于未编

码的信号传输而言，通过将不同频率上的传输信息比特进行简单重复(或者是通过分组码、卷积码)而得到的多样性的传输，在性能上有很大的提升。不难发现相同的信号编码类型也会对部分频带干扰信道产生影响。事实上，Viterbi 和 Jacobs 已经证明了这一结论，通过在部分频带干扰存在的情况下优化码的设计，通信系统可以达到的平均误码率为

$$P_b = e^{-\rho_b/4} \tag{15.5.6}$$

因此在 AWGN 信道中，采用最优编码设计，达到的错误概率随着 SNR 值的增长而呈指数下降，性能增益为 3dB。从而使得对于部分频带干扰导致的破坏显著降低。 846

15.5.2 快调频

在快调频系统中，跳频速率 R_h 是码率的倍数。基本上，每个(M 元)符号间隔被分成 N 个子间隔，该子间隔称为*码片*，每个子间隔中传输 M 个频率中的一个。快跳频系统特别受到军事通信的青睐。在这种系统中，可以选择足够高的跳频速率，使潜在的蓄意干扰没有足够的时间检测到发送频率从而无法在带宽内形成一个干扰信号。

为了在接收端恢复原始信息，首先通过将接收信号和已跳频的载频进行混合来实现解跳。解跳过程去除跳频图案，并将每个子信道(码片)中的接收信号搬到包含 M 个可能发送频率的同一频带内。每个子间隔中的信号通过与 M 个发送频率相匹配的 M 个匹配滤波器(或相关器)，在每个子信道的终端进行抽样并送至检测器。FSK 信号的检测是非相干的。因此，要根据匹配滤波器(卷积器)的输出幅值进行判决。

由于每个符号通过 N 个码片进行传输，解码可以采用硬判决或者软判决实现。下面的例子说明了基于硬判决的解码。

例 15.5.1 假设用二进制 FSK 传输二进制符号，每个符号通过 N 个跳频进行传输，其中，N 为奇数。试判断在采用硬判决解码时 AWGN 信道的错误概率。

解： 每个跳频采用二进制 FSK 非相干检测的错误概率为

$$p = \frac{1}{2} e^{-\rho_b/2N} \tag{15.5.7}$$

其中

$$\frac{\rho_b}{N} = \frac{\mathscr{E}_b/N}{N_0} \tag{15.5.8}$$

是每个码片的 SNR 值，$\mathscr{E}_b$ 是总比特能量。解码器的判决准则是选择至少$(N+1)/2$ 个码片中对应大值的发送频率，根据 N 个码片判决结果投票进行大数判决。因此，一个比特的错误概率为

$$p_b = \sum_{m=(N+1)/2}^{N} \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m} \tag{15.5.9}$$

其中 p 由式(15.5.7)给出。N 个码片的硬判决解码的错误概率 p_b 比单跳(比特)FSK 系统的错误概率更大，式(15.5.1)给出了单跳的错误概率，其中假设这两个系统 SNR/bit ρ_b 相同(见习题 15.17)。◀

替代硬判决解码的是软判决解码，在软判决解码中，对 N 个码片相应的匹配滤波器输出幅值(或幅值平方)求和后，选择对应最大输出值的频率作为判决结果。例如，如果采用二进制正交 FSK 传输信息，N 个码片基于平方律求和的两个软判决矩阵为 847

$$DM_1 = \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\mathscr{E}_b}{N} + v_{1k} \right|^2$$

$$DM_2 = \sum_{k=1}^{N} |v_{2k}|^2 \tag{15.5.10}$$

其中$\{v_{1k}\}$和$\{v_{2k}\}$是第 k 个码片的两个匹配滤波器的噪声分量。假设发送频率为 f_1，当 $DM_2 > DM_1$ 时，会发生判决错误。对于加性高斯噪声而言，尽管错误概率推导过程繁琐，但是可以得到封闭形式的表达式为

$$P_b = \frac{1}{2^{2N-1}} e^{-\rho_b/2} \sum_{i=0}^{N-1} K_i \left(\frac{\rho_b}{2}\right)^i \tag{15.5.11}$$

其中集合$\{K_i\}$是常数，可以表示为

$$K_i = \frac{1}{i!}\sum_{r=0}^{N-1-i}\binom{2N-1}{r} \tag{15.5.12}$$

对于相同的$\mathscr{E}_b/N_0$，根据式(15.5.11)得到的软判决解码的错误概率比式(15.5.9)给出的硬判决解码的错误概率要小。性能上的差别就是硬判决解码的损耗。

存在部分频带干扰并且采用软判决解码时，对每一跳匹配滤波器的输出进行尺度变换(或者归一化)是很重要的，这样可以使任意一跳发送信号带宽内的强干扰，不会主导合成器的输出。在这种情况下，一个好方法就是对大于阈值的匹配滤波器输出进行归一化或者削波，而阈值设定为接近(或略大于)信号加噪声功率均值的取值。另外，也可以监测噪声的功率，根据噪声功率的倒数对每一跳中匹配滤波器输出进行尺度变换。这样可以实现匹配滤波器输出的噪声功率的归一化。因此，通过适当的尺度变换，信息或者比特被分布(扩展)到 N 个跳频中，快跳频系统不会受到部分频带干扰的影响。

15.5.3　跳频扩频的应用

为了抵抗 CDMA 中经常遇到的窄带和宽带干扰，可以使用 FH 扩频替代 DS 扩频。在基于跳频的 CDMA 系统中，给每个发送-接收对分配自己的伪随机跳频图案。除了这个不同的特点外，所有用户的发送和接收机都是相同的，有相同的编码器、解码器、调制器、解调器。

848

基于 FH 扩频信号的 CDMA 系统受到移动(陆地、空中、海洋)用户的特别关注，因为它对时序(同步)的需求不像 DS 扩频系统那么严格。另外，由于频率合成技术和相关硬件的发展，使得在相当大的带宽内实现跳频成为可能，这个带宽可以比现在 DS 扩频信号的带宽大一个或者多个数量级。因此，FH 可以带来更大的处理增益，并大大地抵消 FSK 信号非相干解调固有的性能损失。

FH 也可以有效地抵抗蓄意干扰。正如前面介绍的，FH M 进制 FSK 系统采用编码或者直接在多跳内重复信息符号(重复编码)有效地抵抗部分频带干扰。将干扰者的威胁降低到等同于发送功率扩展到整个信道带宽 W 内的宽带噪声干扰。

15.6　扩频系统的同步

接收机与接收扩频信号的时间同步可以分为两个阶段。在初始捕获阶段，接收机通过检测特定初始捕获序列的存在而建立时间同步。初始捕获阶段之后是传输数据阶段，在这一阶段接收机必须跟踪信号定时。

15.6.1　捕获阶段

在 DS 扩频系统中，必须在码片间隔 $T_c=1/W$ 的几分之一时间内完成 PN 码序列同步。初始同步问题可以视为使接收端时钟与发送端时钟同步的问题。通常情况下，在扩频系统中采用非常精确的和稳定的时钟，以降低发送端时钟与接收端时钟的时间不确定性。不过，因为信号在信道中传输的传播时延会造成初始的定时不确定性。当两个移动用户间进行通信时这个问题尤其值得注意。在任何情况下，初始同步的建立过程是发送机向接收机发送一个已知的伪随机序列。接收机保持在搜索模式，寻找该伪随机序列来建立初始同步。

假设初始的时间不确定性是 T_u 秒，码片持续时间是 T_c。由于初始的同步是在有加性噪声或者其他干扰存在的情况下建立的，因此有必要停留 $T_d=NT_c$ 秒，N 是正整数，来测试每个瞬时的同步。如果在(大约)$T_c/2$ 的时间步骤内对不确定性间隔进行搜索，那么建立初始同步需要的时间为

849

$$T_{\text{init sync}} = \frac{T_u}{T_c/2}T_d = 2NT_u$$

显然，发送到接收机的同步序列至少要持续 $2NT_c$ 秒，才能使接收机有足够的时间以串行

方式进行必要的搜索。

原理上，在加性高斯噪声存在的情况下，利用匹配滤波器或者互相关器来建立初始同步是最佳方式。滤波器与已知的伪随机序列生成的数据波形相匹配，匹配滤波器持续地将其输出与预先设定的阈值进行比较。当输出大于阈值时，初始同步建立，解调器进入接收数据模式。

另外，也可以实现滑动相关器，如图 15-11 所示。相关器以不确定性时间间隔进行循环，通常是离散时间间隔 $T_c/2$ 或者更短的时间。在时间间隔 NT_c 内计算互相关，N 是同步序列中的码片数，比较相关器的输出与阈值，判断是否出现已知信号序列。如果没有超过阈值，将已知参考序列提前 $T_c/2$ 秒，重复相关运算过程。直到信号被检测出来或者是在时间不确定性间隔 T_u 内已经完成搜索，才停止相关运算。在第二种结果的情况下，重复搜索过程。

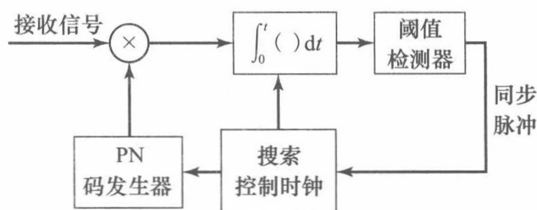


图 15-11　DS 信号接收的滑动相关器

类似的方法也可以用于 FH 信号中。在这种情况下，主要问题是同步接收机产生的用以控制跳频图案的 PN 码序列。为实现初始同步，向接收机发送一个已知的跳频信号。接收端的初始接收系统寻找已知的 FH 信号图案。例如，可以采用一组已经将带宽调整到已知图案频段的匹配滤波器。这些匹配滤波器的输出必须经过适当的延迟、包络或者平方律检波，如果有必要再进行加权，然后将累加得到的输出信号与阈值比较。当捕获系统输出信号超过阈值时，即宣告信号存在(信号捕获)。搜索过程一般是持续进行直到捕获系统输出信号超过阈值。图 15-12 给出了信号捕获方法框图。另一种方法只需要一个信号匹配滤波器和一个包络检波器，但要在前面加一个跳频图案发生器，后面加一个阈值检测器。这种方法如图 15-13 所示，它是基于串行搜索的，与 DS 扩频信号的滑动相关器类似。

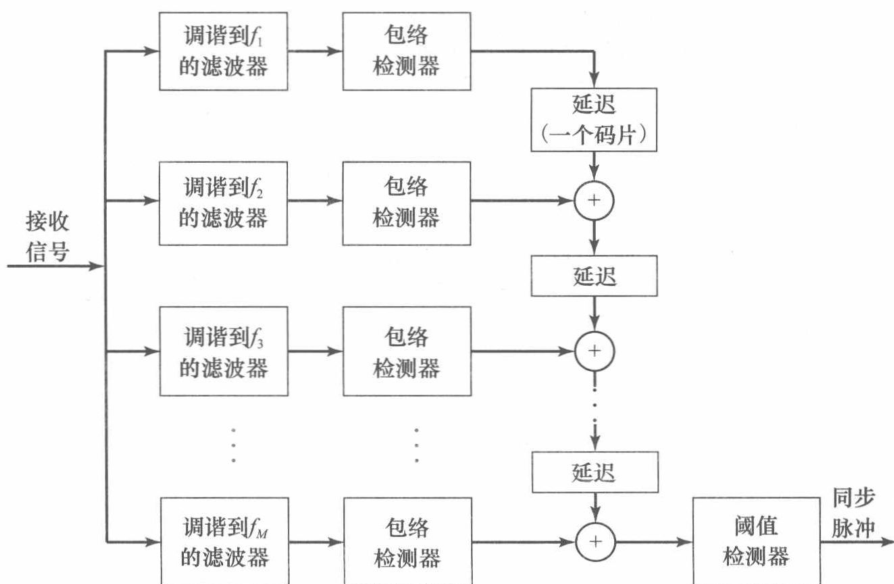


图 15-12　用于 FH 信号采集的系统

DS 信号滑动相关器与如图 15-13 所示的 FH 信号滑动相关器的工作方式都是耗时的串行搜索方式。一种可替代的方法是引入某种程度的并行性，让两个或者多个这种相关器并行操作，在互不重叠的时隙上分别进行搜索。这种方式通过更复杂昂贵的实现方式缩短搜索时间。 850

在搜索模式下，由于存在加性噪声或者其他干扰，偶尔会出现虚警。为了控制可能发生的虚警，有必要采用一种加性方式或电路来检查并确认使相关器输出端的接收信号保持

在阈值之上。采用这种检测方式时，导致的匹配滤波器输出超过阈值的大噪声脉冲只会对同步产生短暂影响，当大噪声脉冲通过匹配滤波器后，匹配滤波器的输出会下降至阈值之下。另一方面，当信号存在时，发送信号的过程中相关器或匹配滤波器的输出将保持在阈值之上。如果确认失败，恢复对信号同步的搜索。

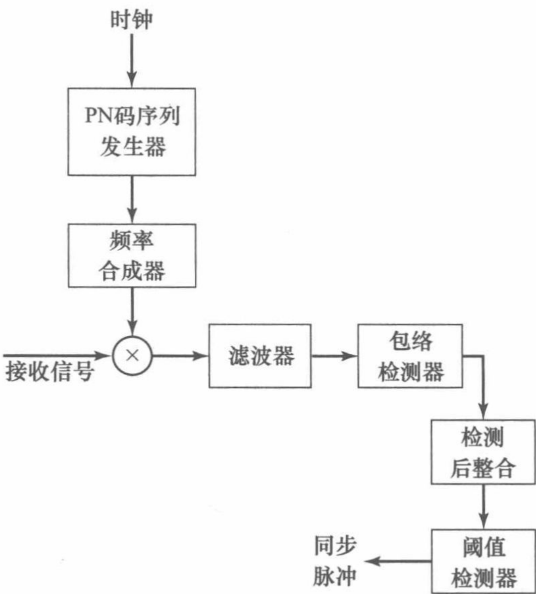


图 15-13 捕获 FH 信号的另一种系统

以上的讨论只考虑了建立初始同步时时间的不确定性。还有一个影响初始同步的因素是频率不确定性。如果发射机和接收机都是同步的，他们之间的相对速度会导致接收信号相对于发送信号出现多普勒频移。由于接收机没有相对速度的先验信息，也就是多普勒频移是未知的，必须通过频率搜索模式来确定多普勒频移。851 这个搜索过程是在适当量化的频率不确定性间隔内并行实现，在时间不确定性间隔中串行实现。DS 扩频信号的这种搜索方法的方框图如图 15-14 所示。当然也可以为 FH 信号设计合适的多普勒频移搜索方式。

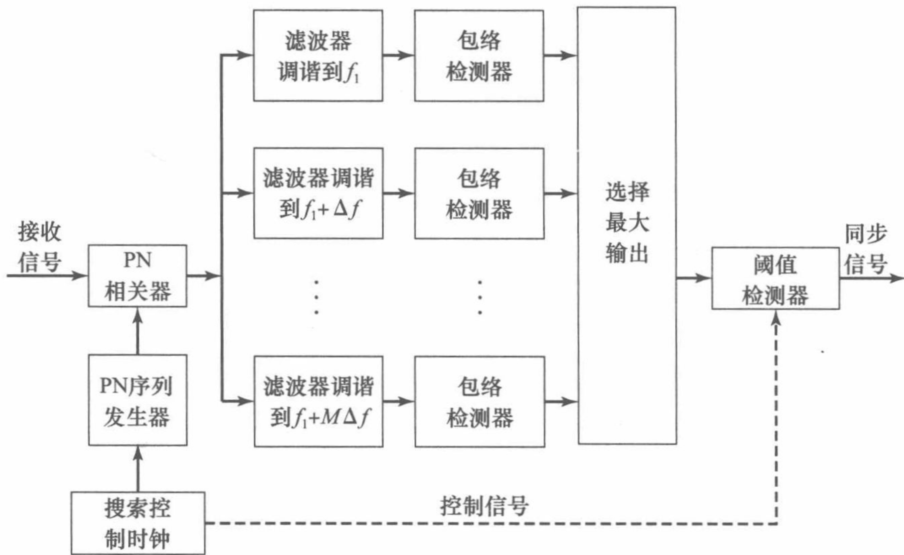


图 15-14 DS 系统中多普勒频移的初始搜索

15.6.2 跟踪

一旦捕获到信号，初始同步过程停止，开始细同步和跟踪过程。跟踪能够使接收端 PN 序列发生器与接收信号保持同步，它包括码片细同步。

对于 DS 扩频信号，跟踪过程通过跟踪环也称为*延迟锁定环*(DLL)来实现，如图 15-15 所示。在跟踪环中，接收信号送入两个乘法器，与本地 PN 码发生器的两个输出分别相乘，其中一个输出相对于另一个输出要延迟 $2\delta \leqslant T_c$。因此，两个乘积信号是接收信号和相隔两倍延迟(2δ)的两个 PN 序列各自的互相关。两个信号再经过带通滤波器、包络(平方律)检波器，然后相减。得到的差值信号送至环路滤波器，驱动压控时钟(VCC)。VCC 的输出作为 PN 码发生器的时钟。

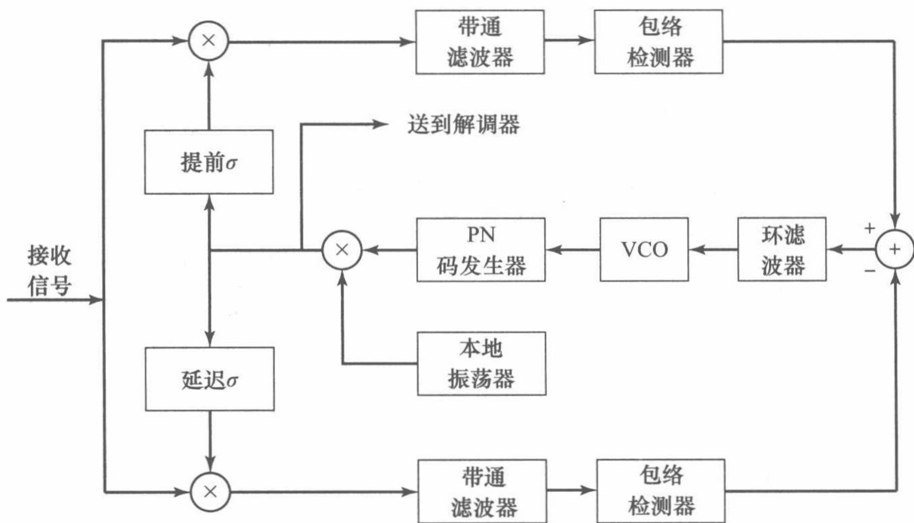


图 15-15　用于 PN 码跟踪的 DLL

如果同步不准确，一个相关器的滤波输出将超过另一个，VCC 将会适当的提前或者滞后。在平衡点处，两个滤波相关器的输出与峰值距离相等，PN 码发生器的输出与送至解调器的接收信号严格同步。跟踪 DS 信号中 DLL 的实现相当于第 8 章中介绍的早迟门比特跟踪同步器。

852 ~ 853

DS 信号定时跟踪的另一种方法是用 τ 抖动环(tau-dither loop，TDL)，如 15.16 中的方框图所示。TDL 系统只采用了图 15-15 中的一个“单臂”而不是“双臂”。通过提供一个合适的门控波形，可以使单臂的性能接近双臂方式。在这种情况下，以 δ 为单位向前或者向后调整码字时钟，在两个延迟值处对互相关器输出抽样。在 $\pm\delta$ 处取值的互相关的包络是一种幅度调制，其相对于 τ 抖动调制器的相位差决定了跟踪误差的符号。

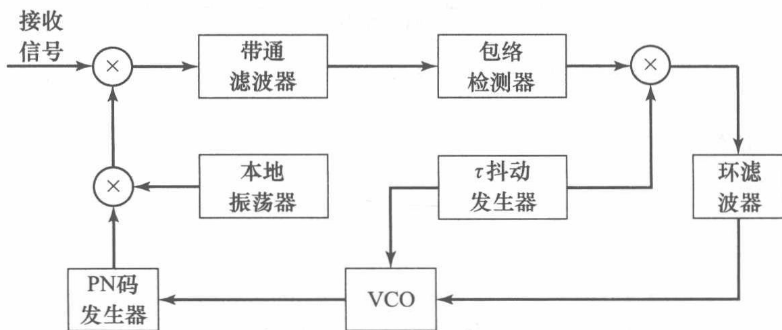


图 15-16　τ 抖动环

TDL 的一个优势是降低了实现成本，因为它只采用了传统 DLL 中所用的两个分支中的一个。TDL 另一个不太明显的优势是，不会产生 DLL 中因两个分支的幅度增益不能达到恰当平衡而导致的性能降质。

DLL 和 TDL 在偏离峰值 $\pm\delta$ 处对如图 15-17a 所示的信号自相关函数进行抽样，都会产生如图 15-17b 所示的误差信号。DLL 的性能分析类似于第 8 章中的 PLL 性能分析。如果没有 DLL 两个分支中的包络检波器，那么这个环与 Costas 环类似。一般情况下，DLL 中时间估计误差的方差与环的 SNR 值成反比，其值取决于输入到环中的 SNR 值和环的带宽。由于包络检波器固有的非线性，它的性能会和平方 PLL 一样有所下降，但是下降的程度相对较小。

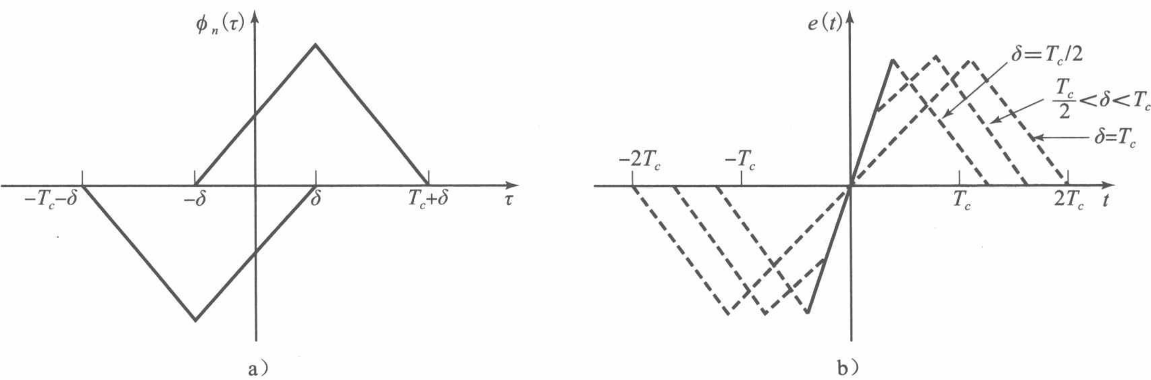


图 15-17 DLL 的自相关函数 a)和跟踪误差信号 b)

跳频扩频信号的跟踪方式如图 15-18 所示。运用这种方法的前提是，尽管已经实现初始捕获，但是在接收信号和接收时钟之间仍存在一个小的时序误差。将带通滤波器调到单一的中频处，带宽的量级为 $1/T_c$，其中 T_c 是码片间隔。其输出送至包络检波，再乘以时钟信号产生的用于驱动环路滤波器的三电平信号，如图 15-19 所示。当来自本地生成正弦波的码片转换与接收信号的码片转换并非同时发生时，环路滤波器输出的正负取决于 VCC 是滞后还是超前，VCC 的判断是相对于输入信号的时序而言的。环路滤波器产生的误差信号提供 VCC 的控制信号，调整 VCC 时序信号以使频率合成的 FH 信号与接收信号适当同步。

854 ~ 855

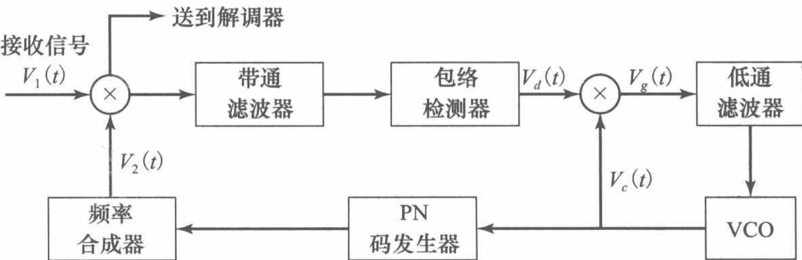


图 15-18 FH 信号的跟踪方法(获准引用自 Pickholtz et al. @ 1992 IEEE。)

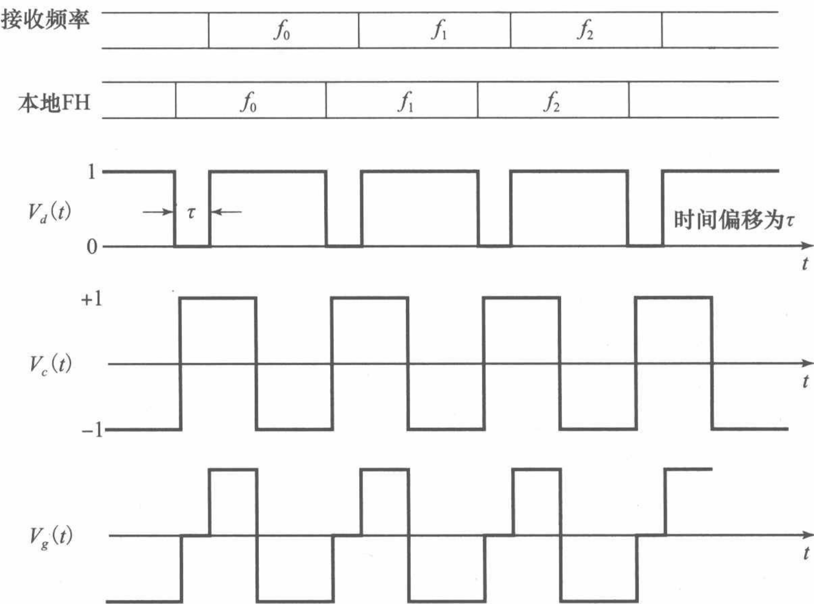


图 15-19 图 15-18 中 FH 信号采用跟踪方式得到的波形

15.7 数字蜂窝通信系统

在过去的三四十年中，为乘坐轿车、公共汽车、火车和飞机旅行的人们提供电话服务的需求持续增加。为了满足这种需求，已经开发了无线电通信系统来连接移动用户和陆地电话网。如今，基于无线电的通信系统使得乘坐飞机和汽车旅行的人们进行电话通信成为可能。本节简要介绍为手持移动电话的用户提供电话服务的蜂窝电话系统。

建立任何无线电通信系统所面临的主要问题是无线电频谱的可用性。在无线电话服务中，美国联邦通信委员会(FCC)已经为这种应用分配了在 806～890MHz 范围内的一部分 UHF 带宽和 1900MHz 带宽。欧洲和日本也在 UHF 带宽内做了类似的频率分配。 856

蜂窝无线电的概念作为一种有效利用可用频谱的方式得到应用，特别是在对移动电话服务需求非常大的人口高度密集的城市地区。一个地理区域可以被分成小区，每个小区包含一个*基站*，如图 15-20 所示。每个基站通过电话线连接到*移动电话交换局*(MTSO)，而 MTSO 通过电话线连接到陆地电话网络的电话中心局(CO)。

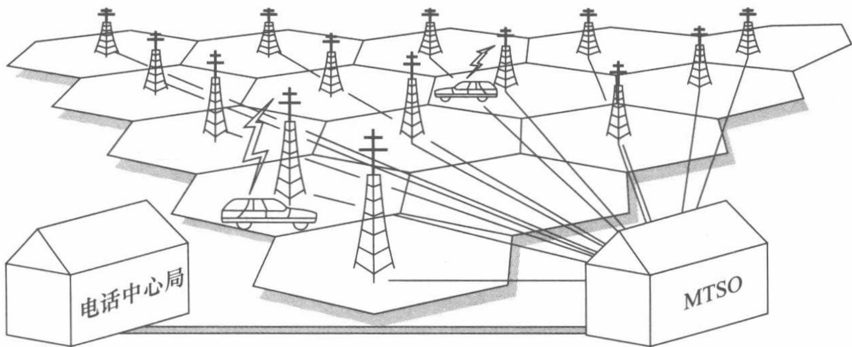


图 15-20 移动无线电基站

移动用户通过小区中基站的无线电进行通信。基站通过 MTSO 将呼叫路由到另一个基站(如果被叫方在另一个基站)或者路由到陆地电话网络的中心局(如果被叫方不是移动台)。每个移动电话通过其电话号码或者是制造商分配的电话序列号进行辨认。在呼叫初始阶段，这些号码自动地传输到 MTSO，用于认证和付费。

通常，移动用户通过键入目的电话号码，按下“发送”键，发起电话请求。MTSO 检查移动用户的身份，然后分配可用频率信道，用于从移动台到基站的语音信号无线传输。频率分配通过监管控制信道发送到移动手机。MSTO 分配第二个频率用于从基站到移动用户的无线传输。两方同时传输被称为*全双工操作*。MTSO 与电话网络中心局相连接是为了实现与被叫方连通。MTSO 与电话网络之间所有的电话通信都是通过宽带主干线路来实现的，宽带主干线路承载了来自用户的语音信号。一旦完成电话呼叫，双方挂断电话，无线信道就可以被其他用户所利用。

在通话过程中，MTSO 显示从移动用户到基站的无线电通信的信号强度。如果信号强度下降到低于预先设定的阈值时，MTSO 认为这种情况表明了移动用户正在从原有小区移向相邻的小区。通过与相邻小区的基站进行通信，MTSO 发现相邻小区接收到更强的信号，就会自动将移动用户切换到相邻小区的基站。切换是在几分之一秒内实现的，通常对双方都是透明的。 857

蜂窝无线电话系统的设计中，基站和移动用户的发射功率足够小，以使信号不会传播到相邻的小区。这样可使频率能在除相邻小区外的其他小区得到复用。因此，通过使小区更小、辐射功率更低，增加频率利用率，以及带宽利用率和移动用户数。当前的蜂窝系统采用了半径在 5～18km 范围内的小区。

下面我们简要介绍两种典型的数字蜂窝通信系统。一个是 GSM 系统，广泛用于欧洲和世界其他国家。另一个是 CDMA 系统，广泛用于北美和远东一些国家。

在通信网络中，目前有三种基本的方法用于提供多用户信道接入。一种简单的方法是将可用信道带宽划分为 K 个频率不重叠的子信道，一旦用户发出请求即给用户分配一个子信道。这种方法称为频分多址(FDMA)。它通常用于无线信道中容纳多用户的语音和数据传输。FDMA 也用于第一代蜂窝通信系统中，它采用了前文介绍的模拟 FM。

第二种提供多用户接入的方法是划分时间间隔(也称为帧)为 K 个不重叠的子区间，每个的长短为 T_f/K，其中 T_f 为帧长。每个用户被分配一帧内的一个特定的子区间，或者是时隙。这种多址方法称为时分多址(TDMA)，应用于 15.7.1 节介绍的 GSM 系统中。

第三种提供多址接入的方式是 CDMA，如 15.3.2 所述。在 CDMA 中，每个用户被分配一个唯一的扩频序列，例如，Gold 序列或者是 Kasami 序列。允许所有的用户通过相同的信道同时传输信息。在 FDMA 和 TDMA 中，多用户的信号在频率或时间上是不重叠的。通过给每个用户分配一个唯一的码序列，每个用户都可以(通过互相关)从其他用户信号干扰中找到需要的信号。基于 IS-95 标准的数字蜂窝系统采用了 CDMA。该系统在 15.7.2 节中介绍。

15.7.1 GSM 系统

GSM 是在欧洲提出的，目的是提供一个通用的数字蜂窝系统来服务于整个欧洲。现在它广泛地应用在世界的很多地区。GSM 系统中，从移动发射端到基站接收端(上行或反向链路)的信号传输采用 890～915MHz 频带，从基站到移动接收端(下行或前向链路)的信号传输采用 935～960MHz 频带。这两个 25MHz 的频带每个都被分成 125 个信道，每个信道的带宽为 200kHz。有两种方式可以降低相邻小区之间的传输干扰。第一种是为相邻基站分配不同的频率集合。第二种是根据设计方案进行频率复用。例如图 15-21 所示的频率方案，其中频率复用因子分别为 $N=4$ 和 $N=7$。N 值的增大会增大使用相同频率集的两个基站之间的距离 d_r，从而降低同信道干扰。另一方面，N 值增大，则分配给每个蜂窝的频率更少，蜂窝系统的频谱效率降低。小区的最大半径是 35km。

858

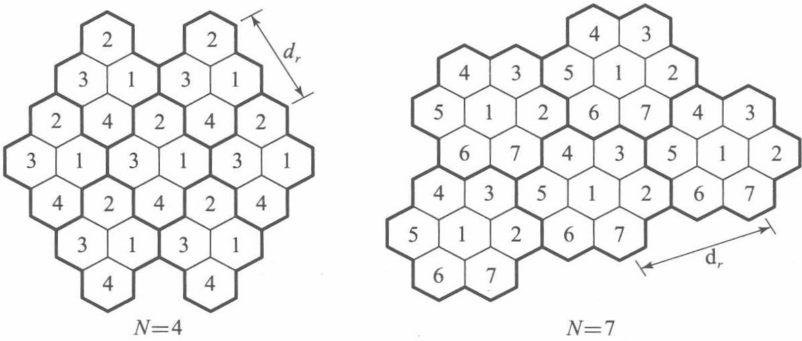


图 15-21 蜂窝系统中的频率复用(复用因子 $N=4$ 和 $N=7$)

通过设计 8 个 TDMA 不重叠的时间时隙，每个 200kHz 的频带可容纳 8 个用户，如图 15-22所示。8 个时隙构成了一帧，周期为 4.615ms，每个时隙的时间为 576.875μs。用户的信息数据传输速率为 270.833kbps。图 15-23 说明了基本的 GSM 帧结构，其中 26 帧构成一个复帧，51 个复帧构成一个超帧。帧的分层结构便于同步和网络控制。为了降低衰落和干扰的影响，提供信号分集，载波频率以 217hps(跳/秒)的(标称)速率跳变。

GSM 系统发射机和接收机的功能框图如图 15-24 所示。语音编码器是基于一种线性预测编码器(LPC)而设计的。该线性预测编码器称为剩余脉冲激励线性预测编码器(RPE-LPC)。RPE-LPC 在每 20 毫秒的时间间隔内传递 260 比特，因此比特率为 13kbps。最重要

859

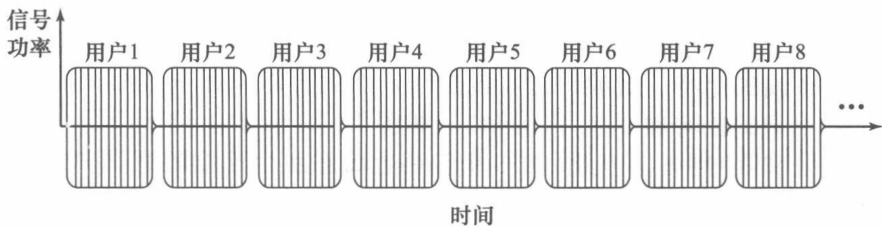


图 15-22　GSM 的 TDMA 帧

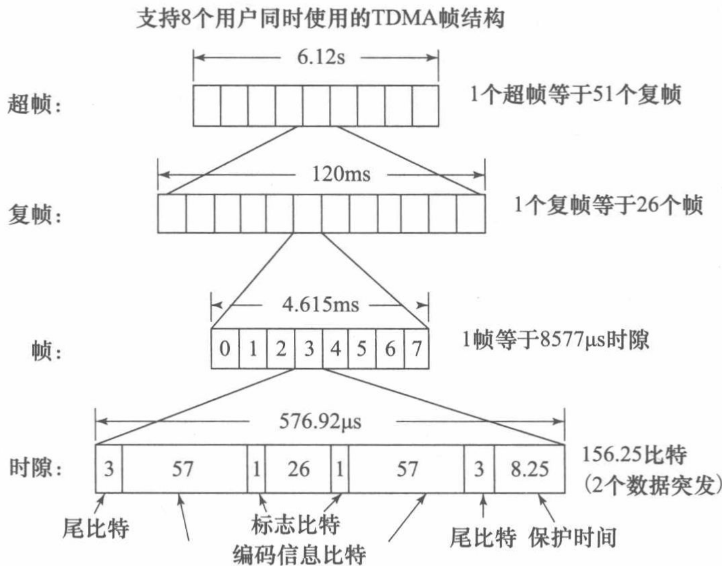
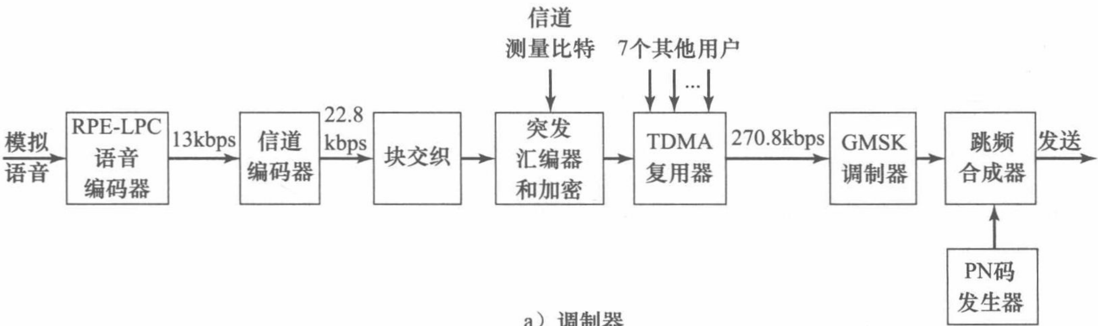
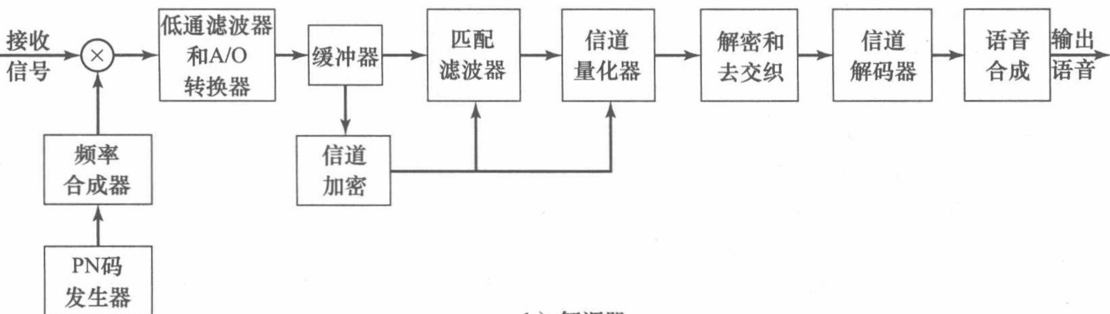


图 15-23　GSM 帧结构



a）调制器



b）解调器

图 15-24　GSM 调制器和解调器的功能框图

的比特通过码率为1/2，约束长度$L=5$的卷积编码器进行编码。编码和未编码比特都是块交织的，用来以22.8kbps的速率产生数据。因此，260个信息比特在每个20ms时间间隔内转换为456个编码比特。对编码比特流加密，然后再组织起来进行突发传输。在每个时隙中承载114个编码比特和一些开销比特，如图15-23所示，包括用于在每个时隙中测量信道特征的26比特的序列。因此，456个编码比特在4个连续的突发中传输，其中每个突发包括114个编码比特，占用一个时隙。

为了在每个时隙中传输比特，使用GMSK调制方式，BT=0.3。信号脉冲如图9-25e所示。GMSK调制器的输出调制到期望的载波频率上，而且在每帧中跳到不同的频率。

在接收端，接收信号被解跳然后转换到基带，产生同相(I)和正交(Q)信号分量。这两个信号被抽样和缓存。利用26个已知的发送比特进行信道特征测量，可以确定干扰信号信道的匹配滤波器。数据比特送至匹配滤波器，其输出通过信道量化器进行处理。量化器的实现可以采用判决反馈均衡器(DFE)或者Viterbi算法有效实现的最大似然序列检测器。量化器输出端的每个突发的比特被分开，解密，去交织，再送至信道解码器。最后用解码信号同步RPE-LPC编码的语音信号。

860～861

除了传输数字语音信号的信道外，还有其他的信道用于提供各种控制和同步功能，例如寻呼、频率校正、同步及请求访问发送消息。这些控制信道是含有已知比特序列的额外时隙，用以执行控制功能。

表15-3提供了GSM系统中基本参数的汇总。

表15-3 GSM系统中的参数汇总

系统参数	指标	系统参数	指标
上行频段	890～915MHz	语音编码速率	13kHz
下行频段	935～960MHz	语音编码器	RPE-LPC
载波/频段数	125	编码语音速率	22.8kbps
每个载波的带宽	200kHz	调制	GMSK，$BT=0.30$
多址接入方法	TDMA	解调	匹配滤波器+均衡器
每个载波的用户数	8	交织器	块
每个载波的数据速率	270.8kbps	跳频速率	217hps

15.7.2 基于IS-95的CDMA系统

如15.2节所述，DS扩频信号通过处理增益和码字增益得到性能提升，由于每个信号都有各自不同的伪随机序列，因此很多DS扩频信号可以同时占用相同的信道带宽。在北美已经采用直接序列CDMA作为数字蜂窝语音通信的一种多址方式。第一代数字蜂窝(CDMA)通信系统由Qualcomm开发，并已由美国通信工业协会(TIA)标准化并命名为IS-95，用于800MHz和1900MHz频段。相比其他多址接入方法，CDMA的一个主要的优势是每个基站可以使用所有频段，频率复用因子为$N=1$。

从基站到移动接收端(前向链路)的标称传输带宽为1.25MHz。从移动终端到基站(反向链路)的信号传输采用带宽为1.25MHz的另一个信道。前向和反向链路传输的信道都是DS扩频信号，码片速率为每秒1.2288×10^6个码片。

862

前向链路。信号从基站到移动接收端传输的调制器方框图如图15-25所示。语音编码器是一个码激励线性预测(CELP)编码器，以可变速率9600、4800、2400和1200bps生成数据，这些数据速率是20ms帧间隔内用户语音活动率的函数。从语音编码器得到的数据通过一个码率为1/2，固定长度$L=9$的卷积码进行解码。对于较低的语音活动，数据率为4800、2400或者是1200bps，从卷积解码器输出的符号会重复2次、4次或者8次来保持固定的比特率9600bps。当语音活动率较低时，发送功率会降低3、6或者9dB，因此对

于所有的语音速率，每比特传输能量是恒定的。因此较低的语音活动率会造成较低的发送功率，对其他用户也产生较低的干扰。

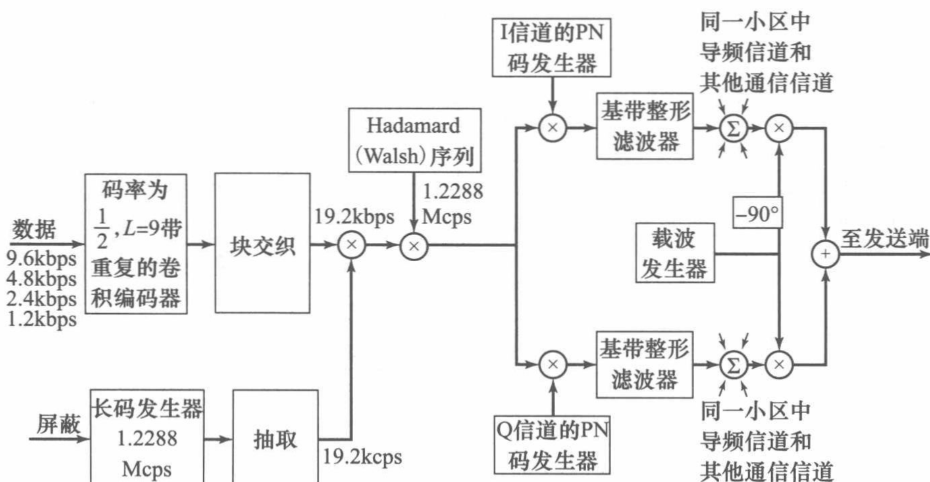


图 15-25　IS-95 上行链路的方框图

通过块交织器传输每帧的编码比特，可以克服在信道中传输时突发的错误的影响。块交织器以速率 19.2kbps 产生数据比特，与一个长码字($N=2^{42}-1$)生成器的输出相乘来加扰。长码字生成器的码片速率为 1.2288Mcps(兆片/秒)，其输出以 1/64 的因子抽样降低到 19.2kcps (千片/秒)的码片速率。该长码字唯一地标识了前向和反向链路中一个移动台的呼叫。

对每个信道用户分配一个长度为 64 的 Hadamard(也称为 Walsh)序列。为每个基站分配 64 个正交的 Hadamard 序列，则有 64 个可用信道。需要一个 Hadamard 序列进行(全 0 序列)传输导频信号(这是一种测试信号强度和载波相位偏移等信道特征的方法)，这些参数用于接收端实现相位相干解调。还需要一个 Hadamard 序列提供时间同步，以及 1 个或者更多信道进行寻呼。最终剩下至多 61 个信道分配给不同的用户。

863

每个被分配了 Hadamard 序列的用户，将数据序列与分配的 Hadamard 序列相乘。因此，每个编码数据比特与长度为 64 的 Hadamard 序列相乘。得到的两个二进制序列通过与两个长度为 2^{15} 的 PN 序列相乘进行扩展，生成同相(I)和正交(Q)信号分量。这样就将二进制数据信号转换为四相信号，I 和 Q 部分通过基带频谱整形滤波器进行滤波。不同的基站通过这些 PN 序列不同的偏移进行标识。64 个信道中的信号同时传输，由于 Hadamard 序列的正交性，在没有信道多径失真的情况下，任何移动接收端接收到的其他信号不会产生干扰。

在接收端采用 RAKE 解调器分解主要的多径信号分量。利用从导频信号中估计的相位和信号强度，对这些分量进行相位校准，再根据信号强度进行加权。将这些分量合并后送至 Viterbi 软判决译码器。

反向链路。从移动发送端到基站的反向链路调制器与前向的不同。反向链路调制器的方框图如图 15-26 所示。在调制器的设计中，最值得考虑的问题是从不同的移动发送端到基站传输的信号是异步的，用户间会存在更多干扰。另外，移动发送端通常是靠电池供电的，导致传输有功率的限制。为了补偿这些主要的限制，在反向链路中采用一种码率为 1/3，$K=9$ 的卷积码。实际上在 AWGN 信道中，这个码字与前向链路中采用码率为 1/2 的码字得到的码字增益是相同的。但是这个码字在衰落信道中有更高的码字增益。同样，对于语音活动率较低的情况，将卷积编码器的输出比特重复 2、4 或者 8 次。但编码比特率为 28.8kbps。

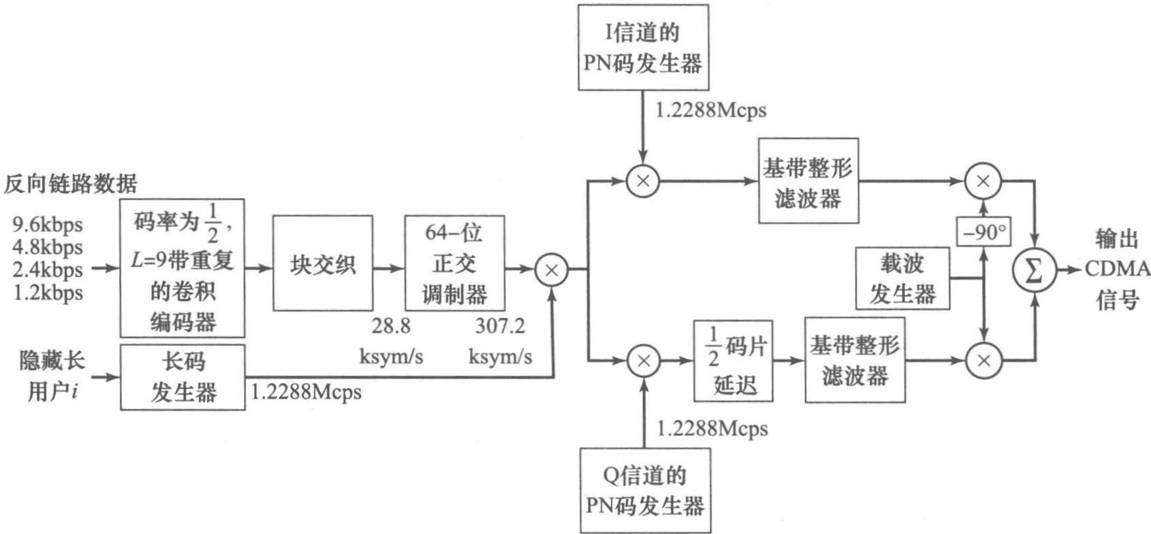


图 15-26 IS-95 反向链路的方框图

对于每个 20ms 的帧，将 576 个编码比特进行块交织，然后送至调制器。用一个 $M=64$ 的 Hadamard 序列正交信号集进行数据的调制，每个序列长为 64。因此，6 比特的数据块映射为 64 个 Hadamard 序列之一。这样调制器输出端的比特(或码片)率为 307.2kbps。注意在 AWGN 信道中，当错误概率为10^{-6}时，64 元正交调制需要的每比特 SNR 值比对应的二元信号所需每比特 SNR 值大约少 3.5dB。

为了降低对其他用户的干扰，重复码字符号的发送时间位置是随机的。因此，当语音活动率较低时，连续突发不是均匀间隔的。在随机提取数据后，利用长码 PN 序列发生器的输出实现数据扩展，该发生器运行速率为 1.2288Mcps。那么对应调制器的 Hadamard 序列的每个比特只有 4 个 PN 码片，因此，反向链路的处理增益是很小的。得到的长度为 $N=2^{15}$ 的 1.2288Mcps 二进制序列，其速率也为 1.2288Mcps，生成的 I 信号和 Q 信号(QPSK 信号)通过基带频谱整形滤波器进行滤波，然后送至正交混频器。在进入基带滤波器之前，Q 信道的信号相对于 I 信道的在时间上延迟半个 PN 码片间隔。实际上，两个基带滤波器输出端的信号是一个频移 QPSK 信号。

864～865

尽管码片是作为一个频偏 QPSK 信号进行传输的，但是解调器采用 $M=64$ 的正交 Hadamard 波形进行非相干解调来恢复编码数据比特。一个计算上有效(快速)的 Hadamard 变换在解调过程中会降低计算的复杂性。解调器的输出送至 Viterbi 解码器，解码器输出与语音信号同步。

表 15-4 给出 IS-95 系统基本参数的汇总。

表 15-4 IS-95 系统中的参数汇总

系统参数	指标	系统参数	指标
上行频段	824～849 MHz	信道编码器	$R=1/2$，$L=9$(D)
下行频段	869～894 MHz		$R=1/3$，$L=9$(U)
载波/频段数	20	调制	带 QPSK 扩频的 BPSK 调制(D)
每个载波的带宽	1.25 MHz		带 QPSK 扩频的 64 进制正交调制
多址接入方法	CDMA		(U)
每个载波的用户数	60	解调	具有最大比组合的 RAKE 匹配滤
码片速率	1.2288 Mcps		波器
语音编码器	可变速率的 CELP	特征序列	长度为 64 的 Hadamard (Walsh) 序列
语音速率	9600，4800，2400，1200 bps	PN 序列	$N=242.1$(长码)
交织器	块		$N=215$(扩频码)

15.7.3 第三代蜂窝通信系统和更高的系统

第一代蜂窝无线系统采用模拟信号传输。上面描述的 GSM 和 IS-95 蜂窝系统通常称为第二代蜂窝无线系统。这些系统主要是为采用数字调进制行语音传输而设计的，能够提供 64kbps 的低速率数据传输能力。

为了满足多媒体应用的需求，例如互联网接入、图像传输和视频会议，高数据传输速率蜂窝系统应运而生。这些系统称为第三代蜂窝无线系统，能够提供 5Mbps 的数据传输速率。

IS-95 的演进系统称为 CDMA-2000，其信道带宽增加到 3.75MHz，而不是 IS-95 采用的 1.25MHz。相应的码片速率为 3.684Mcps。在下行信道中采用 QPSK 调制，其峰值数据传输速率可达到 2.4Mbps。上行链路采用 BPSK 调制。采用多信道传输还可以达到更高的数据传输速率。

866

GSM 的演进系统称为 UMTS 或者是宽带 CDMA(WCDMA)。标准 5MHz 的信道带宽支持 3.84Mcps 的码片速率。上行和下行链路都采用 BPSK 调制。WCDMA 在 120km/h 的移动终端速度下提供 384kbps 的对称数据传输速率，在 300km/h 的移动终端速度下提供 128kbps 的对称数据率，在步行速度下提供 2Mbps 数据传输速率。

第三代蜂窝系统的设计不同于前几代为了优化语音传输而设计的系统。在提供数据服务时最基本的差别是，在下行链路(前向链路)从基站到移动用户过程中，要求更高的数据传输速率。这个需求导致了由基站到移动接收端的基本改变。具体来说，向移动接收端传输数据时，下行链路工作在时分共享方式(TDMA 方式)下。因此，下行链路在一个时间给一个用户提供服务，工作属于时分复用方式。

为了优化系统的吞吐量，基站根据每个移动接收机的信噪比(SNR)取值来决定每个用户的数据传输速率。在每个用户接收端都测量 SNR 取值，然后通过上行链路(反向链路)发送回基站。基站根据 SNR 值在特定时隙内选择给用户的数据传输速率。基站决定用户服务方式的关键因素是调度器。调度器的作用是通过编程控制以某种方式保证一定程度的公平和时延(服务延迟)。例如，用服务轮询方式保证公平性，但是由于低 SNR 值的用户会得到低数据传输速率服务，从而不能得到高吞吐量，因此必须分配更多时隙。相反，由于基站可以采用高阶 M 进制调制提供高的数据传输速率，通过给高 SNR 值的用户分配更多的时隙可以实现吞吐量的优化。但是这种方式会对 SNR 值低的用户造成长服务延时(大延迟)。实际中，调度器会采用某种算法，在提供一定程度的公平性的同时，将延迟限制到可以接受的程度。因此，调度算法的设计关系到吞吐量、公平性和延迟之间的折中。为了增大下行链路中用户的数据传输速率，基站可能会使用多个发射天线实现空间复用，如 14.4 节所述。

随着智能手机、台式计算机和笔记本电脑等移动终端设备的增加，即使是第三代蜂窝系统也不能提供足够的容量和数据传输速率来满足新用户的需求。需求的增加导致了新的全球第四代(4G)标准，称为长期演进(LTE)。4G-LTE 的主要功能和特征为：

1. 频谱灵活性，可用带宽 1.4MHz，5MHz，10MHz，15MHz 和 20MHz。
2. 当使用 20MHz 的带宽和 4×4(MIMO)天线时，下行链路的峰值数据传输速率可以达到 300Mbps，上行链路可达到 75Mbps。
3. 当使用 20MHz 的信道带宽，移动端使用单根天线，基站使用两根接收天线时，下行链路峰值数据传输速率可达 100Mbps，上行链路可达 50Mbps。

867

4. 根据频段不同，终端移动性最大支持 350km/h 或者 500km/h。
5. 下行链路使用 OFDM，上行链路使用 OFDM 的一种改进方式。

4G-LTE 得到全球所有的主要蜂窝服务提供商的支持。

15.8 小结及深入阅读

本章介绍了扩频数字通信技术及其在对抗干扰中的应用，干扰(interference)包括蓄意

干扰和意外干扰，蓄意干扰通常称为jamming，意外干扰是指来自相同信道其他用户的干扰。还介绍了直接序列(DS)扩频和跳频(FH)扩频技术，以及它们在干扰存在时的性能特征。在DS扩频系统中，发送信号通过将承载信息的信号和伪噪声(PN)信号相乘实现频谱扩展，伪噪声信号具有白噪声的特征。在接收端，宽带接收信号通过将接收信号和PN序列的复制信号相乘实现解扩。DS扩频信号能有效地对抗窄带干扰，估计检测器的错误概率。还介绍了在DS扩频系统中编码的好处。

本章还介绍了DS扩频在数字通信中的4个应用。具体包括DS扩频信号在低检测率信号传输中的应用；在多路用户共享相同信道的码分多址(CDMA)系统中的应用；在多径信道通信时，分解信号多径分量的应用；以及在基于802.11(WiFi)标准的无线局域网中的应用。还描述了用于扩展发送信号频谱所用的PN序列的生成。

在FH扩频系统中，PN序列用于在大信道带宽中伪随机地选择载波频率。我们描述了载波频率以符号率或者更低速率变化的慢跳频系统，及载波频率在每个符号间隔改变多次的快跳频系统。发现慢跳频系统易受部分频带干扰的影响，而通过设计发送信号的分集信号，可以降低这种干扰的影响。也对FH扩频信号的应用进行了介绍。

在解调接收信号和恢复传输信息时，接收端本地生成的PN序列和接收信号的PN序列的同步是很必要的。我们描述了用两个阶段实现的时间同步，即初始捕获阶段和追踪阶段。

本章最后讨论了扩频在第2、3、4代(2G、3G、4G)蜂窝系统中的应用。

868

扩频信号最初用在军事应用中安全数字通信系统的设计中。但最近30年扩频信号已经扩展到商业应用中，特别是在蜂窝通信、卫星多址通信和局间无线通信中。

Scholtz(1982)的文章指出，扩频通信的发展可以追溯到1920～1960年间。讨论扩频信号基本概念的教程式文献见Scholtz(1977)和Pickholtz等(1982)。这些文章列出了上述工作的大量参考文献。Viterbi(1979，1985)的两个教程文章中包括了对DS和FH扩频信号性能特征的基本分析。

Simon等(1985)，Ziemer和Peterson(1985)以及Holmes(1982)的书全面讨论了扩频信号与系统的分析和设计的不同方面，包括同步技术。而且，在IEEE Transactions on Communications的两期专刊(1977年8月，1982年5月)也专门讨论了扩频通信。这些专刊收纳了关注不同主题的论文，包括多址技术、同步技术和不同信道干扰类型下的性能分析。发表在IEEE期刊中的大量的重要文章已经被IEEE出版社重新刊印为书[参见Dixon(1976)和Cook等(1983)]。

习题

15.1 证明没有编码的DS扩频信号在对抗高斯白噪声时没有性能增益。

15.2 采用CDMA方式，30个等功率的用户共享同一信道。每个用户采用DS扩频和二进制PSK方式传输信息，信息速率为10kbps。要使比特错误概率为10^{-5}时，求所需的最小码片速率。计算时接收端的加性噪声可以忽略。

15.3 基于DS扩频的CDMA系统，其处理增益为1000，采用二进制PSK调制。如果每个用户有相同的功率，所需的性能是错误概率为10^{-6}，求用户数量。如果处理增益为500时，重新计算用户数。

15.4 存在音调干扰时，DS扩频系统以速率为1000bps进行传输。干扰功率比期望信号的功率大20dB，为了达到满意的性能所需的$\mathscr{E}_b/I_0$为10dB。求满足上述规范所需的扩展带宽。

15.5 在两路无线信号传输的情况下，采用DS扩频通信系统来消除多径信号分量。如果二次路径比直接路径长300m，求为分解多径分量所需的最小码片速率。

15.6 CDMA系统有15个等功率的用户，每个用户以10 000bps的速率传输信息。用户使用工作在1MHz码片速率的扩频信号。调制方式为二进制PSK。

1. 试求$\mathscr{E}_b/I_0$，其中I_0是干扰的谱密度。
2. 处理增益是多少？
3. 在不影响输出SNR值的情况下，当允许用户数扩展为二倍时，处理增益应增加到多少？

15.7　FH二进制正交FSK系统，采用能够生成最大长度的序列的 $m=15$ 级线性反馈移位寄存器。移位寄存器的每个状态选择跳频图案中 N 个不重叠的频段之一。比特率为100bps，跳变率为每秒一次。解调器采用非相干检测。

1. 求信道的跳频带宽。
2. 处理增益是多少？
3. 存在AWGN时错误概率为多少？

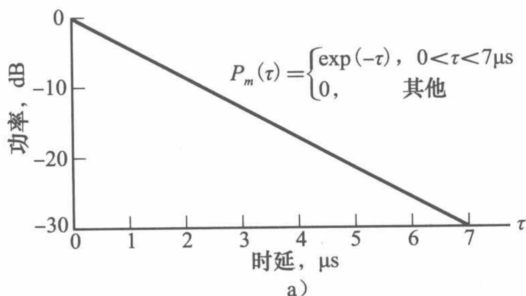
15.8　DS二进制PSK扩频系统的处理增益为500。如果期望的错误概率为 10^{-5}，那么在对抗连续谱干扰时的干扰余量是多少？

15.9　假设 $\{c_{1i}\}$ 和 $\{c_{2i}\}$ 是两个二进制(0，1)周期序列，周期分别为 L_1 和 L_2。试求通过 $\{c_{1i}\}$ 和 $\{c_{2i}\}$ 的模2和得到的序列的周期。

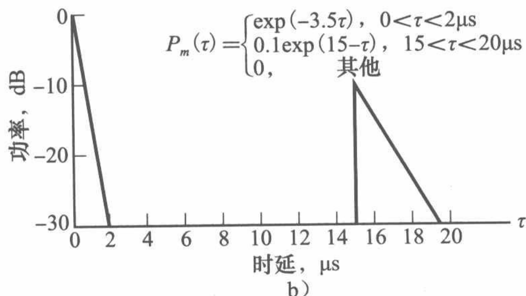
15.10　在DS扩频系统中，一个 $m=10$ 的最大长度的移位寄存器生成伪随机序列。码片持续时间间隔为 $T_c=1\mu s$，比特时间间隔为 $T_b=LT_c$，其中 L 是 m 序列的长度(周期)。

1. 求系统的处理增益，以dB表示。
2. 如果所需的 $\mathscr{E}_b/I_0=10$，干扰是一个平均功率为 P_{av} 的音调干扰，试求干扰余量。

15.11　习题15.11图列出了(a)郊区和市区(b)丘陵地区蜂窝系统中平均功率多路延时分布。在GSM系统中，比特率为270.8kbps；在IS-95系统(前向链路)中，比特率为19.2kbps。试求每个蜂窝系统通过信道(图a)和(图b)发送信号时，符号间干扰影响的比特数目。



a)



b)

习题　15.11图

15.12　对于习题15.11图所示的多路时延分布，要覆盖信道(图a)和(图b)的多径，求IS-95上行链路器的RAKE解调端所需抽头数。对于信道(b)，在所有的RAKE抽头中，多少个包含信号分量？多少个没有信号？

15.13　移动无线信道中Doppler功率谱的一个广泛应用是所谓的Jakes'模型，为：

$$S(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi f_m}\dfrac{1}{\sqrt{1-(f/f_m)^2}}, & |f|\leqslant f_m\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 $f_m=vf_0/c$ 是最大多普勒频移，v 是以m/s计算的车速，f_0 是载波频率，c 是光速(3×10^8 m/s)。对一辆以100km/h行驶的汽车和一辆以200km/h行驶的火车，求 f_m。画出载波频率为900MHz的蜂窝通信系统中两车的 $S(f)$ 图。

15.14　在例15.3.1中，假设DS扩频信号通过无线传输到距离2000km的接收端。传输天线的增益为20dB，接收天线是全向的。载波频率为3MHz，可用信道带宽为 $W=10^5$ Hz，接收端的噪声温度为300°K。求所需的发送功率和DS扩频系统的比特率。

15.15　用 $d_{free}=10$，码率为1/2的卷积码对发生速率为1000bps的数据序列进行编码。调制方式为二进制PSK。DS扩频序列的码片速率为10MHz。

1. 求编码增益。
2. 求处理增益。
3. 假设 $\mathscr{E}_b/I_0=10$，求干扰余量。

15.16　考虑习题15.7中描述的FH二进制正交FSK系统。假设跳变率增加到2hps(跳/秒)。接收端使用平方律求和方式来将两跳中的信号合并。

1. 试求信道的跳频带宽。
2. 处理增益是多少？
3. 在AWGN存在时的错误概率为多少？

15.17　在快FH扩频系统中，信息通过FSK方式传输，使用非相干检测。假设 $N=3$hps，在每跳中信号使用硬判决解码。

1. 试求在AWGN信道中系统的错误概率，其中功率谱密度为 $N_0/2$，SNR＝13dB(三跳的总SNR值)。
2. 将第1问中的结果与跳频速率为1hps的FH扩频系统的错误概率相比较。

15.18　一个FH二进制FSK系统，使用非相干检测，工作在 $\mathscr{E}_b/I_0=10$，跳频带宽为20GHz，比特率为10Kbps。

1. 系统的处理增益是多少？
2. 在部分频带干扰存在时，对于最坏情况下的性能来说，带宽占用率是多少？
3. 对于最坏情况下的部分频带干扰，错误概率是多少？

上机习题

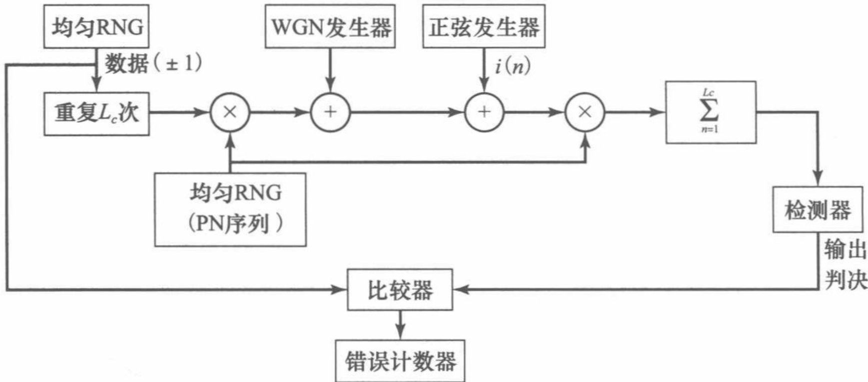
15.1 直接序列扩频信号的仿真

本题目的是通过蒙特卡罗仿真证明 DS 扩频信号在抑制正弦干扰时的有效性。待仿真系统的方框图如上机习题 15.1 图所示。

一个均匀的随机数发生器(RGN)生成二元信息符号(±1)序列。每个信息比特重复 L_c 次，其中 L_c 对应每信息比特 PN 码片的数量。得到的序列(包含每比特的 L_c 次重复)与另一均匀 RNG 生成的 PN 序列 $c(n)$ 相乘。相乘得到的序列，加入方差为 $\sigma^2=N_0/2$ 的加性高斯白噪声，且正弦干扰的形式为

$$i(n) = A\sin\omega_0 n$$

其中 $0<\omega_0<\pi$，正弦信号的幅度选择满足 $A<L_c$。解调器完成与 PN 序列的卷积，对每个信息比特的 L_c 个信号样值进行求和(综合)。将加法器的输出送至检测器，比较这个信号与零阈值，判断传输的是 +1 还是 −1。错误计数器计算检测器导致的错误数。对于正弦干扰三个不同的幅度值 $A=0$，$A=3$ 和 $A=10$，画出错误概率与 SNR 值的关系曲线，其中 $L_c=20$。SNR 值的定义为 $\mathscr{E}_b/I_0$，可以通过设置 $\mathscr{E}_b=1$ 和改变加性高斯噪声的方差 σ^2 来改变其值。



上机习题 15.1 图

15.2 同步 CDMA 系统的仿真

编写 MATLAB 程序实现 4 个时间同步 CDMA 用户的蒙特卡罗仿真，其中每个用户采用长度 $L=31$ 的不同 Gold 序列。四个 Gold 序列如图所示。

对每个用户的 Gold 序列采用二元(±1)调制，每比特码片数为 31。每个用户的接收端计算接收到的 CDMA 信号和加性高斯白噪声(逐个码片叠加)的混合信号与其 Gold 序列的互相关。设 $N=10\ 000$ 个信息比特，进行蒙特卡罗仿真，估计并画出每个用户的错误概率与 SNR 值的函数关系。

1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

上机习题 15.2 图

15.3 异步 CDMA 系统的仿真

当 4 个用户异步传输时，重复上机问题 15.2。例如，对下面这种情况进行仿真，4 个用户的 CDMA 信号在时间上错开，每个信号相对于另一个信号错开一个码片。也就是，用户 2 的 CDMA 信号相对于用户 1 延迟一个码片，用户 3 的 CDMA 信号相对于用户 2 延迟一个码片，用户 4 的 CDMA 信号相对于用户 3 延迟一个码片。比较异步传输得到的错误概率和同步传输得到的错误概率。

15.4 最大长度移位寄存器序列的生成

编写 MATLAB 程序实现一个 $m=12$ 状态的最大长度移位寄存器，生成三个周期的序列。计算并画出相当于式(15.4.1)中双极性序列的周期自相关函数。

15.5 LPI 信号的检测

对 10 级移位寄存器生成的 m 序列进行二进制调制生成 LPI 信号($L=1023$)，则每信息比特的

码片数为 1023。移位寄存器的输出映射到双极性序列为

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{如果寄存器的输出为 1} \\ -1 & \text{如果寄存器的输出为 0} \end{cases}$$

码片传输序列受到 AWGN 干扰，在码片匹配滤波器输出端的接收信号序列为

$$r_k = sc_k + n_k, k = 1,2,\cdots,1023$$

其中对于整个序列 $0 \leqslant k \leqslant 1023$，二进制数据比特为+1 或−1。

1. 生成 m-序列$\{c_k\}$，验证等式(15.4.2)是否满足。
2. 利用 1 中生成的 m-序列构造接收信号序列$\{r_k\}$，当高斯噪声抽样的方差为 $\sigma^2=10$ 时，画出 $k=1$，2，…，1023 的接收信号序列$\{r_k\}$。在接收序列$\{r_k\}$中能否分辨出发送信号序列 $x_k=sc_k$，$1 \leqslant k \leqslant 1023$?
3. 计算$\{r_k\}$和$\{c_k\}$的互相关，画出结果

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} r_k c_k, \quad n = 1,2,\cdots,1023$$

讨论相关器输出的结果。

15.6 跳频 FSK 的频率仿真

FH 二进制正交 FSK 系统采用 $m=7$ 级移位寄存器生成长度为 $L=127$ 的周期性最大长度序列。移位寄存器的每个状态选择跳频图案中 $N=127$ 个非重叠频段之一。编写 MATLAB 程序仿真 $N=127$ 个频段中每个频段的中心频率的选择和两个频率的生成。给出前 10 个比特间隔的频率选择图案。

15.7 带有部分频带干扰的 FSK 系统的仿真

通过蒙特卡罗仿真，说明采用二进制 FSK 的 FH 数字通信系统的性能，该系统受到最差情况部分频带干扰的影响。待仿真系统的方框图如上机习题 15.7 图所示。一个均匀随机数发生器(RNG)用于生成二进制信息序列，作为 FSK 调制器的输入。FSK 调制器的输出以概率 β 受到加性高斯白噪声干扰，其中 $0<\beta \leqslant 1$。第二个均匀 RNG 用于决定什么时候加性高斯噪声破坏信号，什么时候没有破坏。在噪声存在时，假设传输的为 0，检测器的输入为

$$r_1 = (\sqrt{\mathscr{E}_b}\cos\varphi + n_c)^2 + (\sqrt{\mathscr{E}_b}\sin\varphi + n_s)$$

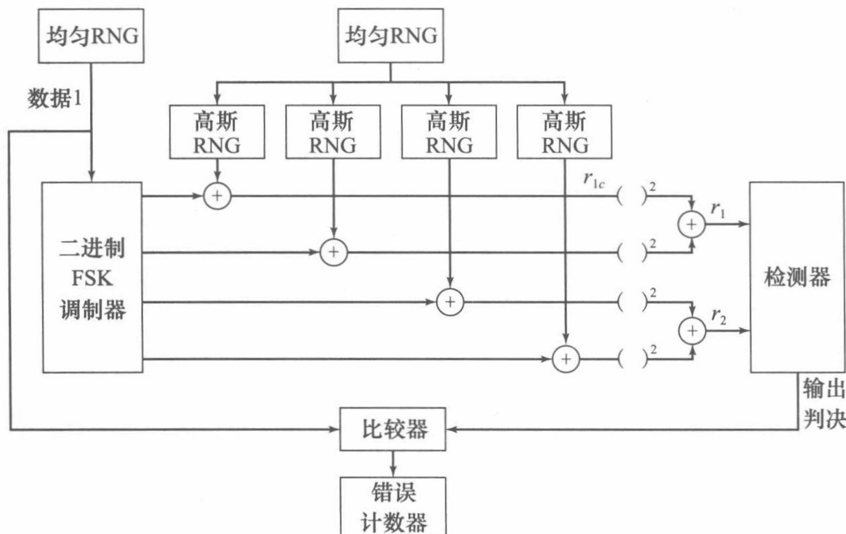
$$r_2 = n_{2c}^2 + n_{2s}^2$$

其中 φ 表示信道相位偏移，n_{1c}，n_{1s}，n_{2c}，n_{2s} 表示加性噪声分量。噪声存在时有

$$r_1 = \mathscr{E}_b, r_2 = 0$$

因此，在检测器端没有错误发生。每个噪声分量的方差为 $\sigma^2=J_0/2\beta$，其中 β 在式(15.5.4)中给出。为了简单化，设置 $\varphi=0$，将 J_0 归一化为单位 1。那么 $\rho_b=\mathscr{E}_b/J_0=\mathscr{E}_b$。

因为 $\sigma^2=J_0/2\beta$，$\beta=2/\rho_b$，在部分频带干扰存在时，$\sigma^2=\mathscr{E}_b/4$，$\beta=2/\mathscr{E}_b$，其中 $\mathscr{E}_b$ 限制在 $\mathscr{E}_b \geqslant 2$。对 10 000 个数据比特进行仿真，信号能量在 5dB 到 25dB 之间，画出错误概率图。



上机习题 15.7 图

873 ~ 876

参考文献

ADLER, R. L., COPPERSMITH, D., AND HASSNER, M. (1983), "Algorithms for Sliding Block Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-29, pp. 5–22, January.

ANDERSON, J. B., AULIN, T., AND SUNDBERG, C. W. (1986), *Digital Phase Modulation,* Plenum, New York.

AULIN, T., RYDBECK, N., AND SUNDBERG, C. W. (1981), "Continuous Phase Modulation—Part II: Partial Response Signaling," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-29, pp. 210–225, March.

AULIN, T., AND SUNDBERG, C. W. (1981), "Continuous Phase Modulation—Part I: Full Response Signaling," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-29, pp. 196–209, March.

AULIN, T., AND SUNDBERG, C. W. (1982a), "On the Minimum Euclidean Distance for a Class of Signal Space Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-28, pp. 43–55, January.

AULIN, T., AND SUNDBERG, C. W. (1982b), "Minimum Euclidean Distance and Power Spectrum for a Class of Smoothed Phase Modulation Codes with Constant Envelope," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-30, pp. 1721–1729, July.

AULIN, T., AND SUNDBERG, C. W. (1984), "CPM—An Efficient Constant Amplitude Modulation Scheme," *Int. J. Satellite Commun.,* vol. 2, pp. 161–186.

BAHAI, A. R. S., AND SALTZBERG, B. R. (1999), *Multi-Carrier Digital Communications—Theory and Applications of OFDM*, Kluwer, Plenum, New York.

BAHL, L. R., COCKE, J., JELINEK, F., AND RAVIV, J. (1974), "Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-20, pp. 284–287, March.

BARROW, B. (1963), "Diversity Combining of Fading Signals with Unequal Mean Strengths," *IEEE Trans. Commun. Sys.,* vol. CS-11, pp. 73–78, March.

BELLO, P. A., AND NELIN, B. D. (1962a), "Predetection Diversity Combining with Selectively Fading Channels," *IRE Trans. Commun. Sys.,* vol. CS-10, pp. 32–44, March.

BELLO, P. A., AND NELIN, B. D. (1962b), "The Influence of Fading Spectrum on the Binary Error Probabilities of Incoherent and Differentially Coherent Matched Filter Receivers," *IRE Trans. Commun. Sys.,* vol. CS-11, pp. 170–186, June.

BELLO, P. A., AND NELIN, B. D. (1963), "The Effect of Frequency Selective Fading on the Binary Error Probabilities of Incoherent and Differentially Coherent Matched Filter Receivers," *IEEE Trans. Commun. Sys.,* vol. CS-11, pp. 170–186, June.

BENEDETTO, S., BIGLIERI, E., AND CASTELLANI, V. (1987), *Digital Transmission Theory,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

BERGER, T. (1971), *Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

BERGER, T., AND TUFTS, D. W. (1967), "Optimum Pulse Amplitude Modulation, Part I: Transmitter-Receiver Design and Bounds from Information Theory," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-13, pp. 196–208.

BERLEKAMP, E. R. (1968), *Algebraic Coding Theory,* McGraw-Hill, New York.

BERROU, C., GLAVIEUX, A., AND THITIMAJSHIMA, P. (1993), "Near Shannon Limit Error Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes," *Proc. IEEE Int. Conf. Commun.,* pp. 1064–1070, May, Geneva, Switzerland.

BIGLIERI, E., DIVSALAR, D., MCLANE, P. J., AND SIMON, M. K. (1991), *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan, New York.

BINGHAM, J. A. C. (1990), "Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come," *IEEE Commun. Mag.,* vol. 28, pp. 5–14, May.

BLAHUT, R. E. (1983), *Theory and Practice of Error Control Codes,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

BLAHUT, R. E. (1987), *Principles and Practice of Information Theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

BLAHUT, R. E. (1990), *Digital Transmission of Information,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

BOSE, R. C., AND RAY-CHAUDHURI, D. K. (1960a), "On a Class of Error Correcting Binary Group Codes," *Inform. Control*, vol. 3, pp. 68–79, March.

BOSE, R. C., AND RAY-CHAUDHURI, D. K. (1960b), "Further Results in Error Correcting Binary Group Codes," *Inform. Control,* vol. 3, pp. 279–290, September.

BOYD, S. (1986), "Multitone Signals with Low Crest Factor," *IEEE Trans. Circ. Sys.,* vol. CAS-33, pp. 1018–1022.

BRACEWELL, R. (1965), *The Fourier Transform and Its Applications,* 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.

BRENNAN, D. G. (1959), "Linear Diversity Combining Techniques," *Proc. IRE,* vol. 47, pp. 1075–1102, June.

CARLSON, A. B. (1986), *Communication Systems,* 3rd Ed., McGraw-Hill, New York.

CHANG, R. W. (1966), "Synthesis of Bandlimited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 45, pp. 1775–1796, December.

CHERUBINI, G., ELEFTHERIOU, E., AND OLCER, S. (2002), "Filtered Multitone Modulation for Very High-Speed Digital Subscriber Lines," *IEEE J. Select. Area. Comm.*, vol. 20, no. 5, pp. 1016–1028, June.

CHOW, J. S., CIOFFI, J. M., AND BINGHAM, J. A. C. (1995), "A Practical Discrete Multitone Transceiver Loading Algorithm for Data Transmission over Spectrally Shaped Channels," *IEEE Trans. Commun.,* vol. 43, pp. 357–363, October.

CLARKE, K. K., AND HESS, D. T. (1971), *Communication Circuits: Analysis and Design,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

COOK, C. E., ELLERSICK, F. W., MILSTEIN, L. B., AND SCHILLING, D. L. (1983), *Spread Spectrum Communications,* IEEE Press, New York.

COUCH, L. W., II (1993), *Digital and Analog Communication Systems,* 4th Ed., Macmillan, New York.

COVER, T. M., AND THOMAS, J. A. (2006), *Elements of Information Theory,* 2nd Ed. Wiley-Interscience, New York.

DAVENPORT, W. B., Jr., AND ROOT, W. L. (1987), *Random Signals and Noise,* McGraw-Hill, New York.

DELLER, J. P., PROAKIS, J. G., AND HANSEN, H. L. (2000), *Discrete-Time Processing of Speech Signals,* IEEE Press, Piscataway, N. J.

DIXON, R. C. (1976), *Spread Spectrum Techniques,* IEEE Press, New York.

DOELTZ, M. L., HEALD, E. T., AND MARTIN, D. L. (1957), "Binary Data Transmission Techniques for Linear Systems," *Proc. IRE,* vol. 45, pp. 656–661, May.

ELIAS, P. (1954), "Error-Free Coding," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-4, pp. 29–39, September.

ELIAS, P. (1955), "Coding for Noisy Channels," *IRE Conv. Rec.,* vol. 3, pt. 4, pp. 37–46.

FANO, R. M. (1963), "A Heuristic Discussion of Probabilistic Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-9, pp. 64–74, April.

FORNEY, G. D., Jr. (1966), *Concatenated Codes,* MIT Press, Cambridge, Mass.

FORNEY, G. D., Jr. (1972), "Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 18, pp. 363–378, May.

FORNEY, G. D., Jr. (1988a), "Coset Codes I: Introduction and Geometrical Classification," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-34, pp. 671–680, September.

FORNEY, G. D., Jr. (1988b), "Coset Codes II: Binary Lattices and Related Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-34, pp. 671–680, September.

FRANKS, L. E. (1969), *Signal Theory,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

FRANKS, L. E. (1980), "Carrier and Bit Synchronization in Data Communication—A Tutorial Review," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-28, pp. 1107–1121, August.

FREIMAN, C. E., AND WYNER, A. D. (1964), "Optimum Block Codes for Noiseless Input Restricted Channels," *Inform. Control,* vol. 7, pp. 398–415.

GABOR, A. (1967), "Adaptive Coding for Self Clocking Recording," *IEEE Trans. Elect. Comput.,* vol. EC-16, p. 866.

GALLAGER, R. G. (1962) "Low-Density Parity-Check Codes," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. 8, pp. 21–28. Jan.

GALLAGER, R. G. (1963), *Low-Density Parity-Check Codes*, MIT Press, Cambridge, MA.

GALLAGER, R. G. (1968), *Information Theory and Reliable Communication,* Wiley, New York.

GARDNER, F. M. (1979), *Phaselock Techniques,* Wiley, New York.

GARG, V. K., SMOLIK, K., AND WILKES, J. E. (1997), *Applications of CDMA in Wireless/Personal Communications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

GERSHO, A., AND GRAY, R. M. (1992), *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer, Boston.

GERST, I., AND DIAMOND, J. (1961), "The Elimination of Intersymbol Interference by Input Pulse Shaping," *Proc. IRE,* vol. 53, July.

GIBSON, J. D. (1993), *Principles of Digital and Analog Communications,* 2nd Ed., Macmillan, New York.

GIBSON, J. D., BERGER, T., LOOKABAUGH, T., LINDBERG, D., AND BAKER, R. L. (1998), *Digital Compression for Multimedia: Principles and Standards,* Morgan Kaufmann, San Francisco, Calif.

GOLAY, M. J. E. (1949), "Notes on Digital Coding," *Proc. IRE,* vol. 37, p. 657, June.

GOLD, R. (1967), "Optimal Binary sequences for spread spectrum multiplexing," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 619–621, October.

GOLD, R. (1968), "Maximal Recursive Sequences with 3-Valued Recursive Cross Correlation Functions," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-14, pp. 154–156, January.

GOLOMB, S. W. (1967), *Shift Register Sequences,* Holden-Day, San Francisco, Calif.

GRAY, R. M., AND DAVISSON, L. D. (1986), *Random Processes: A Mathematical Approach for Engineers,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

GREEN, P. E., Jr. (1962), "Radar Astronomy Measurement Techniques," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, Mass., Tech. Report No. 282, December.

GRONEMEYER, S. A., AND McBRIDE, A. L. (1976), "MSK and Offset QPSK Modulation," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-24, pp. 809–820, August.

GUPTA, S. C. (1975), "Phase-Locked Loops," *Proc. IEEE,* vol. 63, pp. 291–306, February.

HAGENAUER, J., AND HOEHER, P. (1989), "A Viterbi Algorithm with Soft Decision Outputs and Its Applications," *Proc. IEEE Globecom Conf.,* pp. 1680–1686, November, Dallas, Tex.

HAMMING, R. W. (1950), "Error Detecting and Error Correcting Codes," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 29, pp. 147–160, April.

HARTLEY, R. V. (1928), "Transmission of Information," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 7, p. 535.

HAYKIN, S. (2000), *Communication Systems*, 4th Ed., Wiley, New York.

HEEGARD, C., AND WICKER, S. B. (1999), *Turbo Coding,* Kluwer, Boston.

HELLER, J. A. (1975), "Feedback Decoding of Convolutional Codes," in *Advances in Communication Systems,* vol. 4, A. J. Viterbi (Ed.), Academic, New York.

HELSTROM, C. W. (1991), *Probability and Stochastic Processes for Engineers,* Macmillan, New York.

HOCQUENGHEM, A. (1959), "Codes Correcteurs d'Erreurs," *Chiffers,* vol. 2, pp. 147–156.

HOEG, W., AND LAUTERBACK, T. (2001), *Digital Audio Broadcasting: Principles and Applications of Digital Radio*, John Wiley and Sons, New York.

HOLMES, J. K. (1982), *Coherent Spread Spectrum Systems,* Wiley-Interscience, New York.

HUFFMAN, D. A. (1952), "A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes," *Proc. IRE,* vol. 40, pp. 1098–1101, September.

INGLE, V., AND PROAKIS, J. G. (2000), *Digital Signal Processing Using Matlab*, Brooks-Cole, Pacific Grove, Calif.

JAYANT, N. S., AND NOLL. P. (1984), *Digital Coding of Waveforms,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

JELINEK, F. (1969), "Fast Sequential Decoding Algorithm Using a Stack," *IBM J. Res. Dev.,* vol. 13, pp. 675–685, November.

JOHANNESON, R., AND ZIGANGIROV, K. S. (1999), *Fundamentals of Convolutional Coding*, IEEE Press, New York.

JONES, A. E., WILKINSON, T. A., AND BARTON, S. K. (1994), "Block Coding Schemes for Reduction of Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Systems," *Elect. Lett.,* vol. 30, pp. 2098–2099, December.

KAILATH, T. (1960), "Correlation Detection of Signals Perturbed by a Random Channel," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-6, pp. 361–366, June.

KAILATH, T. (1961), "Channel Characterization: Time-Variant Dispersive Channels," in *Lectures on Communication Theory,* Chapter 6, E. Baghdadi (Ed.), McGraw-Hill, New York.

KASAMI, T. (1966), "Weight Distribution Formula for Some Class of Cyclic Codes," Coordinated Science Laboratory, University of Illinois, Urbana, Ill., Tech. Report No. R-285, April.

KOTELNIKOV, V. A. (1947), "The Theory of Optimum Noise Immunity," Ph.D. Dissertation, Molotov Energy Institute, Moscow, Translated by R. A. Silverman, McGraw-Hill, New York, 1959.

KRETZMER, E. R. (1966), "Generalization of a Technique for Binary Data Communication," *IEEE Trans. Commun. Tech.,* vol. COM-14, pp. 67–68, February.

LARSEN, K. J. (1973), "Short Convolutional Codes with Maximal Free Distance for Rates 1/2, 1/3, 1/4," *IEEE Trans. Inform Theory,* vol. IT-19, pp. 371–372, May.

LAYER, D. H. (2001), *Digital Radio Takes to the Road*, IEEE Spectrum, vol. 38, no. 7, pp. 40–46. July.

LENDER, A. (1963), "The Duobinary Technique for High Speed Data Transmission," *AIEE Trans. Commun. Elect.,* vol. 82, pp. 214–218.

LEON-GARCIA, A. (1994), *Probability and Random Processes for Electrical Engineering,* 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading Mass.

LIN, S., AND COSTELLO, D. J., Jr. (2005), *Error Control Coding: Fundamentals and Applications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

LINDE, J., BUZO, A., AND GRAY, R. M. (1980), "An Algorithm for Vector Quantizer Design," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-28, pp. 84–95, January.

LINDSEY, W. C. (1964), "Error Probabilities for Ricean Fading Multichannel Reception of Binary and N-ary Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-10, pp. 339–350, October.

LINDSEY, W. C. (1972), *Synchronization Systems in Communications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

LINDSEY, W. C., AND CHIE, C. M. (1981), "A Survey of Digital Phase-Locked Loops," *Proc. IEEE,* vol. 69, pp. 410–432.

LINDSEY, W. C., AND SIMON, M. K. (1973), *Telecommunication Systems Engineering,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

LLOYD, S. P. (1957), "Least Square Quantization in PCM," Reprinted in *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-28, pp. 129–137, March 1982.

LUCKY, R. W. (1965), "Automatic Equalization for Digital Communication," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 45, pp. 255–286, April.

LUCKY, R. W. (1966), "Techniques for Adaptive Equalization for Digital Communication," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 45, pp. 255–286.

LUCKY, R. W., SALZ, J., AND WELDON, E. J., Jr. (1968), *Principles of Data Communication*, McGraw-Hill, New York.

LYON, D. L. (1975a), "Timing Recovery in Synchronous Equalized Data Communication," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-23, pp. 269–274, February.

LYON, D. L. (1975b), "Envelope-Derived Timing Recovery in QAM and SQAM Systems," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-23, pp. 1327–1331, November.

MACWILLIAMS, F. J., AND SLOANE, J. J. (1977), *The Theory of Error Correcting Codes,* North Holland, New York.

MARKEL, J. D., AND GRAY, A. H., Jr. (1976), *Linear Prediction of Speech,* Springer-Verlag, New York.

MASSEY, J. L. (1963), *Threshold Decoding,* MIT Press, Cambridge, Mass.

MAX, J. (1960), "Quantizing for Minimum Distortion," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-6, pp. 7–12, March.

McMAHON, M. A. (1984), *The Making of a Profession—A Century of Electrical Engineering in America,* IEEE Press, New York.

MENGALI, U., AND D'ANDREA, A. N. (1997), *Synchronization Techniques for Digital Receivers,* Plenum Press, New York.

MEYR, H., AND ASCHEID, G. (1990), *Synchronization in Digital Communication,* Wiley-Interscience, New York.

MEYR, H., MOENECLAEY, M., AND FECHTEL, S. A. (1997), *Digital Communication Receivers, Synchronization, Channel Estimation, and Signal Processing,* vol. 2, John Wiley and Sons, New York.

MILLMAN, S., Ed. (1984), *A History of Engineering and Science in the Bell System—Communications Sciences (1925–1980),* AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, N. J.

MUELLER, K. H., AND MULLER, M. S. (1976), "Timing Recovery in Digital Synchronous Data Receivers," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-24, pp. 516–531, May.

NELSON, R. (1995), *Probability, Stochastic Processes and Queueing Theory: The Mathematics of Computer Modeling,* Springer Verlag, New York.

NORTH, D. O. (1943), "An Analysis of the Factors Which Determine Signal/Noise Discrimination in Pulse-Carrier Systems," RCA Tech. Report No. 6, PTR-6C.

NYQUIST, H. (1924), "Certain Factors Affecting Telegraph Speed," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 3, p. 324.

NYQUIST, H. (1928), "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *AIEE Trans.,* vol. 47, pp. 617–644.

ODENWALDER, J. P. (1970), "Optimal Decoding of Convolutional Codes," Ph.D. Dissertation, Dept. of Systems Sciences, UCLA, Los Angeles.

OLSEN, J. D. (1977), "Nonlinear Binary Sequences with Asymptotically Optimum Periodic Cross Correlation," Ph.D. Dissertation, University of Southern California, Los Angeles.

OMURA, J. (1971), "Optimal Receiver Design for Convolutional Codes and Channels with Memory via Control Theoretical Concepts," *Inform. Sci.,* vol. 3, pp. 243–266.

OPPENHEIM, A. V., WILLSKY, A. S., AND YOUNG, I. T. (1983), *Signals and Systems,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

PAPOULIS, A. (1962), *The Fourier Integral and Its Applications,* McGraw-Hill, New York.

PAPOULIS, A. (1991), *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes,* 3rd Ed., McGraw-Hill, New York.

PAWULA, R. F. (1999), "Generic Error Probabilities," *IEEE Trans. Commun,* vol. COM-47, pp. 697–702, May.

PAWULA, R. F., RICE, S. O., AND ROBERTS, J. H. (1982), "Distribution of the Phase Angle Between Two Vectors Perturbed by Gaussian Noise," *IEEE Trans. Commun,* vol. COM-30, pp. 1828–1841, August.

PETERSON, R. L., ZIEMER, R. E., AND BORTH, D. E. (1995), *Introduction to Spread Spectrum Communications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

PETERSON, W. W., AND WELDON, E. J., Jr. (1972), *Error Correcting Codes*, 2nd Ed., MIT Press, Cambridge, Mass.

PICKHOLTZ, R. L., SCHILLING, D. L., AND MILSTEIN, L. B. (1982), "Theory of Spread Spectrum Communications—A Tutorial," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-30, pp. 855–884, May.

PIERCE, J. N. (1958), "Theoretical Diversity Improvement in Frequency Shift Keying," *Proc. IRE,* vol. 46, pp. 903–910, May.

PIERCE, J. N., AND STEIN, S. (1960), "Multiple Diversity with Non-Independent Fading," *Proc. IRE,* vol. 48, pp. 89–104, January.

POPOVIC, B. M. (1991), "Synthesis of Power Efficient Multitone Signals with Flat Amplitude Spectrum," *IEEE Trans. Commun.,* vol. 39, pp. 1031–1033, July.

PRICE, R. (1954), "The Detection of Signals Perturbed by Scatter and Noise," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. PGIT-4, pp. 163–170, September.

PRICE, R. (1956), "Optimum Detection of Random Signals in Noise with Application to Scatter Multipath Communication," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-2, pp. 125–135, December.

PRICE, R. (1962a), "Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, Mass., Tech. Report No. 258, July.

PRICE, R. (1962b), "Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-8, pp. 308–316, September.

PRICE, R., AND GREEN, P. E., Jr. (1958), "A Communication Technique for Multipath Channels," *Proc. IRE,* vol. 46, pp. 555–570, March.

PRICE, R., AND GREEN, P. E., Jr. (1960), "Signal Processing in Radio Astronomy—Communication via Fluctuating Multipath Media," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, Mass., Tech. Report No. 2334, October.

PROAKIS, J. G., AND MANOLAKIS, D. G. (2007), *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 4th Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

PROAKIS, J. G., AND SALEHI, M. (2002), *Communication Systems Engineering*, 2nd Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

PROAKIS, J. G., AND SALEHI, M. (2008), *Digital Communications,* 5th Ed., McGraw-Hill, New York.

PROAKIS, J. G., SALEHI, M., AND BAUCH, G. (2013), *Contemporary Communication Systems Using Matlab and Simulink*, 3rd Ed., Thomson, Stamford, Conn.

RABINER, L. R., AND SCHAFER, R. W. (1979), *Digital Processing of Speech Signals,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

RAPPAPORT, T. S. (1996), *Wireless Communications: Principles and Practice*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

REED, I. S., AND SOLOMON, G. (1960), "Polynomial Codes over Certain Finite Fields," *SIAM J.,* vol. 8, pp. 300–304, June.

RYAN, W. E., AND LIN, S. (2009), *Channel Codes, Classical and Modern*, Cambridge University Press.

RYDER, J. D., AND FINK, D. G. (1984), *Engineers and Electronics*, IEEE Press, New York.

SAKRISON, D. J. (1968), *Communication Theory: Transmission of Waveforms and Digital Information,* New York, Wiley.

SALTZBERG, B. R. (1967), "Performance of an Efficient Data Transmission System," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-15, pp. 805–811, December.

SARWATE, D. V., AND PURSLEY, M. B. (1980), "Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 2399–2419, September.

SCHOLTZ, R. A. (1977), "The Spread Spectrum Concept," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-25, pp. 748–755, August.

SCHOLTZ, R. A. (1979), "Optimal CDMA Codes," *1979 National Telecommunications Conf. Record,* Washington, D.C., pp. 54.2.1–54.2.4, November.

SCHOLTZ, R. A. (1982), "The Origins of Spread Spectrum," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-30, pp. 822–854, May.

SCHOUHAMER IMMINK, K. A. (1991), *Coding Techniques for Digital Recorders,* Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N. J.

SCHWARTZ, M., BENNETT, W. R., AND STEIN, S. (1966), *Communication Systems and Techniques,* McGraw-Hill, New York.

SHANMUGAM, K. S. (1979), *Digital and Analog Communication Systems,* Wiley, New York.

SHANNON, C. E. (1948a), "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, July.

SHANNON, C. E. (1948b), "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 27, pp. 623–656, October.

SIMON, M. K., OMURA, J. K., SCHOLTZ, R. A., AND LEVITT, B. K. (1985), *Spread Spectrum Communications vol. I, II, III,* Computer Science Press, Rockville, Md.

SMITH, J. W. (1965), "The Joint Optimization of Transmitted Signal and Receiving Filter for Data Transmission Systems," *Bell Sys. Tech. J.,* vol. 44, pp. 1921–1942, December.

STARK, H., AND WOODS, J. W. (1994), *Probability, Random Processes and Estimation Theory for Engineers,* 2nd Ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J.

STARR, T., CIOFFI, J. M., AND SILVERMAN, P. J. (1998), *Understanding Digital Subscriber Line Technology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

STENBIT, J. P. (1964), "Table of Generators for BCH Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-10, pp. 390–391, October.

STIFFLER, J. J. (1971), *Theory of Synchronous Communications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

STREMLER, F. G. (1990), *Introduction to Communication Systems,* 3rd Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass.

SUNDBERG, C. W. (1986), "Continuous Phase Modulation," *IEEE Commun. Mag.,* vol. 24, pp. 25–38, April.

TANG, D. L., AND BAHL, L. R. (1970), "Block Codes for a Class of Constrained Noiseless Channels," *Inform. Control,* vol. 17, pp. 436–461.

TAROKH, V., AND JAFARKHANI, H. (2000), "On the Computation and Reduction of the Peak-to-Average Power Ratio in Multicarrier Communications," *IEEE Trans. Commun.,* vol. 48, pp. 37– 44, January.

TAROKH, V., JAFARKHANI, H., AND CALDERBANK, A. R. (1999), "Space-Time Block Codes from Orthogonal Designs," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-45, pp. 1456–1467, July.

TAROKH, V., SESHADRI, N., AND CALDERBANK, A. R. (1998), "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communications: Performance Analysis and Code Construction," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 44, pp. 744–765, March.

TAUB, H., AND SCHILLING, D. L. (1986), *Principles of Communication Systems,* 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.

TELLADO, J., AND CIOFFI, J. M. (1998), "Efficient Algorithms for Reducing PAR in Multicarrier Systems," *Proc. 1998 IEEE Int. Symp. Inform. Theory,* p. 191, August 16–21, Cambridge, Mass. Also in *Proc. 1998 Globecom,* Nov. 8–12, Sydney, Australia.

TUFTS, D. W. (1965), "Nyquist's Problem—The Joint Optimization of Transmitter and Receiver in Pulse Amplitude Modulation," *Proc. IEEE,* vol. 53, pp. 248–259, March.

TURIN, G. L. (1961), "On Optimal Diversity Reception," *IRE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-7, pp. 154–166, March.

TURIN, G. L. (1962), "On Optimal Diversity Reception II," *IRE Trans. Commun. Sys.,* vol. CS-12, pp. 22–31, March.

UNGERBOECK, G. (1974), "Adaptive Maximum Likelihood Receiver for Carrier Modulated Data Transmission Systems," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-22, pp. 624–636, May.

UNGERBOECK, G. (1982), "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-28, pp. 55–67, January.

VITERBI, A. J. (1966), *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York.

VITERBI, A. J. (1967), "Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-13, pp. 260–269, April.

VITERBI, A. J. (1979), "Spread Spectrum Communication—Myths and Realities," *IEEE Commun. Mag.,* vol. 17, pp. 11–18, May.

VITERBI, A. J. (1985), "When Not to Spread Spectrum—A Sequel," *IEEE Commun. Mag.,* vol. 23, pp. 12–17, April.

VITERBI, A. J. (1995), *CDMA, Principles of Spread Spectrum Communications*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

VITERBI, A. J., AND JACOBS, I. M. (1975), "Advances in Coding and Modulation for Noncoherent Channels Affected by Fading, Partial Band, and Multiple-Access Interference," in *Advances in Communication Systems,* vol. 4, A. J. Viterbi, (Ed.), Academic, New York.

WEI, L. F. (1984), "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space. Part I: 180°, Part II: Nonlinear Codes," *IEEE J. Selected Areas Commun.,* vol. SAC-2, pp. 659–687. September.

WEINSTEIN, SW. B., AND EBERT, P. M. (1971), "Data Transmission by Frequency Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Commun.,* vol. COM-19, pp. 628–634, October.

WEINSTEIN, S. F. (1974), "Simplified Relationships for the Probability Distribution of the Phase of a Sine Wave in Narrow-Band Normal Noise," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-20, pp. 658–661, September.

WICKER, S. B. (1995), *Error Control Systems for Digital Communication and Storage*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

WIDROW, B. (1966), "Adaptive Filters, I: Fundamentals," Tech. Report No. 6764–6, Stanford Electronic Laboratories, Stanford University, Stanford, Calif., December.

WIENER, N. (1949), *The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time-Series with Engineering Applications,* Wiley, New York. (The original work appeared in an MIT Radiation Laboratory Report, 1942).

WILKINSON, T. A., AND JONES, A. E. (1995), "Minimization of the Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Systems by Block Coding," *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.,* pp. 825–829, July.

WONG, E., AND HAJEK, B. (1985), *Stochastic Processes in Engineering Systems,* Springer-Verlag, New York.

WOZENCRAFT, J. M. (1957), "Sequential Decoding for Reliable Communication," *IRE Natl. Conv. Rec.,* vol. 5, pt. 2, pp. 11–25.

WOZENCRAFT, J. M., AND JACOBS, I. M. (1965), *Principles of Communication Engineering,* Wiley, New York.

WOZENCRAFT, J. M., AND REIFFEN, B. (1961), *Sequential Decoding,* MIT Press, Cambridge, Mass.

WULICH, D. (1996), "Reduction of Peak-to-Mean Ratio of Multicarrier Modulation Using Cyclic Coding," *Elect. Lett.,* vol. 32, pp. 432–433, February.

ZIEMER, R. E., AND PETERSON, R. L. (1985), *Digital Communications and Spread Spectrum Systems,* Macmillan, New York.

ZIEMER, R. E., AND TRANTER, W. H. (2002), *Principles of Communications: Systems, Modulation, and Noise,* Houghton Mifflin, Boston.

ZIGANGIROV, K. S. (1966), "Some Sequential Decoding Procedures," *Problemy Peredachi Informatsii,* vol. 2, pp. 13–25.

ZIV, J., AND LEMPEL, A. (1977), "A Universal Algorithm for Sequential Data Compression," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT23, pp. 337–343.

ZIV, J., AND LEMPEL, A. (1978), "Compression of Individual Sequences via Variable Rate Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-24, pp. 530–536.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致。

B

D

E

F

G

H

I

J

K

L

P

Q

R

S

T